

Chapitre 15 : Variable aléatoire réelle

Dans tout ce chapitre, nous considérerons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, en cas de doute sur ce dont il s'agit, retournez voir le chapitre 11.

Objectifs du chapitre

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

- * Connaître les notations $[X \in I]$, $[X = x]$ et $[X \leq x]$ et savoir ce qu'elles signifient.
- * Savoir calculer $X(\Omega)$ pour X une variable aléatoire réelle.
- * Connaître la définition d'un système complet d'événements associé à une variable aléatoire.
- * Connaître la définition d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire et les propriétés de ces fonctions.
- * Savoir ce que signifie : "La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire".

I Variable aléatoire à valeur réelle

Définition 1 (Variable aléatoire réelle).

Un **variable aléatoire réelle** sur (Ω, \mathcal{A}) est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$ appartient à \mathcal{A} .

On note alors $[X \leq x]$ l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$.

ATTENTION. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est un **réel**.

Exemple. Nous réutiliserons ces exemples par la suite.

1. On lance un dé trois fois de suite, on note X_1 la somme des résultats obtenus.

$$X_1(\{1; 1; 1\}) = 3$$

$$X_1(\{1; 6; 3\}) = 10$$

$$X_1(\{5; 4; 6\}) = 15$$

2. On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir face. On note X_2 le nombre de lancers effectués.

$$X_2(\{F\}) = 1$$

$$X_2(\{P; P; F\}) = 3$$

$$X_2(\{P; F\}) = 2$$

3. Considérons une personne jouant à la roulette. Pour rappel, une roulette est constituée de 37 cases, 18 noires, 18 rouges et 1 verte. Le joueur mise 1 € à chaque partie, s'il gagne, il double ses gains, s'il échoue, il perd sa mise.

Le joueur joue 3 parties, on note X_3 les gains (ou la dette) du joueur.

$$X_3(\{V; V; D\}) = 1$$

$$X_3(\{D; V; D\}) = -1$$

$$X_3(\{D; D; D\}) = -3$$

4. Considérons une fourmi sur un fil tendu. Notons X_4 sa position sur le fil une fois 3 minutes écoulées.

remarque. En pratique, on ne vous demandera jamais de montrer que X est une variable aléatoire.

Définition 2 (Univers associé à une variable aléatoire réelle).

On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X . On appelle $X(\Omega)$ l'univers associé à X .

Exemple.

1. $X_1(\Omega) = \{3; 4; 5; \dots; 17; 18\}$

2. $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$

3. $X_3(\Omega) = \{-3; -1; 1; 3\}$

4. $X_4(\Omega)$ est l'ensemble des points à 3 minutes de marche du point de départ pour une fourmi, cela pouvant être le point de départ si la fourmi fait demi-tour.

Pour x_{max} la distance maximale que peut parcourir une fourmi en 3 minutes, $X_4(\Omega) = [-x_{max}; x_{max}]$.

Notation. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on note :

- * $[X \in I]$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\}$.

- * $[X = x]$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$.
- * $[X \leq x]$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$.

EXERCICE 1. Définir de même que précédemment les notations $[X < x]$, $[X > x]$ et $[X \geq x]$.

remarque. Ces éléments étant des événements, on peut alors calculer leur probabilité.

Exemple.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\mathbb{P}([X_1 = 3]) = \mathbb{P}(\{1; 1; 1\}) = \frac{1}{216}$ | $\mathbb{P}([X_1 \leq 1]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ | $\mathbb{P}([X_1 \geq 17]) = \mathbb{P}(\{6; 6; 6\} \cup \{5; 6; 6\} \cup \{6; 5; 6\} \cup \{6; 6; 5\}) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$ |
| 2. $\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}(\{P; P; F\}) = \frac{1}{8}$ | $\mathbb{P}([X_2 \leq 1]) = \mathbb{P}(\{F\}) = \frac{1}{2}$ | $\mathbb{P}([X_2 \geq 17]) = \mathbb{P}(\{P; P; P; \dots; P\}) = \frac{1}{2^{17}}$ |
| 3. $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \mathbb{P}(\{V; V; V\}) = \left(\frac{18}{37}\right)^3 \approx 0.12$ | $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ | $\mathbb{P}([X_3 \leq 0]) = \mathbb{P}(\{D; D; D\} \cup \{D; D; V\} \cup \{D; V; D\} \cup \{V; D; D\}) = \left(\frac{19}{37}\right)^3 + 3 \times \frac{18}{37} \times \left(\frac{19}{37}\right)^2 \approx 0.52$ |

EXERCICE 2. Démontrer tous les résultats de l'exemple.

EXERCICE 3. On lance deux dés non truqués. Soit X donnant la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.

1. Déterminer Ω , puis $X(\Omega)$.
2. Décrire $[X = 3]$ avec une phrase, puis avec un ensemble.
3. Faire de même avec les événements $[X < 2]$ et $[X \geq 11]$.
4. Calculer $\mathbb{P}([X = 3])$, $\mathbb{P}([X < 2])$ et $\mathbb{P}([X \geq 11])$

Définition 3 (Système complet d'événement associé à une variable aléatoire).

Considérons l'ensemble des valeurs possible d'une variable aléatoire $X : X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$.

La famille d'événements $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événement de Ω .

On l'appelle le **système complet d'événements associé à la variable aléatoire X** .

Exemple. Regardons l'exemple 1, on rappelle que $X_1(\Omega) = \{3; 4; 5; \dots; 17; 18\}$.

Alors l'ensemble $\{[X_1 = n] | n \in \{3; 4; 5; \dots; 17; 18\}\}$ forme un système complet d'événement.

À partir de maintenant, nous allons considérer dans la suite de ce chapitre, nous considérerons une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

II Fonction de répartition

Définition 4 (Fonction de répartition).

On définit fonction de répartition de X comme la fonction, notée F_X , telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$$

ATTENTION. F_X est une fonction définie sur \mathbb{R} .

Exemple.

- | | | |
|----|--|--|
| 3. | $F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \left(\frac{19}{37}\right)^3 \approx 0.14 & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ \left(\frac{19}{37}\right)^3 + 3 \times \frac{18}{37} \times \left(\frac{19}{37}\right)^2 \approx 0.52 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \left(\frac{19}{37}\right)^3 + 3 \times \frac{18}{37} \times \left(\frac{19}{37}\right)^2 + 3 \times \frac{19}{37} \times \left(\frac{18}{37}\right)^2 \approx 0.89 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ | |
| 2. | $F_{X_2}(x) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}$ | |

EXERCICE 4. On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. On pioche une boule dans cette urne et on note X le numéro de la boule piochée.

1. Donner l'univers associé à la variable aléatoire X .
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(X = x)$.
3. Donner l'expression de la fonction F_X .
4. Tracer la fonction F_X .

Proposition 5 (Propriétés des fonctions de répartition). Toute fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X vérifie les propriétés suivantes :

- * F_X est **croissante**.
- * F_X est **continue à droite en tout point**.
- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- * $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Exemple. Les fonctions de répartition vues précédemment vérifient bien ces propriétés.

EXERCICE 5. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$, pour

$a < b$, vérifient les propriétés de la proposition précédente.

III Loi d'une variable aléatoire

Définition 6 (Loi d'une variable aléatoire). Soit X une variable aléatoire réelle.

La loi de la variable aléatoire X est l'ensemble des valeurs des probabilités $\mathbb{P}(X \in I)$, pour I une union (finie ou dénombrable) d'intervalles de \mathbb{R} .

remarque. En pratique, on ne vous demandera pas de connaître cette définition, mais de connaître la définition dans des cas spécifiques que vous verrez dans les prochains chapitres.

Théorème 7. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

X et Y sont de même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.