

Chapitre 16 : Convexité

Dans tout ce chapitre, nous considérerons un intervalle I de \mathbb{R} et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Objectifs du chapitre

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

- * Connaître les fonctions usuelles p -fois dérivables, de classe C^p , de classe C^∞ .
- * Savoir utiliser les opérations sur les fonctions pour montrer qu'une fonction est p -fois dérivable, de classe C^p , de classe C^∞ .
- * Connaître la définition d'une fonction convexe, concave, un point d'inflexion et leur interprétation géométrique.
- * Connaître et savoir utiliser la caractérisation d'une fonction convexe de classe C^1 .
- * Connaître et savoir utiliser la caractérisation d'une fonction convexe de classe C^2 .

I Dérivées successives

I.1 Fonctions p -fois dérivables

Définition 1 (Définition par récurrence). On définit par récurrence les dérivées successives de f par :

- * $f^{(0)} = f$
- * Si $f^{(p)}$ est dérivable, on définit $f^{(p+1)} = (f^{(p)})'$

La fonction $f^{(p)}$ est appelée la **dérivée p -ième** de f .

On dit que la fonction f est p fois dérivable sur I si la fonction $f^{(p)}$ existe et est bien définie sur I .

remarque. On notera la dérivée première d'une fonction f' plutôt que $f^{(1)}$.

On notera la dérivée seconde d'une fonction f'' plutôt que $f^{(2)}$.

Exemple.

Montrons que \ln est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

On sait que \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Or, $x \mapsto x$ est un polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0.

Par quotient de fonctions dérivables, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Donc \ln est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x > 0$, on a $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

ATTENTION. N'oubliez pas les parenthèses lorsque vous écrivez la dérivée p -ième, on écrit $f^{(p)}$ et non f^p .

EXERCICE 1. Calculer les dérivées 3e et 4e de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 4x + 1$.

Méthode (Première méthode). Pour montrer qu'une fonction est p -fois dérivable,

1. Écrire, au brouillon, les premières dérivées.
2. Conjecturer la formule de la fonction $f^{(p)}$.
3. Démontrer cette formule par récurrence.

EXERCICE 2.

1. Calculer la dérivée p -ième de la fonction $x \mapsto x^n$, pour p et n des entiers.
2. Calculer la dérivée p -ième de la fonction $x \mapsto e^{ax}$, $a \neq 0$.

I.2 Fonctions de classe C^p

Définition 2. On dit qu'une fonction f est de classe C^p sur I si f est p -fois dérivable sur I et que $f^{(p)}$ est continue sur I .

On note $C^p(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^p .

remarque. Une fonction f est de classe C^0 sur I si et seulement si elle est continue sur I .

Une fonction f est de classe C^1 sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et que f' est continue sur I .

Une fonction f est de classe C^2 sur I si et seulement si elle est deux fois dérivable sur I et que f'' est continue sur I .

Exemple. La fonction \ln est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée seconde est $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Or $x \mapsto x^2$ est une polynôme donc continue sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0.

Par quotient de fonctions continues, $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, la fonction \ln est de classe C^2 .

Définition 3. On dit qu'une fonction f est de classe C^∞ sur I si elle est p -fois dérivable sur I , pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On dit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur I .

On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I .

EXERCICE 3. Montrer que la fonction \exp est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Proposition 4 (Fonctions usuelles).

- * Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- * La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- * Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- * La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
- * La fonction \exp est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- * La fonction \ln est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

remarque. Ce sont les mêmes intervalles que pour la dérivabilité.

I.3 Opérations sur les fonctions p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞)

Proposition 5 (Linéarité). Soit $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g des fonctions p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I .

- * Multiplication par un réel : la fonction λf est p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I .

- * Somme : la fonction $f + g$ est p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I .

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^5 - 3x + e^{2x}$ est 4-fois dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée 4e est :

$$f^{(4)}(x) = 20x - 3 + 16e^{2x}$$

Proposition 6 (Formule de Leibniz). Soit $p \in \mathbb{N}$ et f et g des fonctions p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I .

Produit : la fonction fg est p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I .

EXERCICE 4. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 e^{2x}$ est de classe C^∞ et donner la formule de ses dérivées.

Proposition 7 (Quotient). Soit $p \in \mathbb{N}$ et f et g des fonctions p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I .

Quotient : la fonction $\frac{f}{g}$ est p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I , si

EXERCICE 5. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$. Montrer que f est trois fois dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, calculer $f^{(3)}$.

Proposition 8 (Composée). Soit $p \in \mathbb{N}$, f une fonction p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I et g une fonction p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur J .

Composée : la fonction $g \circ f$ est p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞) sur I , si

EXERCICE 6. Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et calculer $f^{(3)}$.

Méthode (Deuxième méthode). Pour montrer qu'une fonction est p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞).

1. Repérer les fonctions usuelles dont on connaît la dérivabilité et la classe.
2. Assembler les fonctions usuelles par opération sur les fonctions p -fois dérivables (respectivement de classe C^p , respectivement de classe C^∞).
3. Si on vous le demande, utiliser les formules vues en cours, ou calculer dérivée après dérivée.

EXERCICE 7. Donner l'intervalle sur lequel les fonctions suivantes sont de classe C^∞ et donner leur dérivée seconde.

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad g : x \mapsto \frac{\ln(x) + e^x}{x^2} \qquad h : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$$

II Convexité

II.1 Définition et interprétation géométrique

Définition 9 (Fonction convexe). Soit f une fonction définie sur I .

On dit qu'une fonction f est convexe sur I si, pour tout $x_1, x_2 \in I$ et pour tout $t_1, t_2 \in [0; 1]$ tels que

on a

remarque. Le graphe d'une fonction convexe est en-dessous de ses cordes.

Définition 10 (Fonction concave). Soit f une fonction définie sur I .

On dit qu'une fonction f est concave sur I si, pour tout $x_1, x_2 \in I$ et pour tout $t_1, t_2 \in [0; 1]$ tels que

on a

remarque. Le graphe d'une fonction concave est au-dessus de ses cordes.

remarque. Lorsque l'on demande d'étudier la convexité de la fonction f , on demande de donner les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et ceux sur lesquels elle est concave.

Définition 11 (Point d'inflexion). Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas à une extrémité de I .

On dit que le réel x_0 est un point d'inflexion de f si la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en x_0 .

Autrement dit, s'il existe des voisinages $]a; x_0[$ et $]x_0; b[$ de x_0 dans I tel que f soit convexe sur $]a; x_0[$ et concave sur $]x_0; b[$ ou concave sur $]a; x_0[$ et convexe sur $]x_0; b[$.

II.2 Caractérisation pour les fonctions de classe C^1

Proposition 12 (Fonction convexe). Soit f une fonction de classe C^1 sur I .

La fonction f est convexe sur I si et seulement si

Proposition 13 (Fonction convexe). Soit f une fonction de classe C^1 sur I .

La fonction f est convexe sur I si et seulement si

Proposition 14 (Fonction concave). Soit f une fonction de classe C^1 sur I .

La fonction f est concave sur I si et seulement si

Proposition 15 (Fonction concave). Soit f une fonction de classe C^1 sur I .

La fonction f est concave sur I si et seulement si

Proposition 16 (Point d'inflexion). Soit f une fonction de classe C^1 sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas à une extrémité de I .

Le réel x_0 est un point d'inflexion de f si et seulement

II.3 Caractérisation pour les fonctions de classe C^2

Proposition 17. Soit f une fonction de classe C^2 sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas à une extrémité de I .

* f est convexe sur I si et seulement si .

- * f est concave sur I si et seulement si
- * x_0 est un point d'inflexion de f si et seulement si

remarque. En pratique, c'est cette propriété qui est le plus souvent utilisée pour montrer que la fonction est convexe ou concave sur I .

Exemple (À retenir).

- * La fonction $x \mapsto x^2$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et sa dérivée seconde est

Ainsi la fonction $x \mapsto x^2$ est

- * La fonction \exp est de classe C^2 sur \mathbb{R} et sa dérivée seconde est

Ainsi la fonction \exp est

- * La fonction \ln est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée seconde est

Ainsi la fonction \ln est

- * La fonction $x \mapsto x^3$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} et sa dérivée seconde est

Ainsi la fonction $x \mapsto x^3$ est

- * La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^2 sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et sa dérivée seconde est

Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est

EXERCICE 8. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convexité de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, pour tout $x > 0$.

II.4 Inégalités de convexité

Proposition 18 (Rappel). Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$.

L'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est

Proposition 19. Soit f une fonction de classe C^1 sur I et $x_0 \in I$.

- * Si f est convexe sur I , alors, pour tout $x \in I$,
- * Si f est concave sur I , alors, pour tout $x \in I$,

EXERCICE 9. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$

remarque. On peut également utiliser la définition de la convexité pour démontrer une inégalité.

EXERCICE 10. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} \leq \frac{e^x + 1}{2}$

2. $\forall x > 0, \ln(x + 1) - \ln(2) \geq \frac{1}{2} \ln(x)$

remarque. Dans tous les cas précédents, on est jamais obligé d'utiliser la convexité de la fonction pour montrer les inégalités suivantes.

En effet, on peut également passer tous les termes dépendant de x du même côté de l'inégalité pour obtenir une inégalité de la forme $f(x) \geq a$.

Ensuite, en étudiant les variations de la fonction f , on peut alors trouver son minimum et montrer que ce minimum est supérieur à a .

La convexité ne sert que de raccourci dans certains cas très particuliers.