Chapitre 16 : Convexité

Dans tout ce chapitre, nous considérerons un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

Objectifs du chapitre

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Connaître les fonctions usuelles p-fois dérivables, de classe C^p, de classe C^∞.
* Savoir utiliser les opérations sur les fonctions pour montrer qu'une fonction est p-fois dérivable, de classe C^p, de classe C^∞.
* Connaître la définition d'une fonction convexe, concave, un point d'inflexion et leur interprétation géométrique.
* Connaître et savoir utiliser la caractérisation d'une fonction convexe de classe C^1.
* Connaître et savoir utiliser la caractérisation d'une fonction convexe de classe C^2.

I Dérivées successives

I.1 Fonctions p-fois dérivables

Définition 1 (Définition par récurrence)**.** On définit par récurrence les dérivées successives de f par :

* $f^{(0)} = f$
* Si $f^{(p)}$ est dérivable, on définit $f^{(p+1)} = \left(f^{(p)}\right)'$

La fonction $f^{(p)}$ est appelée la **dérivée p-ième** de f.

On dit que la fonction f est p fois dérivable sur I si la fonction $f^{(p)}$ existe et est bien définie sur I.

remarque. On notera la dérivée première d'une fonction f' plutôt que $f^{(1)}$.

On notera la dérivée seconde d'une fonction f'' plutôt que $f^{(2)}$.

Exemple.

Montrons que ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Or, $x \mapsto x$ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.

Par quotient de fonctions dérivables, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, on a $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

ATTENTION. N'oubliez pas les parenthèses lorsque vous écrivez la dérivée p-ième, on écrit $f^{(p)}$ et non f^p.

EXERCICE 1. Calculer les dérivées 3e et 4e de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 4x + 1$.

Méthode (Première méthode). Pour montrer qu'une fonction est p-fois dérivable,

1. Écrire, au brouillon, les premières dérivées.
2. Conjecturer la formule de la fonction $f^{(p)}$.
3. Démontrer cette formule par récurrence.

EXERCICE 2.

1. Calculer la dérivée p-ième de la fonction $x \mapsto x^n$, pour p et n des entiers.
2. Calculer la dérivée p-ième de la fonction $x \mapsto e^{ax}$, $a \neq 0$.

I.2 Fonctions de classe C^p

Définition 2. On dit qu'une fonction f est de classe C^p sur I si f est p-fois dérivable sur I et que $f^{(p)}$ est continue sur I.

On note $C^p(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^p.

remarque. Une fonction f est de classe C^0 sur I si et seulement si elle est continue sur I.

Une fonction f est de classe C^1 sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et que f' est continue sur I.

Une fonction f est de classe C^2 sur I si et seulement si elle est deux fois dérivable sur I et que f'' est continue sur I.

Exemple. La fonction ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Or $x \mapsto x^2$ est une polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.

Par quotient de fonctions continues, $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, la fonction ln est de classe C^2.

Définition 3. On dit qu'une fonction f est de classe C^∞ sur I si elle est p-fois dérivable sur I, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On dit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur I.

On note $C^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

EXERCICE 3. Montrer que la fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4 (Fonctions usuelles)**.**

* Pour tout $n \in N$, la fonction $x \mapsto x^n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
* Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
* La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
* La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
* La fonction ln est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

remarque. Ce sont les mêmes intervalles que pour la dérivabilité.

I.3 Opérations sur les fonctions p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞)

Proposition 5 (Linéarité)**.** Soit $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g des fonctions p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I.

* Multiplication par un réel : la fonction λf est p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I.

$$(\lambda f)^{(p)} = \lambda f^{(p)}$$

* Somme : la fonction $f+g$ est p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I.

$$(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^5 - 3x + e^{2x}$ est 4-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée 4e est :

$$f^{(4)}(x) = 120x + 16e^{2x}$$

Proposition 6 (Formule de Leibniz)**.** Soit $p \in \mathbb{N}$ et f et g des fonctions p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I.

Produit : la fonction fg est p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I.

$$(fg)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(p-k)}(x)$$

EXERCICE 4. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 e^{2x}$ est de classe C^∞ et donner la formule de ses dérivées.

Proposition 7 (Quotient)**.** Soit $p \in \mathbb{N}$ et f et g des fonctions p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I.

Quotient : la fonction $\frac{f}{g}$ est p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I, si g ne s'annule pas sur I.

Il n'y a pas de formule systématique.

EXERCICE 5. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$. Montrer que f est trois fois dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, calculer $f^{(3)}$.

Proposition 8 (Composée)**.** Soit $p \in \mathbb{N}$, f une fonction p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I et g une fonction p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur J.

Composée : la fonction $g \circ f$ est p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞) sur I, si pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

Il n'y a pas de formule systématique.

EXERCICE 6. Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(3)}$.

Méthode (Deuxième méthode)*.* Pour montrer qu'une fonction est p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞).

1. Repérer les fonctions usuelles dont on connait la dérivabilité et la classe.
2. Assembler les fonctions usuelles par opération sur les fonctions p-fois dérivables (respectivement de classe C^p, respectivement de classe C^∞).
3. Si on vous le demande, utiliser les formules vues en cours, ou calculer dérivée après dérivée.

EXERCICE 7. Donner l'intervalle sur lequel les fonctions suivantes sont de classe C^∞ et donner leur dérivée seconde.

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad g : x \mapsto \frac{\ln(x) + e^x}{x^2} \qquad h : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$$

II Convexité

II.1 Définition et interprétation géométrique

Définition 9 (Fonction convexe)**.** Soit f une fonction définie sur I.

On dit qu'une fonction f est convexe sur I si, pour tout x_1, $x_2 \in I$ et pour tout t_1, $t_2 \in [0; 1]$ tels que

$$t_1 + t_2 = 1$$

on a

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

remarque. Le graphe d'une fonction convexe est en-dessous de ses cordes.

Définition 10 (Fonction concave)**.** Soit f une fonction définie sur I.

On dit qu'une fonction f est concave sur I si, pour tout x_1, $x_2 \in I$ et pour tout t_1, $t_2 \in [0;1]$ tels que

$$t_1 + t_2 = 1$$

on a

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

remarque. Le graphe d'une fonction concave est au-dessus de ses cordes.

remarque. Lorsque l'on demande d'étudier la convexité de la fonction f, on demande de donner les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et ceux sur lesquels elle est concave.

Définition 11 (Point d'inflexion)**.** Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas à une extrémité de I.

On dit que le réel x_0 est un point d'inflexion de f si la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en x_0.

Autrement dit, s'il existe des voisinages $]a;x_0[$ et $]x_0;b[$ de x_0 dans I tel que f soit convexe sur $]a;x_0[$ et concave sur $]x_0;b[$ ou concave sur $]a;x_0[$ et convexe sur $]x_0;b[$.

II.2 Caractérisation pour les fonctions de classe C^1

Proposition 12 (Fonction convexe)**.** Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

La fonction f est convexe sur I si et seulement si

f' est croissante

Proposition 13 (Fonction convexe)**.** Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

La fonction f est convexe sur I si et seulement si

Le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 14 (Fonction concave)**.** Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

La fonction f est concave sur I si et seulement si

f' est décroissante

Proposition 15 (Fonction concave)**.** Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

La fonction f est concave sur I si et seulement si

Le graphe de f est en-dessous de ses tangentes.

Proposition 16 (Point d'inflexion)**.** Soit f une fonction de classe C^1 sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas à une extrémité de I.

Le réel x_0 est un point d'inflexion de f si et seulement

La tangente au graphe de la fonction f en x_0 traverse le graphe.

II.3 Caractérisation pour les fonctions de classe C^2

Proposition 17. Soit f une fonction de classe C^2 sur I et $x_0 \in I$ qui n'est pas à une extrémité de I.

* f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

* f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.
* x_0 est un point d'inflexion de f si et seulement si f'' change de signe en x_0.

remarque. En pratique, c'est cette propriété qui est le plus souvent utilisée pour montrer que la fonction est convexe ou concave sur I.

Exemple (À retenir).

* La fonction $x \mapsto x^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est
$$x \mapsto 2$$
Ainsi la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
* La fonction exp est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est
$$\exp$$
Ainsi la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
* La fonction ln est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde est
$$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$$
Ainsi la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
* La fonction $x \mapsto x^3$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est
$$x \mapsto 6x$$
Ainsi la fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty; 0]$, convexe sur $[0; +\infty[$ et présente un point d'inflexion en 0.
* La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^2 sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et sa dérivée seconde est
$$x \mapsto \frac{2}{x^3}$$
Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$, convexe sur $]0; +\infty[$ et ne présente pas de point d'inflexion.

EXERCICE 8. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convexité de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, pour tout $x > 0$.

II.4 Inégalités de convexité

Proposition 18 (Rappel)**.** Soit f une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$.

L'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est
$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Proposition 19. Soit f une fonction de classe C^1 sur I et $x_0 \in I$.

* Si f est convexe sur I, alors, pour tout $x \in I$,
$$f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$
* Si f est concave sur I, alors, pour tout $x \in I$,
$$f(x) \leqslant f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

EXERCICE 9. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$

remarque. On peut également utiliser la définition de la convexité pour démontrer une inégalité.

EXERCICE 10. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{x}{2}} \leqslant \frac{e^x+1}{2}$
2. $\forall x > 0,\ \ln(x+1) - \ln(2) \geqslant \frac{1}{2}\ln(x)$

remarque. Dans tous les cas précédents, on est jamais obligé d'utiliser la convexité de la fonction pour montrer les inégalités suivantes.

En effet, on peut également passer tous les termes dépendant de x du même côté de l'inégalité pour obtenir une inégalité de la forme $f(x) \geqslant a$.

Ensuite, en étudiant les variations de la fonction f, on peut alors trouver son minimum et montrer que ce minimum est supérieur à a.

La convexité ne sert que de raccourci dans certains cas très particuliers.