Chapitre 7 : Systèmes linéaires

I Solution d'un système linéaire

Définition 1.

On appelle **système linéaire** (S) de n équations à p inconnues un système d'équations écrit sous la forme suivante :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels appelés **coefficients** du système et les b_i sont des réels qui constituent le **second membre** du système. Ces réels définissent le système, ils sont fixés.

On repère chaque ligne (chaque équation) par un nom L_i pour la i-ème ligne.

Les x_j sont les inconnues du système.

Une solution du système est un p-uplet $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ qui vérifie *toutes* les équations du système.

Méthode. Résoudre un système (S), c'est trouver l'ensemble de toutes les solutions de ce système.

Exemple. $\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$ est un système linéaire à ..... équations et ..... inconnues.

Définition 2.

Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** lorsqu'ils admettent le même ensemble de solutions.

On note : $(S) \Leftrightarrow (S')$.

EXERCICE 1. Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccc} 5x & - & y & = & 1 \\ 5x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{ccccc} 5x & - & y & = & 1 \\ 5x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_3)\left\{\begin{array}{ccccc} 5x & - & y & = & 1 \\ 5x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 3. Un système linéaire est dit **homogène** si tous les éléments de son second membre sont nuls. (*ie* $b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$)

Le système homogène associé à un système (S) est le système (S_h) obtenu en remplaçant tous les éléments du second membre par 0.

Exemple. $\left\{\begin{array}{ccccc} 5x & - & y & = & 0 \\ 5x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \end{array}\right.$$

Proposition 4. Si un système (S) est homogène à n équations et p inconnues, il admet le p-uplet $(0,0,\dots,0)$ pour solution.

Définition 5. Un système à n équations et n inconnues $(p = n)$ qui possède une **unique** solution s'appelle un **système de Cramer**.

Exemple.

remarque. Si un système homogène est de Cramer, alors il admet pour unique solution $(0,0,\dots,0)$.

II Systèmes linéaires et matrices

Proposition 6. Reprenons le système (S) de la définition 1.

Posons : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On peut alors écrire le système (S) sous la forme $AX = B$. On appelle la matrice A la matrice associée au système linéaire (S) et B le second membre du système linéaire.

Ainsi, $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ est solution du système (S) si et seulement si $AX = B$.

Exemple. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Proposition 7. (S) est un système de Cramer si et seulement si la matrice associée A est inversible.

On peut alors l'écrire l'unique solution de ce système sous la forme $X = A^{-1}B$.

remarque. Cette proposition est très importante car elle établit une équivalence entre résoudre un système et inverser une matrice.

Il est donc possible, si vous cherchez à inverser une matrice de chercher la solution du système linéaire associé. Et, si vous cherchez la solution d'un système linéaire, il est possible de chercher à inverser la matrice associé, en fonction de ce qui est le plus facile.

Proposition 8. Considérons une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas, son inverse est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

III Cas particulier des systèmes triangulaires

Définition 9.

Un système linéaire est dit triangulaire si la matrice associée A est triangulaire, *ie* si pour tous les indices i et j tels que $i > j$, on a $a_{i,j} = 0$.

Sur chaque ligne, la première inconnue avec un coefficient non nul est appelé **inconnue principale**.

Méthode. Pour résoudre un système linéaire triangulaire,

1. on écrit sur chaque ligne l'inconnue principale en fonction des autres inconnues,
2. on considère la dernière équation, on la résout,
3. on considère l'équation au dessus et on utilise le résultat précédent pour la résoudre,
4. on continue de proche en proche jusqu'à arriver à l'ensemble des solutions du système linéaire ou tomber sur une impossibilité.

Exemple. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ & & 2y & = & 0 \end{array}\right.$

EXERCICE 2.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 2 \\ & & & & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ & & y & = & 2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ & & y & = & 2 \\ & & 0 & = & 3 \end{array}\right.$$

IV Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est une méthode qui permet de trouver les solutions d'un système linéaire quand elles existent.

Pour ce faire vous aurez uniquement le droit d'utiliser les opérations élémentaires suivantes :

Proposition 10.

Les opérations suivantes changent le système linéaire en un système linéaire équivalent :

* $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger les lignes i et j,
* $L_i \leftarrow aL_i$: multiplier la ligne i par un réel $\boldsymbol{a \neq 0}$,
* $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: ajouter b fois la ligne j à la ligne i,
* $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: remplacer la ligne i par $aL_i + bL_j$, pour un réel $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Définissons la méthode du pivot de Gauss sur un exemple :

Exemple. Considérons le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

1. Commencez comme toujours par donner le nom de la méthode que vous allez utiliser.

   On choisit la première ligne L_1 et on considère l'inconnue principale de cette ligne : x, on appelle cette inconnue le **pivot**.

   On va utiliser ce pivot pour éliminer toutes les inconnues x dans les lignes suivantes.

2. On élimine l'inconnue x dans la ligne 2.

3. On élimine l'inconnue x dans la ligne 3.

   On a terminé avec l'inconnue x.

   On choisit ensuite pour ligne L_2 et pour pivot l'inconnue y.

   On va utiliser ce pivot pour éliminer toutes les inconnues y dans les autres lignes.

4. On élimine l'inconnue y dans la ligne 1 et la ligne 3.

On a terminé avec l'inconnue y.

On choisit ensuite pour ligne L_3 et pour pivot l'inconnue z.

On va utiliser ce pivot pour éliminer toutes les inconnues z dans les autres lignes.

5. On élimine l'inconnue z dans la ligne 1 et la ligne 2.

6. N'oubliez pas de donner l'ensemble des solutions en conclusion.

EXERCICE 3. Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Méthode. Dans le cas où le coefficient devant l'inconnue que l'on souhaite utiliser comme pivot est nul, on échange la ligne avec une des lignes suivantes.

EXERCICE 4. Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

EXERCICE 5. Résoudre les systèmes suivants à l'aide du pivot de Gauss

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ -x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

V Inverser une matrice avec un système linéaire et inversement

Comme nous l'avons vu, il est possible d'inverser une matrice en résolvant un système linéaire grâce à la méthode du pivot de Gauss.

Exemple. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le système linéaire associé à la matrice A pour un second membre quelconque est :

On résout ensuite le système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss.

On n'oublie pas de conclure.

EXERCICE 6. Les matrices suivantes sont elles inversibles ? Si oui, en déterminer l'inverse.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 11. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Avoir compris le lien entre matrices et systèmes linéaires.
* Savoir résoudre un système triangulaire.
* Savoir résoudre un système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.
* Savoir inverser une matrice par la résolution d'un système.
* Savoir dire si une matrice triangulaire est inversible.