Chapitre 8 : Limite d'une fonction réelle

On considérera dans tout ce chapitre une fonction f définie sur un intervalle I et x_0 un point de I ou une extrémité de I.

I Convergence

I.1 Limites

Définition 1 (Suite convergente)**.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ **converge** vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 2 (Limite en $\pm\infty$)**.** Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les points $f(x)$ pour x assez grand.

On dit que f admet pour limite ℓ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les points $f(x)$ pour x assez négatif.

Définition 3 (Limite en un point)**.** Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les points $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

On dit alors que f **admet une limite finie** en x_0.

Proposition 4 (Unicité de la limite)**.** Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie ℓ en x_0 (respectivement $\pm\infty$) et f admet une limite finie ℓ' en x_0 (respectivement $\pm\infty$), alors $\ell = \ell'$.

On note alors :

Définition 5 (Limite à gauche en un point)**.** Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite à gauche ℓ en x_0 si :

On note alors :

Définition 6 (Limite à droite en un point)**.** Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite à droite ℓ en x_0 si :

On note alors :

I.2 Premiers exemples

Exemple. La fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exemple. La fonction u définie par $u(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction v définie par $v(x) = x^2 - 1$ pour tout $x \leqslant 2$ et $v(x) = -x^3$ pour tout $x > 2$.

II Divergence

II.1 Fonction admettant une limite ∞

Définition 7 (Limite ∞ en l'∞)**.**

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

On note :

EXERCICE 1. Reprendre les notations du chapitre 6 sur les suites et celles de la définition 2 pour définir en utilisant les quantificateurs les cas suivants :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Définition 8 (Limite infinie en un point)**.**

* On dit que f admet pour limite $+\infty$ en x_0 si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut si x est suffisamment proche de x_0.

  On note alors :

* On dit que f admet pour limite $-\infty$ en x_0 si $f(x)$ est aussi négatif que l'on veut si x est suffisamment proche de x_0.

  On note alors :

EXERCICE 2. Reprendre les notations des définitions 5 et 6 pour définir en utilisant les quantificateurs les cas suivants :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

Proposition 9 (Unicité de la limite)**.** Si f admet une limite (finie ou infinie) en un point ou en $\pm\infty$, alors cette limite est unique.

II.2 Exemples classiques

Ces exemples sont particulièrement importants car c'est à partir d'eux que vous calculerez les limites de fonctions plus complexes.

Proposition 10. Pour tout réel $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0\,;\quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty\,;\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^\alpha}=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0.$$

Exemple. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\ldots\ldots\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\ldots\ldots\,;\ \lim\limits_{x\to 0^+}x^{-3}=\ldots\ldots$

Proposition 11.

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty\,;\quad \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\,;\quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\ldots\ldots$

III Opération sur les limites

III.1 Opérations sur les réels

Les opérations sont les mêmes que pour les limites de suites. Les tableaux ci dessous sont donnés pour une fonction f définie au début du chapitre et une fonction g définie sur un intervalle J tel que $x_0\in J$ et un réel $\lambda\in\mathbb{R}$. Ces limites sont données en x_0, mais ces tableaux restent vrais pour une limite en $+\infty$, $-\infty$ ou une limite à gauche ou à droite.

Multiplication par un réel : $\lim\limits_{x\to x_0}\lambda f(x)$

λ / $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lambda>0$	$\lambda<0$
$\ell\in\mathbb{R}$		
$+\infty$		
$-\infty$		

Somme : $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell\in\mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

Produit : $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\times g(x))$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell\in\mathbb{R}^*$			
0			
$\pm\infty$			

Quotient : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell\in\mathbb{R}^*$			
0			
$\pm\infty$			

$\pm\infty^*$ signifie que l'on détermine le signe en appliquant la règle des signes.

remarque. Comme dans le cas des suites, il est possible d'établir un tableau pour la limite de $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ à partir du tableau de multiplication par un réel $\lambda = -1$ et du tableau de la somme de deux fonctions.

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} 0.000001 \times x^{0.000001} = ...$; $\lim\limits_{x \to 0^+} -4\ln(x) = ...$; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2}{x} = ...$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \frac{1}{x} = ...$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = ...$; $\lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x - e^x = ...$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (3 + \frac{1}{x})e^{-x} = ...$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = ...$

EXERCICE 3. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 + x + 2$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times (-x^2)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} (-2x+1)e^x(3+\ln x)$

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{x}{x+3}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x(x-1)}{x^3-2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (3+\frac{1}{x})(x^3+2)\ln(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (2+e^{-x})\frac{1}{x^2}(5-\frac{1}{\sqrt{x}})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1-e^x}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{x^2+2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2-\frac{1}{x^4}}$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 + \frac{1}{x})(1 - e^x)$

III.2 Opération sur les fonctions

Proposition 12. Si f admet une limite y_0 en x_0, posons $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et que g est une fonction qui admet une limite ℓ en y_0, posons $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \ell$, alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en x_0 et :

remarque. Cette propriété reste vraie si on prend $\pm\infty$ à la place de x_0, y_0 ou ℓ, ou si l'on considère des limites à gauche ou à droite.

Exemple. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x+1} = ...$; $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = ...$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x^2 + 1) = ...$

EXERCICE 4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$

Proposition 13. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle qui converge vers une limite x_0.

Si la fonction f tend vers la limite ℓ en x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors, la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ admet une limite en $+\infty$ et :

remarque. Cette propriété reste vraie si on prend $\pm\infty$ à la place de x_0 ou ℓ.

ATTENTION. Si on prend $\pm\infty$ à la place de ℓ dans la propriété précédente, la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ est divergente et tend vers $\pm\infty$.

EXERCICE 5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1 + n)$ $\quad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\quad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n^2+1}$

IV Formes indéterminées

IV.1 Résumé des cas précédents

Définition 14. Lorsque l'on cherche à trouver une limite, il arrive que l'on tombe sur des cas où la réponse n'est pas systématique et se doit d'être étudié au cas par cas.

Il s'agit de ce que l'on appelle une **forme indéterminée**.

Il existe 4 formes indéterminées différentes :

$$\infty - \infty\,; \quad 0 \times \infty\,; \quad \frac{0}{0} \text{ et } \frac{\infty}{\infty}$$

Dans la suite de cette partie, nous allons voir une façon de lever ces indéterminations dans certains cas particuliers, vous en verrez d'autres l'an prochain.

IV.2 Croissances comparées

Proposition 15 (Croissance comparée en $+\infty$)**.** Soit des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Au voisinage de $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la fonction puissance et le logarithme. C'est à dire :

Au voisinage de $+\infty$, la fonction puissance l'emporte sur le logarithme. C'est à dire :

Exemple. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \ldots\ldots.$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{34}}{e^x} = \ldots\ldots.$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x \times e^{-x} = \ldots\ldots.$

Proposition 16 (Croissance comparée en 0)**.** Soit des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Au voisinage de 0, la fonction puissance l'emporte sur le logarithme. C'est à dire :

Proposition 17 (Croissance comparée en $-\infty$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

Au voisinage de $-\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la fonction puissance. C'est à dire :

Exemple. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = \ldots\ldots.$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = \ldots\ldots.$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^x = \ldots\ldots.$

Méthode. Souvent, dans le cas d'une forme indéterminée au voisinage de $\pm\infty$ ou 0, factoriser par le terme prépondérant permet de lever l'indétermination.

Exemple. Définissons la fonction g par $g(x) = -4x^2 - e^x + \ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ldots\ldots..$

EXERCICE 6. Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+x+2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x\ln x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+2}{x^3+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x-2^x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^3+2}$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-x+2}{x^3+2}$

Proposition 18 (Limites usuelles)**.** Soit $\alpha > 0$.

Méthode. Pour utiliser ces limites usuelles ou la croissance comparée, on peut parfois poser un changement de variable.

EXERCICE 7. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

Méthode. Dans le cas où on a une fraction de polynômes qui nous donne une forme indéterminée quand x tend vers x_0, on peut essayer de factoriser par $x-x_0$.

EXERCICE 8. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$ $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

IV.3 La cinquième forme indéterminée

Méthode. Pour étudier les fonctions du type $f(x)^{g(x)}$, il faut écrire avec l'exponentiel et ensuite utiliser les règles sur les opérations sur l'exposant.

Exemple. $\lim\limits_{x\to0}(3+x)^{2+x} =$ .... ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x =$........................... ; $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x =$...........................

remarque. Il existe d'autres formes qui ne peuvent être résolues de façon immédiate par théorème d'opération, ce sont les formes :

$$0^0\ ;\quad \infty^0\ ;\quad 0^\infty \quad \text{et} \quad 1^\infty$$

Pour lever ces nouvelles formes indéterminées, on peut souvent réécrire les fonctions grâce à l'exponentielle et utiliser les techniques vues précédemment.

EXERCICE 9. Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0^+} x^x$ $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^x$

V Relations d'ordre

Dans cette partie, nous nous contenterons d'énoncer les résultats pour des limites en x_0, cependant, tout ce qui suit reste vrai pour des limites en $\pm\infty$.

Proposition 19 (Passage à la limite dans les inégalités)**.**

Soient f et g deux fonctions définies sur I, **ADMETTANT DES LIMITES** en x_0 et telles que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \text{ (ou bien } f(x) < g(x))$$

Alors :

ATTENTION. Les inégalités strictes deviennent larges

Exemple. Pour $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = -e^{-x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

on a :

Proposition 20 (Comparaison avec une fonction qui tend vers $\pm\infty$)**.**

Soient f et g deux fonctions définies sur I, telles que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Alors :

* Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
* Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple. Cherchons la limite en $+\infty$ de la fonction g définie par $g(x) = \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 21 (Théorème d'encadrement)**.**

Soient f, g et h trois fonctions définies sur I telles que :

* $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$,
* *f et h admettent une limite finie ℓ en x_0.*

Alors la fonction g admet également une limite finie en x_0, et sa limite est la limite commune ℓ.

EXERCICE 10. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}$.

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Avoir compris la définition de la limite en un point, en $\pm\infty$, à gauche et à droite.
* Connaître les limites classiques et les croissances comparées et pouvoir les utiliser pour trouver la limite d'une fonction.
* Savoir effectuer des opérations sur les limites et les utiliser pour calculer la limite d'une fonction.
* Savoir calculer la limite d'une composition de fonction.
* Savoir reconnaître une forme indéterminée et comment la lever.
* Savoir passer à la limite dans une inégalité quand la limite existe.
* Utiliser le théorème d'encadrement pour trouver la limite d'une fonction.