Chapitre 9 : Dénombrement

0 Tirages avec remise

Exemple. Considérons une pièce non biaisée, on effectue 4 lancers de pièce. Combien y a-t-il de séries de lancers possibles ?

Proposition 1 (Rappel)**.** Lorsque l'on effectue un tirage **successif et avec remise** de p éléments parmi n éléments, alors il y a en tout tirages possibles

I Permutations

Définition 2 (Permutation)**.**

- [CNRTL] Fait, pour un élément, de prendre la place d'un autre qui vient occuper la sienne en retour ; fait, pour deux éléments, de changer réciproquement de place.
- [Maths] Une permutation d'objets **distincts** rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de rangement de ces objets. (Il s'agit d'une bijection d'un ensemble sur lui-même)

Exemple.

Définition 3 (Rappel)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Son factorielle est défini par :

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Pour $n = 0$, on définit $0\,! = 1$.

Proposition 4.

Il y a $n\,!$ permutations distinctes des éléments d'un ensemble à n éléments.

Par abus de langage, on dira qu'il y a $n\,!$ permutations distinctes d'un ensemble à n éléments.

Exemple. On possède 6 livres **différents** que l'on souhaite ranger sur une étagère. Combien y a-t-il de façons de les ranger sur une étagère ?

On cherche le nombre de permutation possible de six livres. Il y a donc .... possibilités.

EXERCICE 1.

1. On possède 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique et 3 livres d'informatique. Chacun de ces livres est différent des autres. Combien y a-t-il de façons de ranger ces livres de sorte qu'ils soient groupés par matières.
2. Un groupe de 5 personnes dont Adèle et Yanis trouve un banc de 5 places.
   a) Combien le groupe a-t-il de façons de s'asseoir ?
   b) Combien y a-t-il de façons de s'asseoir pour que Adèle et Yanis soient assis l'un à côté de l'autre ?
   c) Quelle est la probabilité que Adèle et Yanis soient assis l'un à côté de l'autre ?
3. On considère une urne constituée de 4 boules numérotées, on effectue n tirages avec remise. Combien y a-t-il de configurations possibles ?

II Combinaisons

II.1 Coefficients binomiaux

Définition 5 (Combinaison)**.**

* [Larousse] Action de réunir des éléments divers pour former un tout, un ensemble.
* [Maths] Partie d'un ensemble.

Exemple.

ATTENTION. Lorsque l'on considère une partie d'un ensemble, l'ordre des éléments n'est pas pris en compte.

EXERCICE 2.

1. Considérons l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Combien y a-t-il de parties de E à deux éléments ?
2. 4 personnes veulent jouer au tennis de table, combien de matchs peuvent être faits sachant qu'elles joueront à un contre un ?
3. Une urne contient quatre boules de couleur : une rouge, une noire, une verte et une bleue. On tire au hasard et simultanément deux boules dans une urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Définition 6 (Coefficient binomial)**.**

Soient k et n deux entiers naturels. On appelle coefficient binomial, et on note $\binom{n}{k}$, le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

remarque. $\binom{n}{k}$ se lit

$\binom{n}{k}$ est le nombre de façons différentes de choisir k objets parmi n objets, sans considérer l'ordre dans lequel on a choisi ces objets.

Exemple.

* $\binom{4}{2} =$
* $\binom{6}{1} =$
* $\binom{2}{5}$

II.2 Calcul des coefficients binomiaux

EXERCICE 3. On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

1. Combien E a-t-il de parties à 3 éléments ? Écrire la réponse avec un coefficient binomial.
2. Combien E a-t-il de parties à 3 éléments contenant 1 ? Écrire la réponse avec un coefficient binomial.
3. Combien E a-t-il de parties à 3 éléments ne contenant pas 1 ? Écrire la réponse avec un coefficient binomial.
4. En déduire : $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

Proposition 7 (Triangle de Pascal)**.** Soient k, $n \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$, alors :

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

EXERCICE 4. Démontrer cette formule en utilisant l'exercice précédant.

Proposition 8 (Formule factorielle)**.** Soient k et $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$.

$$\binom{n}{k} =$$

Dans le cas où $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple. Calculer

* $\binom{4}{2} =$
* $\binom{8}{3} =$
* $\binom{32}{30} =$

EXERCICE 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer avec la formule $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$.

EXERCICE 6.
Calculer le nombre de mains de 5 cartes possibles d'un jeu de 32 cartes.

Proposition 9. Soient k, $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$.

II.3 Binôme de Newton

Proposition 10 (Formule du binôme de Newton)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et a, $b \in \mathbb{R}$.

Exemple.
- $(a+b)^2 =$...
- $(1+x)^4 =$...
- $(a+b)^5 =$...

EXERCICE 7. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

II.4 Calcul de probabilités

EXERCICE 8. Considérons une pièce non biaisée, qui donne donc pile avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on lance n fois de manière indépendante la pièce non truquée.

1. Commençons par $n = 3$.

- $*$ Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ? (Comme "Pile Face Pile", "Face Face Pile", "Pile Pile Pile", etc)
- $*$ Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'un seul pile.
- $*$ En déduire la probabilité de l'événement A : "obtenir exactement une fois pile".
- $*$ Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'exactement trois piles.
- $*$ En déduire la probabilité de l'événement B : "obtenir exactement trois fois pile".

2. Reprendre la question précédente dans le cas n quelconque.

EXERCICE 9. Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On pioche simultanément 3 jetons dans cette urne. On note les 3 numéros obtenus.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Soit C l'événement : "les trois numéros piochés sont impairs". Calculer $\mathbb{P}(C)$.
3. Soit D l'événement : "7 fait parti des jetons piochés". Calculer $\mathbb{P}(D)$.
4. Quelle est la probabilité qu'exactement deux numéros soient pairs ?

III Formule des probabilités totales

III.1 Familles d'événements

Définition 11 (Incompatibles)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et une famille d'événements A_1, A_2, ..., A_n de n événements.

Ces événements sont deux à deux incompatibles si pour toute paire d'événements A_i et A_j,

Proposition 12. Soit $n \in \mathbb{N}$ et une famille d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de n événements **deux à deux incompatibles**.

Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

Ce qui s'écrit également

Définition 13 (Indépendance mutuelle)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n, n événements.

Ces événements sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de $\{1; 2; \ldots; n\}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple.

remarque. Lorsque les tirages sont effectués avec remise les événements considérés à des tirages différents sont mutuellement indépendants.

EXERCICE 10. Considérons cette fois une pièce biaisée, qui donne pile avec une probabilité p, p étant un réel strictement compris entre 0 et 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on lance n fois de manière indépendante la pièce truquée.

1. Commençons par $n = 3$.
   * Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ? (Comme "Pile Face Pile", "Face Face Pile", "Pile Pile Pile", etc)
   * Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'un seul pile.
   * En déduire la probabilité de l'événement A : "obtenir exactement une fois pile".
   * Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'exactement trois piles.
   * En déduire la probabilité de l'événement B : "obtenir exactement trois fois pile".
2. Reprendre la question précédente dans le cas n quelconque.

Définition 14 (Système complet d'événements)**.** Soient Ω un univers fini, $n \in \mathbb{N}$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ une famille de n événements.

On dit que cette famille est un **système complet d'événements** de Ω si elle vérifie :

*

*

remarque. Pour tout événement A, $(A,\bar{A})$ est un système complet d'événements de Ω.

Exemple.

III.2 Aller plus loin que les arbres pondérés

EXERCICE 11 (Rappel de terminale)**.**
Dans un établissement scolaire, 30% des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40% sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50% sont des garçons.

On interroge un élève au hasard et on considère les événements suivants :

* S : "l'élève est inscrit dans un club de sport"
* F : "l'élève est une fille"

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
2. Calculer $\mathbb{P}(F)$, la probabilité que l'élève qu'on a interrogé au hasard soit une fille.

Théorème 15 (Formule des probabilités totales)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Alors, pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

$$=$$

Proposition 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Alors, pour tout événement B :

Exemple.

EXERCICE 12. Démontrer cette proposition en utilisant la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

EXERCICE 13. Reprendre l'exercice 11 et calculer directement la probabilité $\mathbb{P}(F)$ avec la formule des probabilités totales.

EXERCICE 14. On dispose de 10 urnes numérotées : U_1, U_2, $\ldots$, U_{10}. Pour tout entier i entre 1 et 10, l'urne U_i contient 10 boules : i boules blanches et $10 - i$ boules noires.

On choisit au hasard une de ces 10 urnes et on pioche une boule dedans.

On note A_i l'événement : "l'urne choisie est l'urne U_i".

Calculer la probabilité de l'événement B : "la boule piochée est blanche".

III.3 Application à la formule de Bayes

EXERCICE 15.
Pour venir en cours le matin, un élève a le choix entre le train, les rollers et le vélo. La probabilité de choisir le train est de $\frac{1}{3}$ et la probabilité de choisir les rollers est de $\frac{1}{4}$.

L'élève n'arrive jamais en retard s'il choisit le vélo. S'il choisit le train, il arrive en retard avec probabilité de $\frac{1}{10}$ et s'il choisit les rollers, il arrive en retard avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.

On note H l'événement : "l'élève arrive à l'heure" et T (respectivement R et V) l'événement : "l'élève est venu en train" (respectivement en rollers/vélo).

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse le vélo ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il venu en train ?
3. L'élève arrive à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il soit venu à vélo ?

Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Savoir calculer les coefficients binomiaux à l'aide de la formule factorielle ou à l'aide du triangle de Pascal (pour de petites valeurs de n).
* Savoir utiliser la formule du binôme de Newton.
* Savoir utiliser un factoriel ou un coefficient binomial pour calculer le cardinal d'un ensemble ou une probabilité.
* Savoir reconnaître un système complet d'événement.
* Savoir utiliser la formule des probabilités totales.