# Chapitre 9 : Dénombrement

## 0 Tirages avec remise

*Exemple.* Considérons une pièce non biaisée, on effectue 4 lancers de pièce. Combien y a-t-il de séries de lancers possibles ?

Pour le premier lancer, il y a 2 résultats possibles : pile ou face.
Pour chacun de ces résultats, il y a, au deuxième lancer, 2 résultats possibles : pile ou face.
Pour chacun de ces résultats, il y a, au troisième lancer, 2 résultats possibles : pile ou face.
Pour chacun de ces résultats, il y a, au quatrième lancer, 2 résultats possibles : pile ou face.
Il y a donc en tout $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ résultats possibles.

**Proposition 1** (Rappel)**.** Lorsque l'on effectue un tirage **successif et avec remise** de $p$ éléments parmi $n$ éléments, alors il y a en tout $n^p$ tirages possibles

## I Permutations

**Définition 2** (Permutation)**.**

* [CNRTL] Fait, pour un élément, de prendre la place d'un autre qui vient occuper la sienne en retour ; fait, pour deux éléments, de changer réciproquement de place.
* [Maths] Une permutation d'objets **distincts** rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de rangement de ces objets. (Il s'agit d'une bijection d'un ensemble sur lui-même)

*Exemple.* Permutations de $ABCDE$ :
$BACDE$ $DEBAC$ $CDAEB$ $EBDAC$

MAIS $AABDE$, $ABCBE$, $ABDCEC$ ne sont pas des permutations de $ABCDE$.

**Définition 3** (Rappel)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Son factorielle est défini par :

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Pour $n = 0$, on définit $0\,! = 1$.

**Proposition 4.**

Il y a $n\,!$ permutations distinctes des éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

Par abus de langage, on dira qu'il y a $n\,!$ permutations distinctes d'un ensemble à $n$ éléments.

Pour $ABCDE$, il y a 5 places possibles pour $A$.
Il y a alors 4 places possibles pour $B$ (une des places étant occupée par $A$).
Il y a alors 3 places possibles pour $C$.
Il y a alors 2 places possibles pour $D$.
Il ne reste alors que 1 places possibles pour $E$.

Finalement, il y a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,!$ permutations des éléments $ABCDE$.

*Exemple.* On possède 6 livres **différents** que l'on souhaite ranger sur une étagère. Combien y a-t-il de façons de les ranger sur une étagère ?

On cherche le nombre de permutation possible de six livres. Il y a donc $6\,!$ possibilités.

**EXERCICE 1.**

1. On possède 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique et 3 livres d'informatique. Chacun de ces livres est différent des autres. Combien y a-t-il de façons de ranger ces livres de sorte qu'ils soient groupés par matières.
2. Un groupe de 5 personnes dont Adèle et Yanis trouve un banc de 5 places.
   a) Combien le groupe a-t-il de façons de s'asseoir ?
   b) Combien y a-t-il de façons de s'asseoir pour que Adèle et Yanis soient assis l'un à côté de l'autre ?
   c) Quelle est la probabilité que Adèle et Yanis soient assis l'un à côté de l'autre ?
3. On considère une urne constituée de 4 boules numérotées, on effectue $n$ tirages avec remise. Combien y a-t-il de configurations possibles ?

# II Combinaisons

## II.1 Coefficients binomiaux

**Définition 5** (Combinaison)**.**

* [Larousse] Action de réunir des éléments divers pour former un tout, un ensemble.
* [Maths] Partie d'un ensemble.

*Exemple.* Une main de 5 cartes d'un jeu de 54 cartes est une combinaison de 5 cartes d'un jeu de 54 cartes.
Par exemple, $\{\text{roi}; 2; 7; 10; \text{as}\} = \{2; 7; 10; \text{roi}; \text{as}\}$ est une main de 5 cartes.

*ATTENTION.* Lorsque l'on considère une partie d'un ensemble, l'ordre des éléments n'est pas pris en compte.

**EXERCICE 2.**

1. Considérons l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Combien y a-t-il de parties de $E$ à deux éléments ?
2. 4 personnes veulent jouer au tennis de table, combien de matchs peuvent être faits sachant qu'elles joueront à un contre un ?
3. Une urne contient quatre boules de couleur : une rouge, une noire, une verte et une bleue. On tire au hasard et simultanément deux boules dans une urne. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**Définition 6** (Coefficient binomial)**.**
Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels. On appelle coefficient binomial, et on note $\binom{n}{k}$, le nombre de parties à $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

*remarque.* $\binom{n}{k}$ se lit "$k$ parmi $n$"

$\binom{n}{k}$ est le nombre de façons différentes de choisir $k$ objets parmi $n$ objets, sans considérer l'ordre dans lequel on a choisi ces objets.

*Exemple.*

* $\binom{4}{2}$ =6 d'après l'exercice 2
* $\binom{6}{1}$ =6, plus généralement $\binom{n}{1} = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
* $\binom{2}{5}$ n'a aucun sens, on le posera égal à 0 par la suite

## II.2 Calcul des coefficients binomiaux

**EXERCICE 3.** On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

1. Combien $E$ a-t-il de parties à 3 éléments ? Écrire la réponse avec un coefficient binomial.
2. Combien $E$ a-t-il de parties à 3 éléments contenant 1 ? Écrire la réponse avec un coefficient binomial.
3. Combien $E$ a-t-il de parties à 3 éléments ne contenant pas 1 ? Écrire la réponse avec un coefficient binomial.
4. En déduire : $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

**Proposition 7** (Triangle de Pascal)**.** Soient $k$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$, alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

**EXERCICE 4.** Démontrer cette formule en utilisant l'exercice précédant.

**Proposition 8** (Formule factorielle)**.** Soient $k$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$$

Dans le cas où $k > n$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

*Exemple.* Calculer

* $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2}{2\times2} = 3 \times 2 = 6$
* $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{3\times2\times5\times4\times3\times2} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 8 \times 7 = 56$
* $\binom{32}{30} = \frac{32!}{30!2!} = \frac{32\times31}{2} = 16 \times 31 = 496$

**EXERCICE 5.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer avec la formule $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n}$.

Preuve :

— Dénombrement

Comptons les parties à $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

On choisit le $1-$er élément, il y a $n$ choix possibles.
On choisit le $2-$ième élément, il y a $n-1$ choix possibles (parmi ceux qui sont différents du $1-$er élément).
On choisit le $3^e$ élément, il y a $n-2$ choix possibles (parmi ceux qui sont différents du $1-$er et du $2-$ième élément).

$$\vdots$$

On choisit le $k^e$ élément, il y a $n-k+1$ choix possibles (parmi ceux qui sont différents du $1-$er, du $2-$ième, ..., du $(k-1)-$ième élément).

On trouve donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-k+1) = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}$ parties à $k$ éléments.

CEPENDANT on a compté chaque partie plusieurs fois. On a compté chaque parties autant de fois que l'on peut permuter les éléments de ces parties. On les a donc comptées $k\,!$ fois.

Finalement, il y a $\frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$ parties à $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

— Triangle de Pascal

Montrons par récurrence sur $n$ que $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$

**Initialisation :** Pour $n=0$, il n'y a que $k=0$ à considérer.
$\binom{0}{0}=1$ et $\frac{0!}{0!(0-0)!}=\frac{1}{1\times 1}=1$
La propriété est donc vérifiée pour $n=0$

**Hérédité :** Supposons que, pour un $n\in\mathbb{N}$, $\forall k\leqslant n$, $\binom{n}{k}=\frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$

Soit $k\leqslant n$, d'après la formule du triangle de Pascal

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}$$

Par hypothèse de récurrence pour $k$ et $k-1$,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{n\,!}{(k-1)\,!(n-(k-1))\,!}+\frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}\\
&= \frac{n\,!}{(k-1)\,!(n-k+1)\,!}+\frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}\\
&= \frac{n\,!\times k}{k\,!(n-k+1)\,!}+\frac{n\,!\times(n-k+1)}{k\,!(n-k+1)\,!}\\
&= \frac{n\,!}{k\,!(n-k+1)\,!}(k+n-k+1)\\
&= \frac{(n+1)\,!}{k\,!(n-k+1)\,!}\\
&= \frac{(n+1)\,!}{k\,!(n+1-k)\,!}
\end{aligned}$$

Il reste à regarder le cas $k=n+1$ alors $\binom{n+1}{n+1}=1$ et $\frac{(n+1)\,!}{(n+1)\,!(n+1-(n+1))\,!}=\frac{(n+1)\,!}{(n+1)\,!0!}=\frac{(n+1)\,!}{(n+1)\,!}=1$

On a finalement $\forall k\leqslant n+1$, $\binom{n+1}{k}=\frac{(n+1)\,!}{k\,!(n+1-k)\,!}$.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$\forall k\leqslant n$, $\binom{n}{k}=\frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$

**EXERCICE 6.**
Calculer le nombre de mains de 5 cartes possibles d'un jeu de 32 cartes.

**Proposition 9.** Soient $k$, $n\in\mathbb{N}$ tels que $k\leqslant n$.

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

## II.3 Binôme de Newton

**Proposition 10** (Formule du binôme de Newton)**.** Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a$, $b\in\mathbb{R}$.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

*Exemple.* $*$ $(a+b)^2=\binom{2}{0}a^0b^{2-0}+\binom{2}{1}a^1b^{2-1}+\binom{2}{2}a^2b^{2-2}=1\times 1\times b^2+2ab+1\times a^2\times 1$

$*$ $(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

$*$ $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

**EXERCICE 7.** Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\text{ et }\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

### II.4 Calcul de probabilités

**EXERCICE 8.** Considérons une pièce non biaisée, qui donne donc pile avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on lance $n$ fois de manière indépendante la pièce non truquée.

1. Commençons par $n = 3$.
   * Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ? (Comme "Pile Face Pile", "Face Face Pile", "Pile Pile Pile", etc)
   * Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'un seul pile.
   * En déduire la probabilité de l'événement $A$ : "obtenir exactement une fois pile".
   * Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'exactement trois piles.
   * En déduire la probabilité de l'événement $B$ : "obtenir exactement trois fois pile".
2. Reprendre la question précédente dans le cas $n$ quelconque.

**EXERCICE 9.** Une urne contient 7 jetons numérotés de 1 à 7. On pioche simultanément 3 jetons dans cette urne. On note les 3 numéros obtenus.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Soit $C$ l'événement : "les trois numéros piochés sont impairs". Calculer $\mathbb{P}(C)$.
3. Soit $D$ l'événement : "7 fait parti des jetons piochés". Calculer $\mathbb{P}(D)$.
4. Quelle est la probabilité qu'exactement deux numéros soient pairs ?

# III Formule des probabilités totales

## III.1 Familles d'événements

**Définition 11** (Incompatibles)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et une famille d'événements $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ de $n$ événements.

Ces événements sont deux à deux incompatibles si pour toute paire d'événements $A_i$ et $A_j$,

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

**Proposition 12.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et une famille d'événements $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ de $n$ événements **deux à deux incompatibles**.

Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

Ce qui s'écrit également

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

**Définition 13** (Indépendance mutuelle)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, $n$ événements.

Ces événements sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide $I$ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

*Exemple.* Pour 4 événements, $A$, $B$, $C$ et $D$ mutuellement indépendants si et seulement si

$I = \{1; 2\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ $I = \{1; 3\}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ $I = \{1; 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$
$I = \{2; 3\}$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ $I = \{2; 4\}$, $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)$ $I = \{3; 4\}$, $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$
$I = \{1; 2; 3\}$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ $I = \{1; 2; 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)$
$I = \{1; 3; 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap C \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$ $I = \{2; 3; 4\}$, $\mathbb{P}(B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$
$I = \{1; 2; 3; 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$

*remarque.* Lorsque les tirages sont effectués avec remise les événements considérés à des tirages différents sont mutuellement indépendants.

**EXERCICE 10.** Considérons cette fois une pièce biaisée, qui donne pile avec une probabilité $p$, $p$ étant un réel strictement compris entre 0 et 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on lance $n$ fois de manière indépendante la pièce truquée.

1. Commençons par $n = 3$.
   * Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ? (Comme "Pile Face Pile", "Face Face Pile", "Pile Pile Pile", etc)
   * Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'un seul pile.
   * En déduire la probabilité de l'événement $A$ : "obtenir exactement une fois pile".
   * Écrire avec un coefficient binomial le nombre d'événements élémentaires constitués d'exactement trois piles.
   * En déduire la probabilité de l'événement $B$ : "obtenir exactement trois fois pile".
2. Reprendre la question précédente dans le cas $n$ quelconque.

**Définition 14** (Système complet d'événements)**.** Soient $\Omega$ un univers fini, $n \in \mathbb{N}$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ une famille de $n$ événements.

On dit que cette famille est un **système complet d'événements** de $\Omega$ si elle vérifie :

* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
* les événements sont deux à deux incompatibles.

*remarque.* Pour tout événement $A$, $(A,\bar{A})$ est un système complet d'événements de $\Omega$.

*Exemple.* Considérons un lancer d'un dé à 6 faces non pipé.

Posons $A_i$ l'événement : "On obtient $i$".

La famille $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$ forment un système complet d'événements.

Les événements "On obtient un chiffre pair", "On obtient 1", "On obtient 3 ou 5" forment un système complet d'événements.

## III.2 Aller plus loin que les arbres pondérés

**EXERCICE 11** (Rappel de terminale)**.**
Dans un établissement scolaire, 30% des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40% sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50% sont des garçons.

On interroge un élève au hasard et on considère les événements suivants :

* $S$ : "l'élève est inscrit dans un club de sport"
* $F$ : "l'élève est une fille"

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
2. Calculer $\mathbb{P}(F)$, la probabilité que l'élève qu'on a interrogé au hasard soit une fille.

**Théorème 15** (Formule des probabilités totales)**.**
*Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements de $\Omega$.*

*Alors, pour tout événement $B$ :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)\end{aligned}$$

**Proposition 16.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements de $\Omega$.

Alors, pour tout événement $B$ :

$$\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

**EXERCICE 12.** Démontrer cette proposition en utilisant la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

**EXERCICE 13.** Reprendre l'exercice 11 et calculer directement la probabilité $\mathbb{P}(F)$ avec la formule des probabilités totales.

**EXERCICE 14.** On dispose de 10 urnes numérotées : $U_1$, $U_2$, $\dots$, $U_{10}$. Pour tout entier $i$ entre 1 et 10, l'urne $U_i$ contient 10 boules : $i$ boules blanches et $10 - i$ boules noires.

On choisit au hasard une de ces 10 urnes et on pioche une boule dedans.

On note $A_i$ l'événement : "l'urne choisie est l'urne $U_i$".

Calculer la probabilité de l'événement $B$ : "la boule piochée est blanche".

## III.3 Application à la formule de Bayes

**EXERCICE 15.**
Pour venir en cours le matin, un élève a le choix entre le train, les rollers et le vélo. La probabilité de choisir le train est de $\frac{1}{3}$ et la probabilité de choisir les rollers est de $\frac{1}{4}$.

L'élève n'arrive jamais en retard s'il choisit le vélo. S'il choisit le train, il arrive en retard avec probabilité de $\frac{1}{10}$ et s'il choisit les rollers, il arrive en retard avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.

On note $H$ l'événement : "l'élève arrive à l'heure" et $T$ (respectivement $R$ et $V$) l'événement : "l'élève est venu en train" (respectivement en rollers/vélo).

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse le vélo ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il venu en train ?
3. L'élève arrive à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il soit venu à vélo ?

# Bilan

À la fin du chapitre, vérifiez que vous avez atteint les objectifs suivants :

* Savoir calculer les coefficients binomiaux à l'aide de la formule factorielle ou à l'aide du triangle de Pascal (pour de petites valeurs de $n$).
* Savoir utiliser la formule du binôme de Newton.
* Savoir utiliser un factoriel ou un coefficient binomial pour calculer le cardinal d'un ensemble ou une probabilité.
* Savoir reconnaître un système complet d'événement.
* Savoir utiliser la formule des probabilités totales.