Relativité Restreinte

Karol K. Kozlowski

Le but de ce cours est de vous familiariser avec un des grands développements de la physique du début du XX siécle, la relativité restreinte. En effet, à la fin du XIX siècle se produit un phénomène assez peu fréquent dans l'histoire de la physique. Il semble que la physique est une science établie capable de décrire toutes les observations faites sur le monde. Si il y a des choses qui restent inexpliquées, on pense que c'est surtout en raison de la complexité des calculs intermédiaires. On ne remet en aucun cas en cause une défaillance des principes de la physique. En effet, la mécanique classique avec l'invention de la formulation Lagrangienne puis Hamiltonienne va de succès en succès. Elle est capable de prédire avec une énorme précision, en prenant en compte toutes les corrections liée à la présence d'autre planètes, le mouvement des planètes du système solaire. La seule chose qui resite est l'avance de 43" d'arc par an du périhélie de mercure (nous rappelons que cet effet ne peut être expliqué que dans le cadre de la relativité générale. Cela est du à la très forte intensité du champ gravitationnel à proximité du soleil). La physique statistique, en parallèle avec le développement de la théorie atomique de la matière, atteint les sommets de succès avec la reproduction des prédiction de la thermodynamique. Enfin, la théorie unifiée de l'électromagnétisme qui émerge en 1861 dans l'oeuvre synthétique de Maxwell semble être capable de décrire une panoplie de phénomènes, notamment à la vue du postulat de Maxwell qui identifia le champ électromagnétique à la lumière ! Les phénomènes d'interférences ne semblent plus avoir de mystères. Nous ne discuterons pas les mises en défaut des autres théories (approche par la mécanique classique de l'infiniment petit, théorie de l'absorption atomique, théorie des spectres atomiques) et pour entamer ce cours nous discuterons l'histoire de la lumière puisque c'est elle qui a finalement abouti à la mise en défaut du principe de relativité galiléenne. Dans le deuxième chapitre du cours nous présenterons les principes de la relativité restreinte. Nous utiliserons plusieurs expériences de pensées pour en déduire les diverses conclusions surprenantes qui découlent de la théorie de la relativité. Nous dériverons au troisième chapitre la forme de la transformée de Lorentz et nous l'utiliserons pour discuter diverses conséquences de la relativité. Notamment, nous présenterons la loi relativiste de l'additions des vitesses ainsi que l'effet Doppler relativiste. Le quatrième chapitre est consacré à une brève introduction à la dynamique relativiste. Enfin au dernier chapitre nous discuterons les conséquences de la conservation de la 4-impulsion sur quelques collisions simples.

1 Mise en défaut de la relativité de Galillè

Juste après le grand succès de la mécanique classique, divers chercheurs du XVII siècle ont tenté d'élucider le fonctionnement de la lumière. De quoi est elle constituée ? Comment et à quelle vitesse se propage-t-elle ? Newton la décrit en termes de particules. La théorie corpusculaire de la lumière lui permet de modéliser les lois de réflexion et réfraction au moyen de chocs entre billes. Huygens tente de modéliser la lumière comme un onde par analogie avec les phénomènes de propagation dans les milieu matériels. Ses successeurs dotés d'une conception mécanique de la propagation, ne peuvent que concevoir que l'onde lumineuse se propage sur un support matériel. Il le dénomme Éther. Diverses expériences sont désignées pour trancher entre ces deux descriptions, apparemment orthogonales. Finalement, après de nombreux arguments, la conception ondulatoire de la lumière prend le dessus au XIX siècle. Ce sont principalement les expériences d'interférences et de diffractions qui ont permis de trancher en sa faveur. De plus certaines lois, telles les lois de Snell–Descartes, ayant une interprétation en termes de particules ont pu être expliquées dans le langage de l'optique ondulatoire. Puisque la lumière est une onde elle se propage à une certaine vitesse dans l'Éther dont elle représente des oscillations. Les gens ont assez vite cherché à mesurer cette vitesse. L'hypothèse de la finitude de cette vitesse fut déjà discutée au XVII siècle. Vers 1607, Galilée avait tenté de la mesurer mais n'y est pas parvenu. Les premières estimations sont due à Römer qui détermine une valeur de c grâce à des observations astronomiques. Römer s'intéresse au satellite Io de Jupiter. Celui ci-est en orbite basse autour de Jupiter, orbite qui se trouve sur le plan de l'écliptique terrestre. Römer exploite le fait que les périodes d'immersions (occultation) du satellite Io de Jupter diffèrent selon que la mesure se fait en été ou en hivers. Dans un cas, la Terre s'approche de Io et donc la lumière a une distance plus courte à parcourir une fois que Io deviens visible. Dans l'autre cas, La Terre s'est éloignée de Io pendant qu'il était invisible, la lumière aura donc une distance plus grande à parcourir avant d'atteindre la Terre. Römer trouve que la lumière se propage à $c = 212000\mathrm{km.s}^{-1}$.

exercice 1.1 *Refaire les calculs de Römer. On donne la période de rotation de Io autour de Jupiter* $T = 42,5\mathrm{h}$. *On rappelle aussi que le satellite reste occulté pendant* 2h *et que le retard sur occultation moyenne mesuré est de* 10s *sur chaque occultation.*

La première mesure de c à partir d'une expérience terrestre est effectuée par Hippolyte Fizeau en 1849. Il place une lame semi-réfléchissante devant une roue dotée de 720 dents et 720 échancrures. Un miroir de trouve à une distance d de la roue. Il fait tourner la roue et on envoie de la lumière dessus (au moyen de la lame). Celle-ci passe si il y a un trou dans la roue et est absorbée sinon. Fizeau mesure que si la roue tourne à 12,6 tours par minutes, alors la lumière parvient à passer dans un trou mais est absorbée par la dent suivante. Il en déduit que $c = 3,13\,10^8\mathrm{m.s}^{-1}$.

exercice 1.2 *Sachant que* $d = 8633\mathrm{m}$, *reproduire le résultat de Fizeau.*

C'est finalement Maxwell, en observant que la lumière se propage à la même vitesse que les ondes électromagnétiques, qui donne l'interprétation de la lumière comme champ électromagnétique. Le champ électromagnétique vérifie l' équation de D'Alembert dans le vide

$$\partial_t^2 \vec{E} - c^2 \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) \vec{E} = 0\ . \tag{1.1}$$

Cette équation est une équation de propagation pour une onde. Elle était déjà bien connue dans la physique, typiquement dans la propagation de tous les phénomènes mécaniques comme le son. Toutes les ondes mécaniques se propagent dans un support. Le son se propage dans l'air et résulte d'une vibration collective de basse fréquence des particules de l'air, les oscillations du réseau cristallin résultent d'un déplacement coordonné des atomes par rapport à leur position fixe sur le réseau (*cf* modèle de la chaîne linéaire d'atomes). Il semble donc naturel que l'équation de D'Alembert pour l'onde électromagnétique est écrite dans le référentiel fixe du substrat de la propagation lumineuse que nous appellerons Éther. Clairement, dans tout autre référentiel galiléen (référentiel en translation rectiligne uniforme) cette équation change de forme. Elle n'est donc pas covariante ($\equiv$ invariante) sous les transformations de Galilée :

$$t' = t \qquad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t\ . \tag{1.2}$$

exercice 1.3 *Quelle est la forme de l'équation d'onde dans un autre référentiel galiléen ?*

SolutionC'est à priori une question intriquée, puisque le champ électromagnétique $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ peut (et c'est bien le cas) se transformer de manière linéaire (pour des raison que l'on de discutera pas ici) entre deux référentiels c'est-à-dire que $\left(\vec{E}',\vec{B}'\right)(\vec{r}',t') = F\left(\vec{E},\vec{B}\right)(\vec{r},t)$, où F est une matrice 6×6 et $(\vec{r},t)$, resp. $(\vec{r}',t')$, les coordonnées du point $\mathcal{M}$ de l'espace-temps tel qu'il est vu par un observateur propre au référentiel galiléen $\mathcal{R}$, resp. $\mathcal{R}'$.

Nous avons, en appliquant la transformée de Galilée entre les coordonnées $(\vec{r},t)$ et $(\vec{r}',t')$

$$\partial_t = \partial_{t'} - \vec{v}\nabla_{\vec{r}'} \quad , \quad \nabla_{\vec{r}} = \nabla_{\vec{r}'}\ . \tag{1.3}$$

D'où

$$\partial_t^2 = \partial_{t'}^2 - 2\vec{v}\cdot\nabla_{\vec{r}'}\partial_{t'} + (\vec{v}\cdots\nabla_{\vec{r}'})^2 \qquad \Delta_{\vec{r}} = \Delta\vec{r}' \ . \tag{1.4}$$

Il suffit alors d'injecteur les opérateurs différentiels en $(\vec{r}, t)$ en terme de ceux en $(\vec{r}', t')$ puis d'appliquer F aux équation d'ondes obtenues. □.

L'électromagnétisme n'est donc pas compatible avec une autre théorie bien établie à l'époque. En effet, la mécanique classique met en avant une certaine classe de référentiels privilégiés, les référentiels galiléens qui sont tous en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Il n'y a pas de mouvement absolu en mécanique newtonienne, puisqu'il n'est pas possible de mesurer par une quelconque expérience mené dans un référentiel galiléen la vitesse à laquelle se déplace ce référentiel. Certes, les trajectoires des particules changent d'un référentiel galiléen à un autre (typiquement la pluie a une trajectoire rectiligne dans le référentiel Terrestre, en bonne approximation galiléen, et une trajectoire parabolique dans le référentiel d'un train). Cependant si l'on effectue une même expérience dans deux référentiels (ce qui signifie que l'on impose à chaque fois les mêmes conditions initiales aux objets) galiléen différents, alors elles conduiront exactement aux mêmes conclusions. C'est le principe de relativité galiléenne. L'électromagnétisme semble briser cette invariance puisqu'il parle de vitesse absolue : la vitesse de la lumière. Bien évidemment, il est possible de résoudre ce problème en distinguant un référentiel particulier, celui de l'Éther où le champ vérifie une équation d'onde de D'Alembert. Dans les autres référentiels, les équations de Maxwell ne sont plus valides. En un sens, c'est réconfortant puisque nous obtenons ainsi un référentiel galiléen absolu. Bien évidement, cette observation donne envie de mettre en évidence ce référentiel. Typiquement, la connaissance de la vitesse de la lumière dans le référentiel de l'Ether $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ ainsi que la mesure de la vitesse de la lumière dans un quelconque référentiel galiléen peut permettre de déterminer la vitesse de translation de ce référentiel par rapport à l'Éther . Notamment se pose la question si le référentiel propre de l'Éther est le référentiel Terrestre, le référentiel héliocentrique, *etc*.

Une des premières expériences qui permet de donner des éléments de réponse a été effectuée par Bradley en 1725. Celui-ci tente de mesurer la parallaxe d'une étoile (petite orbite elliptique que semble décrire une étoile lors de la révolution terrestre en raison de sa distance finie par rapport à la Terre). Cependant, il mesure l'aberration à la place à la place, qui elle est déphasée de $\pi/2$ par rapport à la parallaxe est est due au déplacement de la Terre par rapport à la lumière incidente. Si l'on observe une lumière provenant d'une étoile et se propageant selon Oz. Alors que nous nous déplaçons à V selon Ox, nous devons incliner l'angle de notre lunette d'un angle ϕ par rapport à Oz pour observer la lumière de l'étoile. Cet angle vaut $\tan\phi = V/c$. Il mesure ϕ lorsque la Terre se trouve en été et en hivers. Il trouve un angle $\beta =$. L'aberration est en générale au moins 10 fois plus intense que la parallaxe. On peut re-interpréter l'experience de Bradley comme mesure de la vitesse à laquelle la Terre se déplace par rapport à l'Ether. On en conclu que l'Éther est immobile dans le référentiel héliocentrique, puisque la lumière se déplace bien à c dans ce référentiel et c'est la vitesse de la Terre autour du Soleil qui donne un bon accord avec les mesures.

Il semble donc possible de mesurer le vent de l'Ether à partir d'une expérience réalisée sur Terre. C'est ce qu'entreprennent Michelson et Morley au moyen de leur fameux interféromètre. Leur expérience est en fait basée sur une idée de Maxwell. On considère une source qui se déplace à vitesse constante dans l'Ether. A $t = 0$ elle émet un signal lumineux qui sera récupèré par deux points P_1 et P_2, immobiles dans le référentiel de la source. Ils sont équidistants de la source, à une distance ℓ. On mesure ensuite la différence de temps entre le moment de réception du signal lumineux par P_1 et P_2. La lumière arrive vers P_1 à la vitesse $c - V$ et vers P_2 à la vitesse $c + V$. On a donc

$$\Delta t = -\frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell v}{c^2}\frac{1}{1 - v^2/c^2} \ . \tag{1.5}$$

Il suffit donc de réaliser cette expérience sur la Terre pour mesurer la vitesse de propagation de la Terre par rapport l'Ether.

On envoie une lumière sur une lame $\mathcal{L}$ semi-réfléchissante. Elle sépare le faisceau en deux. Une partie va vers un miroir $\mathcal{M}_1$ à distance L_1 de la lame et l'autre va vers un miroir $\mathcal{M}_2$ à distance L_2 de la lame. Les deux miroirs sont sur des directions orthogonales et le dispositif se déplace à la vitesse v le long de l'axe $\mathcal{L}\mathcal{M}_2$. Ainsi le temps $2\Delta t_{\mathcal{M}_2}$ mis par la lumière pour aller de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}_2$ se réfléchir et retourner en $\mathcal{L}$ est de

$$2\Delta t_{\mathcal{M}_2} = \frac{L_2}{c-v} + \frac{L_2}{c+v} = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2} \ . \tag{1.6}$$

De même, si $2\Delta t_{\mathcal{M}_1}$ est le temps mis par la lumière pour aller de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}_2$ se réfléchir et retourner en $\mathcal{L}$, alors en vertu de la symétrie du problème la lumière va mettre $\Delta t_{\mathcal{M}_1}$ secondes avant de se réfléchir sur $\mathcal{M}_1$. Entre temps, dans le référentiel de l'Éther, le miroir s'est déplacé de $v\Delta t_{\mathcal{M}_1}$ La lumière devra donc parcourir une distance $L = c\Delta t_{\mathcal{M}_1}$ telle que

$$L^2 = v^2\Delta t^2_{\mathcal{M}_1} + L_1^2 \qquad \Delta t_{\mathcal{M}_1} = \frac{L_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ . \tag{1.7}$$

Ainsi si $L_1 = L_2$, on a que toujours $\Delta t_{\mathcal{M}_1} \neq \Delta t_{\mathcal{M}_2}$. Pour cela il suffit de s'assurer que l'un des axes de l'interféromètre soit orienté suivant le sens de déplacement de la Terre par rapport au Soleil. En pratique il est difficile de réaliser $L_1 = L_2$, on tourne donc l'interféromètre de 90ř et mesure le déplacement des franges. Cela qui donne accès à la variation des temps de parcours selon la géométrie.

Cependant malgré ces précautions on ne voit aucun déplacement des franges. Or, dans le cadre expérimental de l'époque, Michelson et Morley étaient capables de détecter des variations de la vitesse de la lumière de l'ordre de 150mm.s^{-1}. Les lasers permettent aujourd'hui de détecter des variations de vitesse de l'ordre de $0,03$mm.s^{-1}. Le résultat est cependant toujours négatif.

Il y eu alors entre 1881, date du résultat négatif de Michelson–Morley, et 1905 plusieurs tentatives pour essayer d'expliquer l'échec de l'expérience par rapport à la mesure du vent d'Éther.

– On suppose que l'éther est entraîné par la Terre. Cela contredit l'expérience de Fizeau et les résultats provenant de l'aberration des étoiles.
– On tente aussi d'argumenter que la vitesse de la lumière ne se rapporte pas à un système de référence, mais à la source lumineuse. C'est la théorie ballistique ou d'émission. Ainsi la vitesse de la lumière se compose avec celle du mouvement de la source. Cela explique l'expérience de Michelson mais est contredit par d'autres observations. On peut citer ici les mesures faite sur un système d'étoiles doubles. Le red shift maximal d'une des deux étoiles coïncide avec le blue shift maximal de l'autre. Il n'y a donc pas de retard de propagation comme le prédirait la théorie ballistique.
– Il existe aussi une autre façon de justifier le résultat négatif de l'expérience de Michelson-Morley, c'est la contraction des longueurs proposée par Lorentz et Fitzgerald. Le principe consiste à dire que il y a contraction des longueurs des solides dans la direction de propagation. Cette contraction est d'un facteur γ^{-1}, avec $\gamma^{-1} = \sqrt{1-v^2/c^2}$. En effet, un solide résulte de l'équilibre entre les diverses forces électrostatiques qui règnent à l'intérieur. Les atomes sont placés dans des minimas périodiques du potentiel électrostatique qui est créé par tous les atomes du solide (*cf* modèle classique du solide cristallin). Or, si on calcule les lignes de champ crées par une particule chargée se propageant dans le vide, on voit qu'elles sont contractées d'un facteur γ^{-1} dans la direction du mouvement de la particule par rapport aux lignes de champ créés par une particule immobile. Ainsi, dans le cas d'un solide en mouvement, les minimas du potentiel électrostatique vont se rapprocher. Cela déplace donc les positions d'équilibre des atomes du réseau cristallin et aura donc tendance à contracter les dimensions longitudinales du solide. Cette hypothèse un peu *adhoc* explique certain phénomènes relativiste, mais pas tous ! Notamment elle a le désavantage de ne pas présenter un traitement cohérent de la physique mais plutôt de donner un ensemble de recettes.

Citons encore une expérience de Fizeau cherchant à mettre en évidence l'éther. On considère une source S émettant à une longueur d'onde λ_0 et située au foyer objet d'une lentille convergente de focale f_1. Á la sortie de la lentille, la lumière passe par deux fentes d'Young. Ensuite, elle passe par un tuyau en U dont chaque ramification a une longueur ℓ. On laisse couler de l'eau à une vitesse v dans ce tube de sorte que l'eau coule vers la fente F_1 et s'éloigne de la fente F_2. La lumière arrive sur une lentille convergente et le résultat est observé sur un écran situé au foyer image de la lentille de focale f. Á vitesse d'écoulement nulle, on retrouve la figure d'interférence usuelle (franges à l'infini espacées de $\lambda f/a$). Si l'on branche l'écoulement, la lumière qui passe par la portion supérieure du tube aura une vitesse $c/n + v$ où n est l'indice de l'eau alors que celle qui passe par la portion inférieure aura une vitesse $c/n - v$. Cela induit une différence de chemin optique

$$\delta = c\left(\frac{\ell}{c/n - v} - \frac{\ell}{c/n + v}\right) = \frac{2\ell c v}{c^2/n^2 - v^2} \tag{1.8}$$

Or Fizeau mesure $\delta/\lambda_0 \simeq 0,1$. Cela contredit la prévision galiléenne correspondante ($v = 7\text{m.s}^{-1}$, $\ell = 1,5\text{m}$ $\lambda_0 = 530\text{nm}$ et $n = 1,33$) qui est de $0,25$.

exercice 1.4 *Retrouver la figure d'interférences. Que se passe-t-il si les franges ne sont pas infiniment fines ?*

2 Généralités sur la relativité restreinte

C'est en 1905 qu'Einstein, influencé par les travaux de Poincaré, donne une interprétation limpide aux idées de ce dernier. En effet, déjà en 1902 Poincaré publie un livre où il insiste de na pas trop attirer d'importance aux artéfacts de la physique de son époque : espace et temps absolu ainsi qu'éther. En 1905, il dérive la forme de la transformation de Lorentz et l'utilise pour argumenter la contraction de l'espace physique. Il garde cependant en tête l'idée d'un temps absolu et de l' Éther. Ce n'est qu'Einstein qui parvient à s'affranchir de l'hypothèse de l'éther en partant du principe de relativité. Il donne une interprétation des distortions de l'espace-temps en termes de perspective d'observation. De plus, en partant d'un nombre fort restreint d'hypothèses, il arrive à reproduire la forme de la transformation de Lorentz qui était déjà connue comme le groupe des transformations des variables $(t, \vec{r})$ laissant les équations de Maxwell invariantes. Einstein en donne un interprétation correcte en termes de transformations réellement perçues de l'espace-temps. Puis en 1907, Minkowski synthétise toute l'approche d'Einstein dans un cadre mathématique clair, celui d'un espace pseudo-métrique. Alors, la transformation de Lorentz apparaît comme le groupe des isométries [1] de la métrique pseudo-euclidienne.

2.1 Énoncé des principes de la relativité et exemples

La relativité restreinte repose sur deux principes de base

- Tous les phénomènes physiques se déroulent identiquement dans les référentiels d'inertie si les conditions initiales de ces phénomènes sont les mêmes.
- La vitesse de la lumière dans le vide est constante dans tout référentiel d'inertie ainsi que dans toutes les directions et ne dépend ni de la vitesse de la source émettrice ni de la vitesse de l'observateur.

Ces deux principes nécessitent bien évidemment quelques commentaires. Le premier principe est souvent énoncé sous la forme *"les lois de la physique sont invariantes par un changement de référentiel d'inertie"*. Cependant, à notre goût, cet énoncé peut prêter à confusion. En effet, un goutte de pluie vue par le voyageur d'un train décrit une hyperbole alors qu'elle tombe en ligne droite dans le référentiel terrestre [2]. Dans les deux cas, la goutte

1. Une isométrie est une application qui préserve la métrique
2. nous supposons bien-évidemment une pluie en absence de vent.

suit les *mêmes* lois de la physique (principe fondamental de la dynamique [3]) mais se comporte différemment dans la mesure où les conditions initiales de son mouvement varient d'un référentiel inertiel à l'autre. La phrase *"les loi de la physique sont invariantes par changement de référentiel d'inertie"* signifie que les équations du mouvement prennent la même forme dans tout référentiel inertiel lorsqu'elles sont écrites dans les coordonnées attachées à celui-ci. Toute la signification de ce premier principe est que nous sommes incapables de réaliser une expérience qui permettrai d'affirmer que nous nous déplaçons à vecteur vitesse constant par rapport à un certain référentiel inertiel. C'est l'impossibilité du mouvement absolu qui, comme nous l'avons déjà souligné, existe en mécanique classique. La nouveauté est d'étendre ce principe à *toutes* les lois de la physique.

Le deuxième principe semble être une conséquence du premier. En effet, il suffit d'admettre que l'électrodynamique est une loi absolue de la physique... Cependant, nous savons que non, comme le montre l'électrodynamique quantique. Les processus de création de paires e^+/e^-, de photons, *etc* ne peuvent être pris en compte dans le cadre classique de l'électrodynamique de Maxwell. Soulignions aussi qu'admettre qu'une vitesse est indépendante du choix de la direction revient à supposer implicitement l'isotropie de l'espace.

Nous allons maintenant tirer plusieurs conséquences de ces deux principes. Commençons par fixer quelques concepts fondamentaux. La relativité restreinte est une théorie de l'observation. Elle permet de dire comment un phénomène observé dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ est perçu dans un autre référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. Nous sommes habitués de repérer un événement par la date où il se produit et sa position par rapport à un point de référence. Ainsi nous le caractérisons par ses coordonnées [4] (ct, x, y, z). Il convient donc de définir ce que l'on entend par coordonnée de position et de temps. Nous mesurons la position en superposant des longueurs élémentaires, par exemple une longueur d'onde atomique. De même, nous mesurons un temps à partir d'un processus périodique comme la fréquence de la transition entre deux raies hyperfines du Cesium. Nous aurions aussi pu utilisé la constance de la vitesse de la lumière pour mesurer une distance. On place en P un miroir en on envoie de O, origine du repère, un signal lumineux. On enregistre ensuite son temps t de retour en O. Alors, en vertu de la constance de la vitesse de la lumière P se trouve à une distance $ct/2$. Nous avons donc divers moyens de mesurer les distances dans $\mathcal{R}$; chaque point de $\mathcal{R}$ est caractérisé par sa coordonnée spatiale (x, y, z). Nous avons encore besoin d'attacher à chaque point P de $\mathcal{R}$ des horloges synchronisées. Pour le faire, on envoie un signal lumineux de O dans toutes les directions et démarre une horloge à $t = 0$. Lorsqu'il parvient au point P, l'observateur en P met sont horloge en marche, mais elle commence son décompte qu'à partir de $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/c$. Une autre façon de dire les choses est que deux événements seront considérés comme simultanées dans $\mathcal{R}$ lorsqu'il appartiendront au même front d'onde dans $\mathcal{R}$. Remarquons qu'ainsi nous créons une sorte d'équivalence entre temps et distance puisqu'une mesure de temps se traduit par une distance parcourue par la lumière et *vice-versa*.

2.2 Conservation des longueurs transverses

Ici, et dans toute la suite, $\mathcal{R}$ est un référentiel inertiel et $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation rectiligne uniforme à vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ par rapport à $\mathcal{R}$. De plus, sauf mention contraire, nous nous placerons dans le cas où les repères O_{xyz} et $O'_{\mathrm{x'y'z'}}$ coïncident géométriquement à $t = t' = 0$. Cela est toujours possible moyennant un bon choix de repère. De plus, cette restriction n'a aucune effet sur les conclusions de nos raisonnements en vertu de l'isotropie de d'espace.

On considère une expérience de pensée qui nous permettra de déterminer comment un observateur de $\mathcal{R}$ perçoit les dimensions transverses des objets dans $\mathcal{R}'$. Puisqu'on mesure une distance avec un règle, nous allons raisonner sur de tels objets. On place une règle de longueur ℓ_0 dans $\mathcal{R}$ de sorte la règle soit orientée le long de l'axes Oy et que son milieu se trouve en O à $t = t' = 0$. Notons AB la règle dans $\mathcal{R}$ et $A'B'$ la règle qui se trouve dans $\mathcal{R}$. Puisque

3. qui est ici applicable au vu des vitesses mises en jeu !
4. nous choisissons ici d'avoir un ensemble de coordonnées homogènes !

le milieu de la règle coïncide avec $O = O'$ à $t = t' = 0$ et que tous les points de la règle AB se déplacent à la même vitesse $-\vec{v}$ dans $\mathcal{R}'$, à $t = t' = 0$ tous les points de la règle AB vont appartenir à l'axe $O'y'$ et Oy. Les observateurs dans $\mathcal{R}'$ marquent $A'_{\mathcal{R}'}B_{\mathcal{R}'}$ l'endroit sur Oy ou ils voient les points AB. Supposons que la règle AB parait raccourcie dans $\mathcal{R}'$, *ie* $\ell_{AB}^{(\mathcal{R}')} = \alpha\ell_0$. Le coefficient α dépend de la vitesse relative v mais pas de sa direction. Cela est imposé par l'isotropie de l'espace. Sinon, en mesurant la différence des coefficients α entre une propagation à droite et à gauche on aurait pu savoir où est la droite ! Les observateurs de $\mathcal{R}$ reportent donc sur Oy les marquages $A_{\mathcal{R}'}B_{\mathcal{R}'}$ des mesures de la règle de départ effectuées par les observateurs de $\mathcal{R}'$. Il trouvent donc que l'objet a une longueur $\ell^{(\mathcal{R})}_{A_{\mathcal{R}'}B_{\mathcal{R}'}} = \alpha\ell^{(\mathcal{R})}_{A'B'} = \alpha^2\ell_0$. Or, ils devraient retrouver exactement leur règle de départ. Ainsi le seul choix possible est $\alpha = 1$. Nous avons rejeté $\alpha = -1$, en passant à la limite des vitesses v nulles, où l'on doit retrouver les résultats de la mécanique Galiléenne

Il y a donc conservation des dimensions transverses des objets en mouvement.

2.3 Dilatation des temps

Nous allons maintenant expliquer comment un observateur de $\mathcal{R}$ perçoit l'écoulement du temps dans $\mathcal{R}'$. Nous verrons que l'observateur de $\mathcal{R}$ voit le temps dans $\mathcal{R}'$ s'écouler plus lentement. Tous les processus horloges, déplacements, cycles cellulaires qui ont lieu dans $\mathcal{R}'$ prennent plus de temps pour l'observateur de $\mathcal{R}$.

Une horloge est un procédé périodique. Nous identifions un écoulement de temps (par exemple la seconde) avec l'accomplissement d'un certain nombre de période. Nous allons prendre une horloge basée sur la lumière pour cette expérience de pensée. On considère une horloge constituée de deux miroirs distants de L. Le phénomène périodique mis en jeu est l'allée-retour de la lumière entre les deux miroirs. On place une telle horloge $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$ et une horloge identique $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{R}'$, les deux étant orientées transversalement à la direction du mouvement. Notons $2T_{\mathcal{R}}$ la période de l'horloge $\mathcal{H}'$ telle qu'elle est vue dans $\mathcal{R}$. Par symétrie, la lumière mettra le même temps $T_{\mathcal{R}}$ pour aller dans un sens. Elle parcours alors une distance $cT_{\mathcal{R}}$ alors que le miroir s'est déplacé dans $\mathcal{R}$ de $vT_{\mathcal{R}}$. On a donc,

$$(cT_{\mathcal{R}})^2 = L^2 + (vT_{\mathcal{R}})^2 \quad \text{soit } T_{\mathcal{R}} = \frac{L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{2.1}$$

Or la période $2T_{\mathcal{R}'}$ de l'horloge dans $\mathcal{R}'$ est $2T_{\mathcal{R}'} = 2L/c$. On a donc

$$T_{\mathcal{R}} = \gamma T_{\mathcal{R}'} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c} . \tag{2.2}$$

La période de l'horloge $\mathcal{H}'$ vue par l'observateur dans $\mathcal{R}$ est donc plus grande d'un facteur[5] $\gamma > 1$. Cela veut dire que tous les phénomènes qui se passent dans $\mathcal{R}'$ seront vus au ralenti par l'observateur attaché à $\mathcal{R}$. Les horloges battent plus lentement, les processus biologiques se déroulent plus lentement, les gros bof en Ferrari ne roulent que deux à l'heure. On pourrait tenter d'objecter que ce résultat est du au type particulier d'horloge que nous avons choisi. Une autre horloge "plus conventionnelle" donnerai un même écoulement des temps de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Considérons donc une quelconque autre horloge $\mathcal{H}'_2$ dans $\mathcal{R}'$. Sa période est une certain multiple α de la période de l'horloge à lumière $2T_{\mathcal{R}'}$. Puisque les lois de la physique sont indépendantes du référentiel inertiel où on les observe, la période de la deuxième horloge $\mathcal{H}'_2$ doit être, dans tous les référentiels, un multiple α de la période de l'horloge $\mathcal{H}'$ à lumière. En effet, la période d'une horloge ne dépend que des lois physiques qui régissent le mouvement périodique. Si dans un référentiel ces lois prédisent un rapport de α entre périodes, celui-ci est indépendant du référentiel galiléen considéré. Typiquement, pour une horloge atomique, si la période d'une transition hyperfine

5. Nous notons ici simplement γ car il n'y a aucune possibilité de confusion. Dans le cas où une confusion est possible, nous insisterons explicitement sur la dépendance en v de $\gamma \equiv \gamma(v)$.

est de tant unités de temps, elle le sera dans tous les référentiels. L'unité de temps étant par exemple l'allée-retour de la lumière entre deux miroirs. C'est la non-existence d'une unité de temps absolue mais uniquement celle du temps propre à un observateur qui est responsable de cette dilatation des temps.

Le ralentissement relativiste des horloges a déjà été observé dans plusieurs situations. D'une part, on a fait voyager une horloge atomique en avion autour de la Terre et, moyennant des corrections due à la relativité générale, on a trouvé que l'horloge de l'avion retardait par rapport à l'horloge restée sur Terre ! Ce rallongement des temps est aussi observé sur les déplacement des muons dans l'atmosphère terrestre. Ces particules (qui sont des électrons plus lourds) sont créés dans la haute atmosphère terrestre (35000 km) par désintégration de pions chargés produits par le rayonnement cosmique de protons (durée de vie du pion de l'ordre de la ns). Les muons ainsi produits ont une très haute énergie et se déplacent par rapport à la Terre à une vitesse très proche de c. Leur durée de vie est d'environ $\tau_\mu = 2,2\mu$s. On observe les muons au niveau de la mer et on montre qu'ils ne peuvent provenir que de la haute atmosphère. Or, si il n'y avait pas de dilatation des temps, le muon parcourrait au plus $v\tau_\mu \simeq c\tau_\mu = 660m << 35000m$! La situation change considérablement si l'on prend en compte la dilatation des temps. La durée de vie, comme tout phénomène temporel, sera perçue comme allongée d'un facteur γ pour nous, observateurs de la Terre. On estime le facteur γ des muons d'être environ 57. Ainsi le muon peut parcourir sur Terre $\gamma v\tau_\mu \simeq \gamma c\tau_\mu = 38000$m avant de se désintégrer. Cela explique donc pourquoi nous observons les muons au niveau de l'Océan. Bien évidemment nous avons négligés dans toutes ces considérations le fait qu'un muon est une particule chargée et, en tant que telle, subira des pertes par ionisation des molécules présentes dans l'atmosphère terrestre. Durant son voyage le muon perd environ 2 GeV, alors que sont énergie initiale est de 6 GeV. Le rallongement de la durée de vie des particules instables dans les référentiels où elles sont en mouvement est utilisé et/ou observé au quotidien dans tous les accélérateurs de particules. On peut citer ici la nécessité de construire un tunnel assez long afin de pouvoir utiliser un faisceau très énergétique de pions pour produire un faisceau de neutrinos hautement énergiétiques qui irons du CERN au Grand-Sasso.

Le ralentissement des horloges ainsi que le rallongement des temps de demi-vie nous incite à introduire la définition

Définition 2.1 *On appelle temps propre associé à un objet (une particule par exemple) le temps qui s'écoule dans le référentiel où cet objet est immobile. C'est une quantité propre à cet objet et, en tant que telle, a une réalité physique bien définie.*

Les mesures de ce temps dans tous les autres référentiels inertiels en mouvement par rapport à celui de l'objet donneront des résultats plus long que le temps propre.

exercice 2.1 *Mais alors puisque $\mathcal{R}'$ voit le temps de $\mathcal{R}$ plus lent et vice versa, arrive-t-on à une contradiction ?*

2.4 Contraction des longueurs longitudinales

Nous allons enfin étudier comment un observateur dans $\mathcal{R}$ perçoit les dimensions longitudinales des objets immobiles dans $\mathcal{R}'$. Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons tout d'abord présenter le protocole expérimental que nous utiliserons afin de mesurer la longueur de la règle. On suppose qu'à $t = t' = 0$ l'extrémité gauche G de la règle se trouve en $O \equiv O'$. On envoi alors un signal lumineux vers l'extrémité droite D qui, elle, est munie d'un miroir. La mesure du temps de retour de la lumière à G donnera accès à la longueur de la règle telle qu'elle est perçue dans $\mathcal{R}$. Clairement, dans $\mathcal{R}'$ si la lumière met un temps Δt pour faire un aller, la longueur de la règle sera $L = c\Delta t$.

Soit $L_\mathcal{R}$ la longueur de la règle telle qu'elle est vue dans $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel, la lumière met un temps t_1 pour arriver sur le miroir en D. Pendant t_1 ce miroir s'est déplacé de vt_1 on a donc

$$ct_1 = L_\mathcal{R} + vt_1 \quad \text{soit} \quad t_1 = \frac{L_\mathcal{R}}{c+v}\ . \tag{2.3}$$

Quand au chemin du retour, la lumière met un temps t_2 dans $\mathcal{R}$ pour aller de D à G. Pendant ce temps, G s'est rapproché du point où la lumière s'est réfléchie sur le miroir de vt_2. D'où,

$$ct_2 = L_{\mathcal{R}} - vt_2 \quad \text{soit} \quad t_2 = \frac{L_{\mathcal{R}}}{c - v} \; . \tag{2.4}$$

Ainsi, la durée dans $\mathcal{R}$ entre le départ de la lumière et son retour en G est

$$2\Delta t = \frac{2L_{\mathcal{R}}}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \; . \tag{2.5}$$

La durée entre ces deux événements dans $\mathcal{R}'$ est $2\Delta t_0 = 2L/c$. Or, en vertu de la dilatation des temps ce processus dure $2\Delta t = \gamma 2\Delta t_0$. Nous en déduisons la relation entre la longueur propre de la règle (*ie* sa longueur dans le référentiel où elle est immobile) et celle dans $\mathcal{R}$:

$$\Delta t_0 = \frac{L}{c} = \frac{L_{\mathcal{R}}}{\gamma c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad \text{et donc } L_{\mathcal{R}} = \frac{L}{\gamma} \; . \tag{2.6}$$

La règle paraît donc plus courte pour tous les observateurs par rapport auxquels elle se déplace. La conclusion est que c'est inutile d'acheter une grosse navette Ferrari pour impressionner les filles dans bars intergalactiques. Elles la verrons très large mais aplatie. Cela leur donnera une impression de ridicule ! Le mec avait des sous pour s'acheter la largeur mais était trop radin pour se payer de la longueur.

La mise en évidence directe de la contraction des longueurs est bien plus difficile que pour la dilatation des temps. Mais nous pouvons retourner nos raisonnement afin de retrouver, à partir de la contraction des longueurs, les conclusions que nous avons déjà obtenues à partir de la dilatation des temps. Cela montre une cohérence interne de la théorie. On obtient le même résultat physique à partir des raisonnements effectués dans différents référentiels. Bien que certains référentiels conduiront à des étapes intermédiaires compliquées dans les raisonnements, tous les référentiels donneront la même conclusion quand au phénomène physique observé.

Il y a eu une panne fatale sur l'étoile de la mort. Le coeur de l'étoile à commencé de fondre en raison d'une futile attaque des rebelles. Darth Vador branche donc les propulseurs pour amener l'étoile vers Tatooine où elle pourra frapper une dernière fois avant d'exploser. Or, il ne reste que quelques minutes avant l'explosion de l'étoile et une distance d de 5 années lumière à parcourir. L'étoile peut-elle ne pas exploser. On suppose que l'étoile se propage à vitesse constante $v\vec{e_x}$. Dans le référentiel propre de l'étoile, Tatooine se déplace à $-v\vec{e_x}$ et la distance entre l'étoile et Tatooine est de $\gamma^{-1}d$. Tatooine va croiser l'étoile après un temps $t = \gamma^{-1}d/v$. Il est donc tout à fait concevable que l'étoile détruise Tatooine avant d'exploser, pourvue qu'elle se déplace suffisamment vite !

exercice 2.2 *Retrouver ces résultats en raisonnant sur la dilatation des temps.*

2.5 Quelques autres conclusions surprenantes

Les hypothèses de la relativité restreinte conduisent parfois à des conclusions surprenantes, au moins du point se vue classique. Typiquement, il est nécessaire de renoncer à la simultanéité de deux événements. Ceux-ci peuvent être simultanés dans un référentiel mais plus dans un autre. De même, deux événements peuvent se passer au même point d'un référentiel mais à des points distincts dans un autre. Appuyons ces affirmations sur des exemples précis.

Neo se fait attaquer par deux agent Mr. Smith et Mr. Jhones. Ils se trouvent à distance égale L de Neo mais dans des directions opposées. Neo tire au même instant sur chacun des agents avec ses deux bazookas gravitationels [6]. Clairement les deux agents meurent simultanément à l'instant $t = L/c$. Entre temps, Lune la chérie de Neo a vu

6. Nous rappelons que l'interaction gravitationnelle est médiée par le graviton. Tout comme le photon, médiateur de l'interaction électromagnétique, celui-ci se propage à la vitesse de la lumière.

de très loin ce qui allait se concocter et a décidé d'accourir en aide à Neo. C'est une fine coureuse qui se meut à $v = \sqrt{3}/2c$. Que verra-t-elle ? Dans le référentiel de Lune, Smith se déplace à une vitesse v vers le rayon laser envoyé par Néo. Il meurt donc à l'instant t_1 :

$$ct_1 = \gamma^{-1}L - vt_1 \quad \text{donc} \quad t_1 = \gamma^{-1}\frac{L}{c+v} \quad . \tag{2.7}$$

Quand à Jhones, il s'éloigne à la même vitesse v du rayon laser. Le rayon laser le frappe donc à l'instant t_2 :

$$ct_2 = \gamma^{-1}L + vt_2 \quad \text{donc} \quad t_2 = \gamma^{-1}\frac{L}{c-v} \quad . \tag{2.8}$$

Nous avons donc que pour Lune, Johnes respire encore à plein poumons lorsque Smith mord le sable depuis déjà bien des lustres.

Quand à la non-simultanéité des positions, c'est un effet auquel nous sommes déjà bien accoutumés en mécanique classique. La relativité apporte uniquement une correction à cet effet. Le lecteur est invité à refaire le raisonnement classique et nous présenterons le raisonnement relativiste. Ainsi, soit une centrale nucléaire dont le réacteur commence à chauffer. Au bout de $T = 2$h elle explose. Cet événement fut observé par deux blobiens qui passaient justement à côté de la Terre dans leur vaisseau spatial intersidéral. Dans leur référentiel la centrale se déplace à v. Entre le moment où le réacteur a commencé à chauffer et l'explosion il s'est écoulé γT. La centrale explose donc à $\gamma v T$ mètres de l'endroit où elle commençait à sentir le roussi.

3 La transformation de Lorentz

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel et $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation rectiligne uniforme à vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On se propose de dériver la forme générale de la transformation qui permet de relier les coordonnées (ct', x', y', z') d'un événement dans $\mathcal{R}'$ aux coordonnées (ct, x, y, z) de ce même événement dans $\mathcal{R}$. Cela signifie que les mesures faites par les observateurs attachés à $\mathcal{R}'$ vont indiquer que cet événement se passe en (ct', x', y', z') alors que les observateurs dans $\mathcal{R}$ vont être tous d'accord que l'événement se produit en (ct, x, y, z).

Nous commençons par choisir des repères particuliers dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de sorte à nous faciliter la tache. On demande que Oxyz coïncide avec O'x'y'z' à $t = t' = 0$. Cela revient à effectuer une rotation d'espace et une translation

Nous supposerons de plus que l'espace est homogène et isotrope. Cela veux dire que les phénomène physiques ne doivent pas être affectés par le choix d'une origine des temps ou des positions. En d'autre termes, le choix d'une origine de l'espace-temps $(t_0, \vec{r}_0)$ par un observateur dans $\mathcal{R}$ doit être équivalent au choix d'une autre origine des temps $(t'_0, \vec{r}'_0)$ par un observateur dans $\mathcal{R}'$.

Ainsi si l'on note Λ la transformation qui envoie (t, x, y, z) sur (t', x', y', z') on a que

$$\Lambda.\left\{(t,\vec{r}) + (t_0,\vec{r}_0)\right\} = (t',\vec{r}') + (t'_0,\vec{r}'_0) = \Lambda\left\{(t,\vec{r})\right\} + \Lambda\left\{(t_0,\vec{r}_0)\right\} \tag{3.1}$$

Où l'on effectue l'identification en prenant $(t = 0, \vec{r} = 0)$, car on a imposé que $\left(0', \vec{0}'\right) = \left(0, \vec{0}\right)$. La transformation Λ est donc linéaire. Ce qui conduit à une importante simplification du problème. Nous avons montré que la direction transverse au mouvement n'est pas changée, *ie* les longueurs transverses mesurées par O des objets en mouvement coïncident avec leur longueurs propres. Nous avons choisi les axes Oy, Oz de sorte à coïncider avec O'y' et O'z'. Puisqu'il n'y a pas de dilatation, Λ va agit comme l'identité pour ces coordonnées. Rien qu'avec des arguments de symétrie nous avons réduit Λ à la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

dans la base canonique associée à (ct, x, y, z). Nous savons que si un objet se déplace à une vitesse v dans $\mathcal{R}$, alors sa position est fixe dans $\mathcal{R}'$. Typiquement si $x = vt$ dans $\mathcal{R}$ alors cet événement a toujours lieu en $x' = 0$. Nous en déduisons que $x' = \Gamma(x - vt)$, où Γ ne dépend que de v. Cette propriété doit bien sûr être symétrique *ie* $x = \Gamma'(x' + vt')$. Ici nous avons utilisé le fait que $\mathcal{R}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}'$ à la vitesse $-\vec{v}$. Montrons que les constantes Γ et Γ' sont égales. Pour cela on considère un javelot de longueur ℓ immobile dans $\mathcal{R}$ et placée le long de $\vec{e_x}$. On mesure la longueur de cette arme dans $\mathcal{R}'$ à $t' = 0$. Les coordonnées des ses deux extrémités vérifient donc

$$x_1 = \Gamma\left(x'_1 + v \times 0\right) \quad \text{et} \quad x_2 = \Gamma\left(x'_2 + v \times 0\right) . \tag{3.3}$$

Ainsi sa longueur est

$$\ell_{\mathcal{R}'} = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\Gamma} = \frac{\ell}{\Gamma} . \tag{3.4}$$

Considérons le même javelot mais cette fois-ci immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$. On mesure sa longueur dans $\mathcal{R}$ à $t = 0$. Les coordonnées de ses deux extrémités sont

$$x'_1 = \Gamma'(x_1 - v \times 0) \quad \text{et} \quad x'_2 = \Gamma'(x_2 - v \times 0) . \tag{3.5}$$

Ainsi sa longueur dans $\mathcal{R}$ est

$$\ell_{\mathcal{R}} = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\Gamma'} = \frac{\ell}{\Gamma'} . \tag{3.6}$$

Or nous avons admis que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tout référentiel d'inertie. Ainsi les phénomènes soumis aux mêmes conditions initiales (à isotropie d'espace près) doivent être identiques. Á la vue de ce-ci, les longueurs $\ell_{\mathcal{R}}$ et $\ell_{\mathcal{R}'}$ observées par les observateur en mouvement dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$ doivent être égales. D'où $\Gamma = \Gamma'$. Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de Γ. Pour cela nous considérons un signal lumineux qui est issu de $O \equiv O'$ et qui arrive à un certain moment (t dans $\mathcal{R}$ et t' dans $\mathcal{R}'$) en un certain point ($x = ct$ dans $\mathcal{R}$ et $x' = ct'$ dans $\mathcal{R}'$). Les coordonnées de x et x' doivent être reliées par la transformation de Lorentz :

$$x' = ct' = \Gamma(x - vt) = \Gamma t(c - v) \tag{3.7}$$
$$x = ct = \Gamma(x' - vt') = \Gamma t'(c + v) \tag{3.8}$$

On multiple les deux équations ce qui permet d'éliminer le produit tt'. Ainsi,

$$c^2 = \Gamma^2\left(c^2 - v^2\right) \Rightarrow \Gamma \equiv \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{3.9}$$

Enfin, nous déduisons la valeur de t' par

$$x = \gamma\left(\underbrace{\gamma(x - vt)}_{x'} + vt'\right) \Rightarrow t' = \frac{x\left(1 - \gamma^2\right) + v\gamma^2 t}{\gamma v} = \gamma\left(t - vx/c^2\right) \tag{3.10}$$

Ainsi la transformation de Lorentz est

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3.11}$$
$$t' = \gamma\left(t - vx/c^2\right) . \tag{3.12}$$

Où encore sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad ;\beta = \frac{v}{c} \ , \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{3.13}$$

Nous avons uniquement transcrits les coordonnées qui changent non-trivialement.

La forme la plus générale de la transformation de Lorentz est obtenue en ajoutant les boost suivant $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ (transformation de Lorentz comme en (3.13) mais dont la vitesse est portée par les vecteurs $\vec{e_y}$ ou $\vec{e_z}$) ainsi que les rotations d'espaces.

exercice 3.1 *Écrire la transformation de Lorentz sous forme vectorielle $(ct, \vec{r})$, c'est-à-dire indépendamment de l'orientation de la vitesse de propagation $\vec{v}$.*

Solution

Nous avons

$$\vec{r}'_{\|} = \gamma\left(\vec{r}'_{\|} - \vec{v}t\right) \quad , \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \quad \text{et} \quad t' = \gamma\left(t - \vec{r}\cdot\vec{v}/c^2\right) \ . \tag{3.14}$$

Nous pouvons faire plusieurs remarques au sujet de cette transformation :

– Cette transformation aurait pu être dérivée en considérant tout phénomène qui se propage à même vitesse $\widetilde{v}$ dans tous les référentiels. On aurait alors trouvé la même transformation mais avec $c \leftrightarrow \widetilde{v}$. Il ne peut exister qu'une seule transformation de Lorentz pour avoir une théorie qui ait un sens. Ainsi, il ne peut exister qu'une seule vitesse absolue (indépendante des référentiel Gallileén) de propagation des phénomènes. Tous les tests actuels semblent indiquer que cette vitesse coïncide bien avec la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.
– La transformation de Lorentz contient bien la transformation de Gallilé comme limite des faibles vitesses. La relativité restreinte est donc bien une théorie plus générale qui englobe la relativité galiléenne.
– Nous verrons dans la suite qu'il n'existe que deux transformations des coordonnées compatibles avec le postulat de relativité. Ce sont la transformation de Lorentz et celle de Galilée. Au lieu d'imposer c = cste on aurait donc pu utiliser comme postulat tout autre phénomène compatible avec la relativité restreinte et inexplicable dans le cadre de la relativité galiléenne. Cela nous aurait nécessairement conduit à la forme de la transformation de Lorentz pour les coordonnées. La valeur de la vitesse absolue (égale à c) aurait alors été fixée par la compatibilité avec le phénomène postulé.
– L'apparition de la coordonnée d'espace x dans la transformation donnant le temps t' est une manifestation de la relativité de la simultanéité. Deux événements qui se passent au même instant t ne se passent pas forcement au même instant t' dans un autre référentiel.
– L'inversion de la matrice Λ conduit à $x = \gamma(x' + vt')$ et $t = \gamma\left(t' + vx/c^2\right)$. C'est la transformation de Lorentz entre les coordonnées (ct', x') d'une référentiel $\mathcal{R}'$ et les coordonnées (ct, x) dans un référentiel qui se déplace par rapport à $\mathcal{R}'$ à une vitesse $-\vec{v}$. Nous retrouvons donc le résultat attendu, *ie* celui provenant du changement $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$, qui est la seule différence entre les deux référentiels.

3.1 Conservation de la causalité

La relativité restreinte impose, si l'on veut garder la notion de causalité, que tout les signaux qui portent de l'information se propagent au plus à la vitesse de la lumière. Supposons le contraire, *ie* il existe un moyen d'envoyer un signal de $Q\,(0,0)$ vers $\mathcal{P}\,(t, x = Ut)$ avec $U > c$. On regarde les coordonnées des deux événements dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$

$$x' = \gamma\,(Ut - vUt) \qquad t' = \gamma\left(t - Utv/c^2\right) = t\gamma\left(1 - Uv/c^2\right) \tag{3.15}$$

Or si $U > c$ il existe $v < c$ tel que $Uv > c^2$. Ainsi, dans un tel référentiel, nous avons $t' < 0$ et donc le signal est reçu en $\mathcal{P}$ avant même d'avoir été envoyé de Q.

3.2 Quelques paradoxes mal compris

Nous allons maintenant discuter deux soi-disant "paradoxes" issus de la relativité restreinte. Nous verrons que ce ne sont pas des paradoxes et que cette dénomination résulte soit d'une mauvaise interprétation de le relativité restreinte, soit d'une application de l'intuition galiléenne à des phénomènes manifestement relativistes.

Commençons par le paradoxe de Jumeaux de Langevin. Soit deux frères jumeaux Achille et Hector. Hector quitte la Terre et voyage vers Alpha du Centaure à une vitesse v puis retourne sur Terre à la même vitesse. Pour Achille, le vaisseau d'Hector se déplace à vitesse v, l'écoulement du temps sur le vaisseau par rapport à la Terre est donc plus lent. Ainsi, Hector sera plus jeune qu'Achille au moment de son retour sur Terre. Cependant, du point de vue d'Hector c'est la Terre qui s'éloigne à une vitesse v de son vaisseau puis qui s'en rapproche. Il semble donc que c'est Hector qui devrait voir Achille plus jeune à son retour sur Terre. Cependant l'erreur consiste à croire que les situations d'Achille et d'Hector sont équivalentes. En fait, pour démarrer de la Terre, changer de direction au niveau de l'Alpha du Centaure et puis s'arrêter sur Terre, Hector va ressentir une accélération alors qu'Achille est toujours resté dans le même référentiel inertiel. Hector n'aura donc aucun doute sur le fait que c'était bien lui qui était en mouvement. Cela résout donc le paradoxe.

Citons aussi le fameux paradoxe de la perche et de la grange. Un perche relativiste de longueur 2ℓ qui se déplace à $\gamma = 2$ arrive sur une grange de longueur ℓ. Dans le référentiel de la grange, la perche a une longueur $2\ell/\gamma = \ell$, elle entre donc entièrement dans la grange avant de ressortir de l'autre côté. Cependant, la situation semble quelque peu dérangeante du point de vue du référentiel propre de la grange. Dans celui-ci la grange a une longueur $\ell/\gamma = \ell/2$ et la perche 2ℓ. Il semblerait donc que la perche sort de la grange avant qu'elle n'ait finie d'y rentrer. La solution de ce paradoxe vient du fait que les notions d'avant et d'après sont relatives. Soit $(0,0)$ les coordonnées d'entrées de l'extrémité gauche de la perche dans la grange et $(0,\ell)$ celles de la sortie de l'extrémité droite de la perche. Dans le référentiel de la perche ces événements auront respectivement pour coordonnées $(0,0)$ et $\left(-\gamma v\ell/c^2, \gamma\ell\right)$. On a donc perdu la simultanéité des événements et, comme attendu, l'extrémité droite sort avant que l'extrémité gauche n'y soit rentrée. Le paradoxe est résolu par le fait que notre sens "galiléen" n'as tout simplement pas lieu d'être.

On peut aussi utiliser la transformation de Lorentz afin de revenir sur la propagation de l'étoile de la mort. Quand l'étoile de la mort entame son vol vers Tatooine à la vitesse v, on a pour les coordonnées de Tatooine $\left(x_T^{(i)} = 0, t_T^{(i)} = 0\right)$ et celles de l'étoile de la mort $\left(x_E^{(i)} = -d, t_E^{(i)} = 0\right)$. Les coordonnées à l'arrivée sont $\left(x_T^{(f)} = 0, t_T^{(f)} = d/v\right)$ et $\left(x_E^{(f)} = 0, t_E^{(f)} = d/v\right)$. Comment sont vus ces événements dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de l'étoile ? On choisi les axes du référentiel galiléen attaché à l'étoile de sorte que les deux systèmes d'axes coïncident à $t = t' = 0$. Ainsi,$\left(x_T^{'(i)} = 0, t_T^{'(i)} = 0\right)$ et $\left(x_E^{'(i)} = -\gamma\, d, t_E^{'(i)} = \gamma\, dv/c^2\right)$, où l'on rappelle que $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Les coordonnées à l'arrivée sont données par $\left(x_T^{'(i)} = -\gamma\, d, t_T^{'(i)} = \gamma\, d/v\right)$ et $\left(x_E^{'(i)} = -\gamma\, d, t_E^{'(i)} = \gamma\, d/v\right)$. Ainsi, il s'écoule $\Delta t' = t_E^{'(f)} - t_E^{'(i)} = t_T^{'(f)} - t_T^{'(i)} = d/\gamma v$ entre les deux événement . On retrouve donc bien le résultat provenant du raisonnement basé sur la contraction des longueurs. Cependant, on ne peut dire que les planètes se trouvent dans $\mathcal{R}'$ à une distance γd l'une de l'autre puisque c'est une distance mesurée à des temps différents !

La distance entre les planètes est obtenue que si on se place à des temps égaux, *cf* dérivation de la transformée de Lorentz.

3.3 Composition des vitesses

Nous pouvons utiliser la transformation de Lorentz pour déterminer la loi relativiste de composition des vitesses. On considère une particule qui se déplace dans $\mathcal{R}'$ à une vitesse $\vec{u}'$. Á l'instant t' elle se trouve en $\vec{r}'$ et, à

$t' + \mathrm{d}t'$, elle se trouve en $\vec{r'} + \vec{u'}\mathrm{d}t'$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ les coordonnées de ces deux événements sont

$$\begin{array}{rcl} t & = & \gamma\left(t' + vx'/c^2\right) \\ x & = & \gamma\left(x' + vt'\right) \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} t + \mathrm{d}t & = & \gamma\left(t' + \mathrm{d}t' + v\left(x' + u'_x\mathrm{d}t'\right)/c^2\right) \\ x + \mathrm{d}x & = & \gamma\left(x' + u'_x\mathrm{d}t' + vt' + v\mathrm{d}t'\right) \\ y + \mathrm{d}y & = & y' + u'_y\mathrm{d}t' \\ z + \mathrm{d}z & = & z' + u'_z\mathrm{d}t' \end{array} . \tag{3.16}$$

Ainsi, en vertu de la linéarité des équations,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}t & = & \gamma\mathrm{d}t'\left(1 + vu'_x/c^2\right) \\ \mathrm{d}x & = & \gamma\mathrm{d}t'\left(u'_x + v\right) \\ \mathrm{d}y & = & u'_y\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}z & = & u'_z\mathrm{d}t' \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{array}{rcl} u_x & = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & \dfrac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y & = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = & \dfrac{u'_y}{\gamma\left(1 + u'_xv/c^2\right)} \\ u_z & = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = & \dfrac{u'_z}{\gamma\left(1 + u'_xv/c^2\right)} \end{array} . \tag{3.17}$$

Nous voyons donc que la formule relativiste pour la composition des vitesses diffère de son équivalent galiléen. Nous voyons tout de suite que si une particule se propage à c dans un référentiel alors elle va se propager à c dans un autre. Nous traitons le cas où la particule se propage le long de $\vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}'$. Alors

$$u_x = \frac{c + v}{1 + vc/c^2} = c\ . \tag{3.18}$$

exercice 3.2 *Traiter le cas d'une propagation dans une direction quelconque.*

De manière plus générale, si une vitesse est inférieure à c dans un référentiel alors elle l'est dans tout autre référentiel inertiel. En effet, nous avons

$$u^2 - c^2 = \frac{1}{\left(1 + u'_xv/c^2\right)^2}\left\{\left(u'_x\right)^2 + 2vu'_x + v^2 + \left(u'_\perp\right)^2\left(1 - v^2/c^2\right)\right\} - c^2 \tag{3.19}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + u'_xv/c^2\right)^2}\left\{\left(u'\right)^2 + 2vu'_x + v^2\left(1 - \left(u'_\perp\right)^2/c^2\right) - c^2 - 2vu'_x - \left(u'_x\right)^2 v^2/c^2\right\} \tag{3.20}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + u'_xv/c^2\right)^2}\left\{\left(u'\right)^2 - c^2 + v^2\left(1 - \left(u'\right)^2/c^2\right)\right\} = -\frac{\left(\left(u'\right)^2 - c^2\right)\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 + u'_xv/c^2\right)^2} \tag{3.21}$$

Ce qui prouve bien l'affirmation.

Il est important de remarquer la structure de la distribution des vitesses dans un autre référentiel inertiel. Typiquement, les composantes des vitesses transverses au mouvement de translation se font écraser d'un facteur γ. C'est la vitesse de propagation longitudinale qui est intensifiée.

Soit une particule qui se déplace à la vitesse $\vec{u'} = \left(u'_x, u'_y, 0\right)$ dans $\mathcal{R}'$. Nous déterminerons une relation entre les angles des directions de propagation dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. En appliquant la transformation des vitesses nous avons

$$\frac{u_y}{u_x} = \tan\alpha = \frac{u'_y}{\gamma\left(u'_x + v\right)} = \frac{\sin\alpha'}{\gamma\left(\cos\alpha' + v/u'\right)} \quad \text{avec } u' = \sqrt{\left(u'_x\right)^2 + \left(u'_y\right)^2} \tag{3.22}$$

Une des manifestation de ce phénomène peut être vu au CERN. Typiquement on fait circuler dans des anneaux de collision des jets de particules à des énergies de l'ordre de [7] 100 – 500GeV. Prenons ici l'exemple d'un faisceau de

7. On a failli enfin obtenir quelques TeV, mais une fuite de 2 tonnes d'Helium liquide a bloqué cet exploit magnifique.

pions à 1,4 GeV. Le pion a une masse de 140 MeV et se désintègre en anti-muon et neutrino muonique $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ avec un temps de vie de 26ns. Dans la mesure où l'interaction faible qui est responsable de ce phénomène produit une distribution isotrope de particules fils, les particules émises auront une distribution de vitesse isotrope dans le référentiel propre du pion. Le muon a une masse au repos de 105MeV, ce qui signifie que les particules émises dans le référentiel propre du pion auront $35 MeV$ à partager entre leurs énergie cinétiques respectives. Nous n'en ferons pas le calcul précis en ce moment. Nous reviendrons dessus au moment des collision et lois de conservation. Le neutrino est essentiellement une particule sans masse, on peut donc admettre que sa vitesse est proche de c (facteur γ de l'ordre de 10). De même, essentiellement la vitesse du référentiel propre du pion vaut c aussi. Ainsi, nous avons que

$$\tan\alpha \simeq \gamma^{-1} \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha' + 1} = \gamma^{-1} \tan\frac{\alpha'}{2} \tag{3.23}$$

Nous voyons donc que l'angle dans le référentiel du laboratoire sera relativement petit en raison du préfacteur γ^{-1}. En fait, le résultat ne reste vrai que pour des angles α' suffisamment loin de π, car alors il faut donner plus de détails sur le rapport v/u'. En tout cas on voit bien que le faisceau de neutrinos ainsi produit sera écrasé dans la direction longitudinale. Ainsi, il est possible de produire une faisceau focalisé dans la direction de propagation des pions. Ce faisceau gardera la faible valeur de son waist sur une très grande distance. Ainsi un faisceau de neutrinos produit au CERN arrivera au grand-Sasso situé à 800km sans perdre de neutrinos à cause du mouvement transverse !

Une application immediate de la loi de compositions des vitesses nous permet d'expliquer le résultat négatif de l'expérience de Fizeau. Dans l'eau, la lumière se propage à une vitesse c/n. L'eau se propage par rapport à l'observateur fixe à une vitesse $\pm v$. Ainsi, la vitesse de la lumière dans le référentiel du laboratoire est

$$u = \frac{c/n \pm v}{1 \pm v/nc} \simeq c\left(\frac{1}{n} \pm v\right)\left(1 \mp \frac{v}{cn}\right) \simeq \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.24}$$

Nous trouvons alors pour la différence de marche de l'expérience de Fizeau

$$\delta \simeq 2\ell\left(n^2 - 1\right)\frac{v}{c} = 0,1\lambda_0 \ . \tag{3.25}$$

Ainsi, les mesures de Fizeau sont bien reproduites par la relativité restreinte. Cette explication de l'expérience de Fizeau est attribuée à Laue (1907).

3.4 Sur la vitesse des interactions

Comme nous venons de le voire, la relativité impose l'existence d'une vitesse limite dans la nature. Aucun phénomène qui véhicule de l'information ne peut se propager plus vite que c. Ainsi, aucune interaction n'est instantanée. Typiquement, le champ électromagnétique créé par des sources en mouvement est tel que la particule qui le ressent en $(ct, \vec{r})$ subira celui créé par les sources aux positions $\left(ct - \left\|\vec{r} - \vec{s}\right\|, \vec{s}\right)$. Il faut prendre en compte le temps de propagation entre le moment de la production et l'arrivée au point ou se situe la particule. De même, le champ en $(ct, \vec{r})$ créé par une particule en mouvement, correspond à la superposition des champs crées par celle-ci aux points $\left(c\left(t - \left\|\vec{r} - \vec{s}\right\|/c\right), \vec{s}\right)$ où $\vec{s}$ appartient à la trajectoire de la particule.

On pourrait donc être amené à croire que cela induit de fortes complications pour la mécanique relativiste. Cependant, cet finitude de la vitesse de propagation des interaction limite *fortement* le type de forces possibles dans la nature. Leur description est certes compliquée mais, au moins, on n'a pas l'embarras du choix des types d'interactions à décrire.

En tout cas, insistons que les forces de contact ou de frottement ne peuvent exister en relativité. Même un solide doit subir l'effet d'une force agissant sur une de ses faces que progressivement. Alors que sa face droite commence à se déplacer, sa face gauche est encore immobile !

3.5 Aberration des étoiles, effet Doppler

Nous allons maintenant discuter les répercussions de la relativité restreinte sur l'optique. Prenons le modèle du champ scalaire pour l'onde lumineuse. Celle-ci est alors décrite par une onde

$$\psi\left(t,\vec{r}\right)=\mathcal{A}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)\quad\text{avec}\quad\omega=\left\|\vec{k}\right\|c\ , \tag{3.26}$$

de sorte que l'amplitude lumineuse en un point $\mathcal{M}$ de l'espace est donnée par $|\psi|^2$. Si ψ représente l'onde lumineuse dans $\mathcal{R}$, notons ψ' l'onde correspondante telle qu'elle est observé dans $\mathcal{R}'$. L'arrivée d'un photon en un point de l'espace à un instant donné constitue bien un événement. Ce événement doit être observé de manière identique par tous les observateurs. Ainsi, il semble logique que l'amplitude de l'onde ne change pas d'un référentiel à un autre, *ie* $\psi'=\psi$. En effet, $\mathcal{A}_0$ représente le nombre de photons dans le faisceau. Ce nombre ne peut changer d'un référentiel à l'autre car sinon cela pointerai vers un référentiel privilégié (disons celui où le nombre de photons est maximal), or nous avons aboli ce type d'absolu. De même la phase de l'onde ne peut changer car sinon deux observateurs en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre verraient le même événement de façons différentes. Ainsi on doit avoir

$$\psi'\left(t',\vec{r}'\right)=\psi\left(t\left(\vec{r}',t'\right),\vec{r}\left(\vec{r}',t'\right)\right)\ . \tag{3.27}$$

Où $(t',\vec{r}')$ sont les coordonnées de l'événement $(t,\vec{r})$ vu pas l'observateur dans $\mathcal{R}'$. En injectant la transformation de Lorentz pour $(t,\vec{r})$ on trouve

$$\begin{aligned}\omega t-\vec{k}.\vec{r} &= \omega\gamma\left(t'+vx'/c^2\right)-k_x\gamma\left(x'+vt'\right)-k_yy'-k_zz' &(3.28)\\ &= t'\underbrace{\gamma\left(\omega-k_xv\right)}_{\omega'}-x'\underbrace{\gamma\left(k_x-v\omega/c^2\right)}_{k'_x}-k_yy'-k_zz'=\omega't'-\vec{k}'.\vec{r}' &(3.29)\end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons que l'onde place dans $\mathcal{R}$ est encore une onde plane dans $\mathcal{R}'$ mais dont le vecteur d'onde et la fréquence sont modifiées. Ainsi dans $\mathcal{R}'$ la lumière n'a plus la même fréquence ni la même longueur d'onde. Nous laissons cependant au lecteur le soin de vérifier que le vecteur d'onde $\vec{k}'$ et la pulsation ω' dans $\mathcal{R}'$ satisfont à la même relation de dispersion que dans $\mathcal{R}$: $\left\|\vec{k}'\right\|=\omega'/c$. Cet effet, est déjà connu en mécanique classique, *cf* effet Doppler. La mécanique relativiste apporte cependant sa correction due au phénomène de la dilatation des temps.

La loi de transformation du vecteur pulsation-vecteur d'onde permet de calculer les corrections relativistes à l'aberration des étoiles. On se place dans une situation où nous négligeons l'erreur de parallaxe qui, nous le rappelons, est inférieure d'un facteur 10 à l'erreur d'aberration. Dans le référentiel héliocentrique la lumière arrive suivant Oz avec un vecteur d'onde $k=\omega/c$. Dans le référentiel galiléen tangent au référentiel terrestre au moment de l'observation (qui est effectuée par Tycko-Brahé [8]) la lumière sera caractérisée par le vecteur d'onde $\left(-\gamma k\frac{v}{c},0,k\right)$ et par une pulsation $\gamma\omega$. Ainsi, l'angle β formé par la direction de propagation du faisceau dans $\mathcal{R}$ et la direction Oz' réelle de l'étoile est tel que

$$\tan\beta=\frac{|k_x|}{|k_z|}=\gamma\frac{v}{c}\ . \tag{3.30}$$

Ainsi la relativité restreinte apporte une correction d'un facteur γ pour la tangente de β. C'est donc une correction du second ordre (et en fait du troisième !) en v/c. Mais l'effet devient important lorsque $v\sim c$ (on a alors $\beta\sim\pi/2$ au lieu de $\pi/4$!)

8. Je vous laisse découvrir qui fut ce monsieur

formule effet doppler

Nous pouvons aussi discuter l'effet Doppler relativiste. Nous voyons (3.29) que la fréquence (et donc la période) de l'onde change pour un observateur en mouvement puisque $\omega' = \gamma(\omega - k_x v)$. En soi, tout comme dans le cas de l'aberration des étoile, cet effet existe dans le monde de tous les jours. Nous somme habitués à entendre un son plus aigu quand une voiture s'approche de nous et un son plus grave quand elle s'éloigne. De même, nous sommes habitués à prendre des PV grâce à la velocimétrie Doppler et pour conduite excessive . Cependant, l'effet Doppler classique ne prévoit qu'un changement de fréquence qui est $\omega - \vec{k}.\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de propagation. Ainsi, dans l'effet Doppler classique seule la partie de l'onde qui se propage le long de la direction de propagation de l'observateur contribue au changement de fréquence. Typiquement, si un observateur se propage orthogonalement à la direction de propagation de l'onde, il ne verra aucun changement dans la période de l'onde. Or en relativité, il faut non seulement prendre en compte l'effet cinématique (les bosses de l'onde sont émise à des distances plus courtes ou plus longues par rapport au récepteur) mais aussi la dilatation des temps entre deux observateurs. C'est l'origine du facteur γ. La présence de ce facteur est parfois appelée effet Doppler transverse puisqu'il a lieu même dans le cas d'un mouvement transverse. Il est beaucoup plus difficile à détecter que l'effet "classique" puisque ce dernier est du premier ordre en v/c alors que le dernier est du second ordre v/c. Ainsi, pour des vitesses généralement accessibles en laboratoire, la présence du premier cache complètement les effet du deuxième. Il est cependant possible de le mettre en évidence dans le cas de l'absence du premier. S'affranchir d'un tel effet n'est pas si simple car même une faible composante longitudinale occulterait l'effet transverse.

Typiquement on place un récepteur au centre d'un disque de rayon $\mathbb{R}$ tournant à la pulsation Ω et la source sur son extrémité. La source émet à ω et le récepteur mesure une fréquence $\omega' = \gamma(\Omega R)\,\omega$. Cette expérience fut effectuée par Hay, Schiffer, Cranshaw et Engelstaff en 1960 au moyen de la spectroscopie Mössbauer. Elle confirme bien l'effet Dopper du second ordre, où encore la dilatation des temps. En un sens, cette expérience testait plutôt l'hypothèse des horloges c'est-à-dire le fait que la dilatation de temps prévue par la relativité est indépendant de l'accélération du phénomène mais uniquement de sa vitesse. Cela a été confirmé jusqu'à $6.10^4 g$ dans l'expérience du rotor et jusqu'à $10^{16} g$ dans une autre expérience (Rebka et Pound).

Il existe aussi une autre méthode pour déterminer les corrections en v^2/c^2 au décalage Doppler pourvu d'avoir de émetteurs qui se déplacent suffisamment vite. Elle est basée sur une annulation des effet du premier ordre (linéaires en v) dans le cas d'une propagation à droite puis à gauche. Ives et Stillwell considèrent des ions H_3^+ produits par un tube à décharge qui sont ensuite accélérés par une ddp de quelques milliers de volts. Ces ions se désintègrent et produisent de l'hydrogène excité qui émettra dans la première ($\lambda_\alpha = 656$nm) où la deuxième ($\lambda_\beta = 486$nm) raie de Balmer. Cet hydrogène aura sensiblement la même vitesse ($v \simeq 1 - 5.10^{-3} c$) que les molécules pères H_3^+. Il vont émettre des photons de manière isotrope dans leur référentiel propre. Dans le référentiel du laboratoire, on ne prend en compte que les photons émis dans la direction de propagation et dans la direction opposée (cette dernière étant renvoyée vers le détecteur par un miroir). Dans le cas de l'effet Doppler longitudinal nous avons

$$(1 + \epsilon v/c)\,\gamma = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \sqrt{\left(\frac{1 + \epsilon v/c}{1 - \epsilon v/c}\right)}\ . \tag{3.31}$$

Où $\epsilon = \pm$ selon que le photon à été émis vers le récepteur (+) ou dans le sens opposé (-). Ainsi nous avons que la longueur d'onde est plus courte dans la direction de propagation λ_+ que dans la direction opposée λ_-. On trace alors la quantité $\Delta\lambda = (\lambda_+ + \lambda_-)/2 - \lambda_\alpha$ en fonction de v/c (on fait varier la ddp). Cela permet d'éliminer l'effet Doppler du premier ordre puisque

$$\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda_\alpha}{2}\left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{2c^2} + 1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{2c^2}\right) - \lambda_\alpha = \frac{\lambda_\alpha v^2}{2c^2} \tag{3.32}$$

L'expérience met bien en évidence une parabole de coefficient $0,498 \pm 0,025$.

L'effet Doppler (surtout doté des corrections relativistes) joue un effet significatif en cosmologie. C'est un moyen efficace pour déterminer la vitesse de dérive des galaxies où des étoiles de la Terre. En générale on se rend compte que le spectre d'émission des étoiles lointaines est décalé vers le rouge. L'idée consiste alors à identifier les raies d'émission d'un élément (par exemple l'hydrogène) en fonction de la valeur de leur rapports (nous rappelons que λ_1/λ_2 est indépendant du référentiel), puis d'utiliser la valeur connue pour la longueur d'onde au repos d'une raie afin de calculer la vitesse de dérive de l'étoile par rapport à la Terre. Dans le cas de quasars, on peut même observer des vitesses v de dérive radiale telles que $(\lambda'_\alpha - \lambda_\alpha)/\lambda_\alpha = 2$ pour la raie α de la série de Lyman ($\lambda_\alpha = 121,6nm$), ce qui donne

$$\frac{\lambda'_\alpha}{\lambda_\alpha} = 3 = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \Rightarrow v \simeq 0,8c! \tag{3.33}$$

3.6 Invariance de l'intervalle

Quand on trouve une transformation des coordonnées, il est toujours intéressant de construire des quantités invariantes sous ces transformations. Typiquement, c'est ce que l'on fait en géométrie euclidienne où la distance entre objet $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est un invariant alors que les coordonnées d'un objet le long de chacun des axes dépendent du choix de l'orientation de ces axes. La transformation de Lorentz est une transformation des coordonnées qui relie les coordonnées d'un événement dans $\mathcal{R}$ aux coordonnées du même événement mais telles qu'elles sont vue par un observateur appartenant à un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. Ainsi si nous exhibons une telle quantité invariante cela signifierait que cette quantité a une réalité physique en soit puisque sa valeur est *indépendante* de celui qui fait l'observation. Le fait de chercher un tel objet invariant peut paraître assez naturel dans la mesure où imposer la constance de la lumière dans tout référentiel est une sorte de contrainte. Or en générale, toute contrainte en physique se traduit par une diminution du nombre de variables indépendantes. On peut donc s'attendre à ce qu'il existe une relation entre l'intervalle de temps Δt et d'espace Δx qui sépare deux événements. Nous connaissons déjà une quantité invariante dans le cas du photon. Pour une telle particule, $c\,|\Delta t| = |\Delta x|$. Ici nous avons pris soin de placer les valeurs absolues pour prendre en compte la direction possible du mouvement du photon. Ainsi $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ semble être un bon candidat.

Ainsi soient deux événements 1 (t_1, x_1) et 2 (t_2, x_2) :

$$(\Delta s_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad \text{avec} \quad \Delta t = t_1 - t_2 \quad \text{et} \quad \Delta x = x_1 - x_2\ . \tag{3.34}$$

est bien invariante sous les transformations de Lorentz. $(\Delta s_{12})^2$ s'appelle l'intervalle. Á priori il est nécessaire de distinguer trois cas de figure selon que $(\Delta s_{12})^2 < 0$, $(\Delta s_{12})^2 = 0$ ou encore $(\Delta s_{12})^2 > 0$.

• $(\Delta s_{12})^2 > 0$: intervalle de type temps.

Clairement, il y a une relation de causalité entre 1 et 2 puisqu'un signal qui se propage à la vitesse de la lumière et issu de 1 arrivera en x_2 *avant* que l'événement 2 s'est produit. 1 est donc une cause potentielle de 2. Dans le cas d'intervalles de type temps, il existe toujours un référentiel où les événements 1 et 2 se passent au même endroit mais à des instants différents. Une telle façon de voire les choses permet clairement la précédente interprétation causale.

exercice 3.3 *Montrer cette affirmation.*

Solution :

Quitte à faire une rotation d'espace nous supposons $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$. De même, quitte à faire une translation nous supposons $x_1 = 0$ et $t_1 = 0$. Pour trouver un référentiel où les deux phénomènes se passent au même endroit nous cherchons $v < c$ tel que $x_2 - vt_2 = 0$, *ie* $v = x_2/t_2$. Puisque $c^2t_2^2 - x_2^2 > 0$ nous aurons $v^2 < c^2$, donc un telle vitesse est bien définie. On vérifie qu'alors $t'_2 = \gamma\left(t_2 - vx_2/c^2\right) = \gamma t_2\,(\Delta s_{12})^2 \neq 0$.

Dans ce cas $(\Delta s_{12})^2$ s'interprète comme le carré du temps propre (en unités de longueur) qui sépare les deux événements. □

• $(\Delta s_{12})^2 < 0$: intervalle de type espace.

Dans ce cas il n'y a aucune relation de causalité possible entre 1 et 2. En effet, il existe un référentiel où les deux événements se passent *simultanément*, mais à des endroits différents.

exercice 3.4 *Montrer cette affirmation.*

Solution :

En effet, avec les conventions précédentes nous avons $t_2' = \gamma\left(t_2 - vx_2/c^2\right)$. On devrait donc avoir $v = c^2 t_2/x_2$ Mais on a $|t_2/x_2| < c$, ce qui conduit bien à $|v| < c$. Dans ce cas, les deux événements sont séparés de $x_2' = \gamma\,(x_2 - vt_2) = -x_2^{-1}\gamma\,(\Delta s_{12})^2 \neq 0$.

Ainsi $(\Delta s_{12})^2$ de type espace s'interprète comme l'opposé du carré de la longueur propre qui sépare deux événements simultanés. □

• $(\Delta s_{12})^2 = 0$: intervalle de type nul.

Dans ce cas nous avons deux événements qui, dans un référentiel se passent au même endroit et au même moment. Ce qui ne veut pas dire que dans d'autres référentiels il auront lieu au même moment et du même endroit. Cela peut-être le départ du photon du soleil et son arrivé sur Terre par exemple.

Dans un quelconque référentiel inertiel position spatiale et temporelle d'un photon sont reliées par $ct\vec{u} = \vec{r}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur d'onde du photon. Ainsi, dans tout référentiel nous avons $\Delta s_{12} = 0$ pour tout événement 1 et 2 appartenant à la ligne d'univers du photon. Ainsi, le photon a une vision assez "bizarre" du monde. Sa durée de vie est infiniment petite et, dans sa direction de propagation l'univers a la forme d'un énorme pancake. Heureusement qu'Albert aimait les crêpes à la folie.

4 Élements de dynamique relativiste

Dans cette section nous tenterons de développer une formulation relativiste de la dynamique. Nous commencerons par introduire des notations convenables pour mener les calculs. Puis nous argumenterons une modification de la définition de l'impulsion et de l'énergie d'une particule de sorte à avoir une conservations de l'énergie impulsion dans *toute* interaction. Alors qu'en relativité classique, les repas n'étaient pas copieux et tantôt c'était fromage ou dessert, en relativité on en sort toujours le ventre plein, c'est fromage et dessert. L'un ne peut exister sans l'autre.

4.1 Quadrivecteurs

En mécanique classique, nous sommes fort habitués à manipuler des vecteurs. Dans diverses situations cela permet de simplifier le problème en raison d'une vision géométrique plus simple. De plus, les vecteurs ont une interprétation indépendante du référentiel, où plus exactement du choix d'un repère dans un référentiel donné. Dans la mesure où le temps est absolu en mécanique classique, nous manipulons des vecteurs dans un espace à trois dimensions, l'espaces de configurations. Toute loi additionnelle scalaire est donc transcrite séparément de son analogue vectoriel. Un exemple typique sont les lois de conservation dans une collision. L'invariance d'une interaction par translation spatiale impose la conservation de l'impulsion classique alors que l'invariance par translation dans le temps impose la conservation de l'énergie totale. Pour une diffusion élastique, cette dernière entraîne la conservation de l'énergie cinétique. Nous nous retrouvons donc avec deux types de lois de conservation

$$E_c^{\text{in}} = E_c^{\text{out}} \quad \text{et} \quad \vec{p}^{\,\text{in}} = \vec{p}^{\,\text{out}} \,, \tag{4.1}$$

une scalaire et une vectorielle. Nous avons notés "in" les quantités totales relatives aux particules entrantes et "out" les quantités totales relatives aux particules sortantes. Précisons qu'en mécanique classique la conservation de l'impulsion a toujours lieu alors que celle de l'énergie "cinétique" pas toujours. Nous verrons que ce n'est plus le cas en relativité restreinte puisque la conservation de l'une entraîne nécessairement celle de l'autre. Cela résultera du caractère quadri-dimensionnel de l'espace en relativité restreinte.

Nous avons déjà présenté diverses observations expérimentales qui montrent que la relativité aboli le caractère absolu du temps. Ils est donc nécessaire de garder la trace du temps dans un changement de référentiel inertiel. Les événements doivent donc être repérés par leurs coordonnées de temps et d'espace $(ct, \vec{r})$. Il est convenable de regrouper toutes ces quantitées en un unique vecteur $\mathbf{x}$ dont les quatre composantes sont x^μ, $\mu = 0, \ldots, 3$ avec $x^0 = ct$ et $x^i = \vec{r}^i$, $i = 1, \ldots, 3$. Les composantes de $\mathbf{x}$ se transforment sous la transformation de Lorentz générale (boosts plus rotations) en passant d'un référentiel inertiel à l'autre. Cette transformation peut être notée $\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right)$ de sorte que

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ . \tag{4.2}$$

Ici nous avons appliqué la condition de sommation sur deux indices qui se répètent lorsque l'un d'eux est en haut (coordonnées d'un vecteur) et l'autre en bas (coordonnées d'une forme linéaire). Le produit scalaire donne la distance dans un espace Euclidien. C'est une quantité invariante. Puisque nous avons mis en évidence le fait que l'intervalle est une quantité invariante en dynamique relativiste, il convient d'introduire un produit scalaire compatible avec l'intervalle qui donnerait la longueur d'un vecteur. On pose donc

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \quad \text{avec} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

definit

exercice 4.1 *Vérifier que c'est bien une quantité invariante sous les transformations de Lorentz*

On notera des fois $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, ce qui permet d'écrire les produits entre vecteurs de manière plus compacte.

Nous connaissons déjà d'autres quadri-vecteurs comme celui de la lumière $k^\mu = \left(\omega/c, \vec{k}\right)$. Il a la particularité d'être de longueur nul $k^\mu k_\mu = 0$, et, comme nous l'avons vu, il se transforme bien de manière invariante sous les transformations de Lorentz. De plus, nous avons déjà rencontré le produit scalaire (4.3). En effet, la phase d'une onde plane monochromatique s'écrit $k_\mu x^\mu$.

definition produit scalaire pseudo-euc

Essayons de construire un équivalent quadri-vectoriel du vecteur vitesse. Cet object doit se transformer sous les transformations de Lorentz comme le vecteur position. Clairement, à la vue des lois de transformations dans un référentiel donné, la vitesse dans un référentiel n'est pas un bon candidat ! Rappelons qu'une vitesse est une variation de la position par rapport à un accroissement de temps. Comme le quadri-vecteur $\mathbf{x}$, et donc son accroissement, se transforme déjà comme voulu sous les transformations de Lorentz, pour obtenir une vitesse il faudrait diviser cet accroissement par un quadri-scalaire, c'est-à-dire une quantité invariante dans tout référentiel inertiel. Nous avons mis en évidence une telle quantité : l'intervalle. Á vrai dire, pour une particule $\mathrm{d}s^2$ s'interprète comme c^2 fois le carré du temps propre de la particule. Le temps propre semble donc le seul temps raisonnable pour définir une vitesse. Ainsi, nous aurons que

$$\mathbf{U} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u) \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \left(\gamma(u)\, c, \gamma(u)\, u_x, \gamma(u)\, u_y, \gamma(u)\, u_z\right) \ \text{avec} \ \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = u_i \ . \tag{4.4}$$

Ici, u_i est la i^{eme} composante de la vitesse dans $\mathcal{R}$.

exercice 4.2 *Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que* **U** *se transforme bien comme un quadri-vecteur sous les transformations de Lorentz. Pour cela, on pourra commencer par dériver la loi de composition des paramètres* $\gamma(v) = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ *:*

$$\gamma(u) = \gamma(v)\,\gamma(u')\left[1 + vu'_x/c^2\right] . \tag{4.5}$$

Où u est la vitesse de la particule dans $\mathcal{R}$ *et* u' *celle dans* $\mathcal{R}'$ *en translation le long de Ox à v.*

Solution :

Nous avons, en raison de l'invariance du temps propre que

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma(u)} = \frac{\mathrm{d}t'}{\gamma(u')} \quad ie \quad \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \tag{4.6}$$

Le rapport $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$ a déjà été calculé lors de la preuve de la loi de transformation des vitesses, nous obtenons donc le résultat voulu. Le reste est un calcul direct.

Le vecteur vitesse **U** possède une propriété sympathique par rapport à sa norme

$$\mathbf{U}.\mathbf{U} = U^\mu U_\mu = \gamma^2(u)\left(c^2 - u^2\right) = c^2 . \tag{4.7}$$

Sa norme est donc constante dans tous les référentiels inertiels (comme voulu par sa construction même) et vaut c^2. Par analogie avec la mécanique classique, nous définissons le quadi-vecteur énergie-impulsion de la particule par $\mathbf{P} = m\mathbf{U} \equiv (\mathcal{E}/c, \vec{p})$. Nous discuterons plus loin l'interprétation des composantes de ce vecteur. Pour l'instant, on se contentera de remarquer qu'elles sont bien homogènes à une impulsion.

Si l'on introduit l'analogue du vecteur accélération

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}, \quad \text{alors } \mathbf{U}.\mathbf{U} = c^2 \Rightarrow \mathbf{U}.\mathbf{A} = 0 . \tag{4.8}$$

En relativité restreinte la quadri-accélération est orthogonale à la vitesse (attention, ce n'est pas une relation d'orthogonalité Euclidienne. Ne pas en déduire que la composante espace de l'accélération est orthogonale à la composante spatiale de la vitesse !)

exercice 4.3 *Dériver les composantes de l'accélération dans un référentiel inertiel quelconque* $\mathcal{R}$

Solution :

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(u)(c,\vec{u}) = \gamma^2(u)(0,\vec{a}) + -\frac{1}{2} \times -2\frac{\vec{u}.\vec{a}}{c^2}\gamma^4(u) \times (c,\vec{u}) \\ = \gamma^2(u)\left(\gamma^2(u)\frac{\vec{u}.\vec{a}}{c}, \vec{a} + \vec{u}\gamma^2(u)\frac{\vec{u}.\vec{a}}{c^2}\right)\end{aligned} \tag{4.9}$$

Par le même procédé nous pouvons construire une foule d'autres 4-vecteurs. Nous allons encore discuter la construction d'un autre, le 4-vecteur courant **J**. Celui-ci intervient naturellement en électromagnétisme relativiste. Les composantes de $\mathbf{J} = \left(\rho c, \vec{j}\right)$ s'identifient à la densité de charges et à celle du courant, à une constante proportionnelle prés. Pour nous en donner une idée, considérons une densité de charges immobiles dans un certain référentiel inertiel $\mathcal{R}$. On suppose de plus qu'elle est située dans un petit voisinage $\mathrm{d}^3\vec{r}$ du point $\mathcal{M}(t, \vec{r})$. On sait que la charge au voisinage de $\mathcal{M}$ doit être un invariant, *ie* $\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}^3\vec{r}$ ne dépend pas du référentiel. On a donc l'égalité, pour tout référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme à $\vec{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$,

$$\rho'(t', \vec{r}')\,\mathrm{d}^3\vec{r}' = \rho(t, \vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} \Rightarrow \rho'(t', \vec{r}') = \gamma(v)\,\rho\left(t(t', \vec{r}'), \vec{r}(t', \vec{r}')\right) . \tag{4.10}$$

ce qui vient du fait que dans $\mathcal{R}'$, l'élément de volume $\mathrm{d}^3\vec{r}$ a été contracté d'un facteur γ^{-1}. Alors, la densité de courant dans $\mathcal{R}'$ est $\vec{j}(t', \vec{r}') = \rho'(t', \vec{r}')\,\vec{v}$. Ainsi, pour une particule ponctuelle de charge e, le vecteur densité de courant prend la forme $\mathbf{J}(\vec{r}, t) = e\mathbf{U}\delta(\vec{r} - \vec{s}(t))$, où $\mathbf{U}$ est le 4-vecteur vitesse et $\vec{s}(t)$ sa position. Pour un amas de particules il suffit de sommer sur les différentes particules.

4.2 Étude du mouvement uniformément accéléré

Nous savons que les lois de la relativité restreinte doivent donner celles de la mécanique classique dans la limite des faibles vitesses. Ainsi, pour des faibles vitesses, le principe fondamental de la dynamique doit être pratiquement vrai. Considérons donc le Faucon millenium qui subit dans son référentiel propre instantané [9] une accélération constante. Nous savons que le principe fondamental de la dynamique doit être rigoureusement vrai dans le référentiel tangent instantané $\mathcal{R}'$ au référentiel propre du vaisseau. En effet, ce dernier y a une vitesse nulle ! Puisqu' il y subit une force constante $m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ alors les équations du mouvement sont

$$a'_x = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'} = g \text{ et } \vec{a}_\perp = \vec{0} \text{ aveclaconditioninitiale} u'_x = 0 \tag{4.11}$$

Nous allons en déduire les équations du mouvement dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ où la faucon se meut. Dans le référentiel tangent instantané, le 4-vecteur accélération vaut

$$\mathbf{A} = (0, g, 0, 0) \tag{4.12}$$

Puisqu'il se transforme comme un 4-vecteur sous les transformations de Lorentz par passage d'un référentiel galiléen à un autre, sa forme dans $\mathcal{R}$ en translation rectiligne uniforme à $-u\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$, où $\vec{u}$ est la vitesse du Faucon dans $\mathcal{R}$ est

$$\mathbf{A} = \left(\frac{u}{c}\gamma(u)\,g, \gamma(u)\,g, 0, 0\right) = \gamma^2(u)\left(\gamma^2(u)\,\frac{ug}{c}, a + u\gamma^2(u)\,\frac{ua}{c^2}\right) . \tag{4.13}$$

D'où $a_x = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t = \gamma^{-3}(u)\,g$. On intègre cette équation en séparant les variables

$$\frac{\mathrm{d}u}{(1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} = g\mathrm{d}t \Rightarrow c\int_0^{\frac{v}{c}} \frac{\mathrm{d}y}{(1 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = gt \tag{4.14}$$

après avoir intégré entre $t = 0$ et l'instant t où la vitesse de la particule selon Ox est u. Nous avons ensuite posé $y = u/c$. On change de nouveau de variable $y = \tanh(\phi)$. D'où $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\phi/\cosh^2\phi$ et $\left(1 - \tanh^2\phi\right)^{\frac{3}{2}} = 1/\cosh^3\phi$. D'où, en posant $\phi = \tanh^{-1}(v/c)$,

$$\frac{gt}{c} = \int_\phi^0 \cosh\phi'\mathrm{d}\phi' = \sinh\phi . \tag{4.15}$$

9. Le référentiel propre instantané ou encore référentiel tangent instantané est par définition le référentiel galiléen tel que la particule en accélération y ait une vitesse instantanée nulle pendant un très bref instant. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ où se meut la particule, le référentiel tangent instantané à t correspond au référentiel galiléen qui se déplace à $\vec{v}(t)$ par rapport à $\mathcal{R}$. Ici $\vec{v}(t)$ est la vitesse de la particule dans $\mathcal{R}$ à l'instant t.

On remonte ensuite à x *via* $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = c\theta\phi\mathrm{d}\phi = c^2 g^{-1} \sinh\phi\mathrm{d}\phi$. Soit,

$$\frac{gx}{c^2} + C = \cosh\phi \Rightarrow \frac{gx}{c^2} + 1 = \cosh\phi \tag{4.16}$$

en utilisant qu'à $t = 0$ on a $\phi = 0$ et $x = 0$. Nous en déduisons que la ligne d'univers du vaisseau est une hyperbole :

$$\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1 \Rightarrow \left(\frac{gx}{c^2} + 1\right)^2 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 = 1 \quad \text{soit encore} \quad \left(x + \frac{c^2}{g}\right)^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{g^2}\ . \tag{4.17}$$

Ce-ci est à mettre en contraste avec le mouvement prédit par la mécanique classique où la ligne d'univers de la particule est un parabole d'axe Ox. En particulier, nous voyons qu'un signal lumineux issu à $t = 0$ d'une position $x < -c^2/g$, n'arrivera jamais à rattraper le Faucon. Du moins si celui-ci continue à accélérer indéfiniment.

exercice 4.4 *Utiliser ces calculs pour discuter de manière plus quantitative le paradoxe des jumeaux de Langevin. On supposera que le voyage se fait de l'orbite terrestre vers le système Wolf 359 qui est situé à environ 7,8 années lumière de la Terre. Rappelons qu'il faudra prendre en compte l'effet de l'accélération puis de la décélération pour l'arrivée dans Wolf 359. On calculera le temps propre du frère qui voyage.*

4.3 La particule libre

Nous voulons décrire le mouvement d'une particule libre. Le cadre naturel pour faire cela est d'écrire l'action d'une particule libre puis de lui appliquer le principe de moindre action. Les possibilités du choix d'une action sont en fait très restreintes. L'action d'une particule libre doit être la même dans tous les référentiel inertiels. Elle ne peut donc que faire intervenir des quantités invariantes dans tous les référentiels inertiels. L'action doit donc être un 4-scalaire. Le seul 4-scalaire que nous avons à notre disposition est le temps propre de la particule (ou de manière équivalente son intervalle). On pourrait tenter de construire d'autre quadri-scalaires à partir de produits scalaires de 4-vecteurs associées à la particule : sa vitesse $\mathbf{U}$ où encore son accélération $\mathbf{A}$. L'utilisation de cette dernière reste cependant douteuse en raison du fait qu'un Lagrangien classique ne dépend que des positions et vitesse. On l'oublie donc. D'autre part puisque $\mathbf{U}.\mathbf{U} = c^2$, un tel terme sera toujours constant dans tout référentiel. Nous allons donc prendre une action qui, dans le référentiel fixe de la particule est donnée par l'intégrale de son temps propre $\mathrm{d}\tau$. Clairement, elle aura la même valeur dans tous les autres référentiels inertiels. La constante de proportionnalité fait intervenir la masse de la particule m ainsi que c :

$$S\left[x^\mu\right] = -mc\int_a^b \mathrm{d}s = -mc\int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu} \tag{4.18}$$

Où la particule est en x^μ_a à τ_a et en x^μ_b à τ_b. Nous avions ici paramètré la position de la particule x^μ par son temps propre. On fait une variation de la trajectoire de la particule $x^\mu(\tau) \mapsto x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$. On a donc, en utilisant $c\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s$,

$$\begin{aligned} S\left[x^\mu + \delta x^\mu\right] &= -mc\int_a^b \mathrm{d}s\left(1 + \frac{1}{2}\times 2\frac{\mathrm{d}x^\mu}{c\mathrm{d}\tau}\delta\frac{\mathrm{d}x_\mu}{c\mathrm{d}\tau}\right) && (4.19)\\ S\left[x^\mu + \delta x^\mu\right] - S\left[x^\mu\right] = \delta S &= -m\int_a^b U^\mu \frac{\mathrm{d}\delta x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau && (4.20)\\ &= -m\left[\mathbf{U}.\delta\mathbf{x}\right]_a^b + m\int_a^b \delta x_\mu \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} && (4.21)\end{aligned}$$

Ainsi le premier terme s'en va en raison du fait que les point de départ et d'arrivée sont fixes, et le deuxième terme doit s'annuler au minimum de S pour toute variation de la trajectoire δx^μ. Les équations du mouvement sont donc

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \ . \tag{4.22}$$

Nous retrouvons donc une analogie très forte avec une particule libre classique. D'autant plus que si nous supposons que la particule se déplace à faible vitesse dans $\mathcal{R}$ alors $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau = c\gamma^{-1}(v)\,\mathrm{d}t$ et $\gamma^{-1}(v) \simeq 1 - v^2/2c^2$. Ainsi dans $\mathcal{R}$, au premier ordre non-trivial et non-nul en v/c, le Lagrangien de la particule vaut $-mc^2 - mv^2/2$. Nous retrouvons donc bien le résultat classique. C'est d'ailleurs une condition nécessaire car la relativité restreinte doit englober la mécanique classique comme cas limite.

Cet exemple permet déjà de se convaincre que le 4-vecteur $\mathbf{P}$, joue bien le rôle d'analogue relativiste de l'impulsion. De même à la limite classique $v/c \to 0$, la composante temporelle de $\mathbf{P}$ tend vers $mc + mv^2/2c$ (ce qui, à un facteur numérique prés représente l'énergie classique de la particule) alors que sa composante spatiale tend vers $m\vec{v} = \vec{p}_{\text{class}}$.

On voit donc bien que ce 4-vecteur donne une bonne limite classique pour l'énergie cinétique ainsi que pour l'impulsion. On montre que ce vecteur s'interprète donc bien comme l'équivalent relativiste de la quantité de mouvement (pour la partie spatiale) et de l'énergie (pour la partie temporelle). Notamment nous retrouvons la propriété bien voulue qui limite le fait que la vitesse de la particule atteigne c. En effet, l'inertie augmente de plus en plus lorsque la vitesse de la particule s'approche de c.

Pour conclure, précisons l'existence d'une relation simple entre "énergie" et impulsion. C'est la célèbre relation

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \ . \tag{4.23}$$

exercice 4.5 *S'en convaincre !*

Solution : On a d'une part

$$\mathcal{E}^2 = \frac{m^2c^4}{1 - v^2/c^2} \quad \text{et d'autre part} \quad m^2c^4 + \vec{p}^2 = m^2c^4 + \frac{m^2v^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^4}{1 - v^2/c^2} \ . \quad \square \tag{4.24}$$

4.4 Les lois de conservation

Après nous être familiarisé avec le formalisme des quadri-vecteurs, il est temps de passer aux lois de conservation. Nous savons que l'invariance du Lagrangien sous les translations d'espace implique la conservation de l'impulsion classique et, de même, l'invariance du Lagrangien sous les translations temporelles entraîne la conservation de l'énergie. Cette propriété reste vraie dans le cas relativiste. On montre que la 4-impulsion est toujours conservée.

Nous avions déjà utilisé l'hypothèse de l'isotropie de l'espace ce qui entraîne l'invariance des interactions sous les translations. Exactement comme en mécanique classique cela entraîne la conservation de la partie spatiale de l'impulsion

$$\Sigma_\alpha m_\alpha \gamma(v_\alpha)\,\vec{p}_\alpha = \Sigma_\beta m_\beta \gamma\left(v_\beta\right)\vec{p}_\beta \tag{4.25}$$

Ainsi la composante spatiale de la 4-impulsion est conservée. D'où, le 4-vecteur énergie-impulsion $P^{\text{in}}_{\text{tot}} - P^{\text{out}}_{\text{tot}}$ a sa composante spatiale nulle dans tous les référentiels. Cela entraîne que sa composante temporelle est nulle aussi. Sinon, on peut toujours appliquer un boost de sorte que, dans le nouveau référentiel inertiel la particule ait une composante spatiale non nulle

exercice 4.6 *Le faire*

Donc l'isotropie de l'espace entraîne la conservation globale de la 4-impulsion. En fait cela aurait été équivalent d'imposer l'invariance des interactions par translation dans le temps (car cela impose la conservation de l'énergie).

Ainsi, il n'y a pas de distinction entre collision élastique et inélastique en relativité restreinte : dans les deux cas il y a conservation de la 4-impulsion. Nous allons maintenant dériver quelques conséquences de cette loi de conservation.

5 Les collisions

5.1 Le référentiel de centre de masse

Nous commençons par définir le référentiel du centre de masse. Par définition c'est le référentiel où la composante spatiale de l'impulsion totale du système est nulle. Pour cette raison, ce référentiel est fort pratique pour étudier les collisions. En effet, les équations de conservation ont une forme simple dans ce référentiel et, en général, il est plus facile de les résoudre.

Nous allons montrer que ce référentiel existe. Soit un ensemble de particules $A_1, \dots, A_n$ de 4-impulsions respectives $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$. On pose $\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{P}_i = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$. Nous commençons par montrer que $\mathbf{P}$ est du genre temps, *ie* $\mathbf{P}.\mathbf{P} > 0$. Cela est vrai pour une particule, on considère deux particules α et β, et on se place dans le référentiel propre d'une d'elle, disons β. Un tel référentiel existe toujours puisque les lignes d'univers d'une particule sont du genre temps. Alors on a $\mathbf{P}c = \left(\mathcal{E}_\alpha + m_\beta c^2, \vec{p}_\alpha\right)$. D'où $\mathbf{P}.\mathbf{P}c^2 = \mathcal{E}_\alpha^2 + 2\mathcal{E}_\alpha m_\beta c^2 + m_\beta^2 c^4 - \vec{p}_\alpha^{\,2} c^2$. Mais puisque $c^2 \mathbf{P}_\alpha^2 = \mathcal{E}_\alpha^2 - \vec{p}_\alpha^{\,2} c^2 = m_\alpha^2 c^2 > 0$ et qu'une masse et une énergie (conservation de la causalité par la transformation de Lorentz) sont positives, le résultat s'en suit pour deux particules. Le reste suit par une récurrence triviale.

Soit un référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ qui se déplace dans la direction de $\vec{p}$ à la vitesse v. Alors nous avons

$$\vec{p}\,' = \gamma(v)\left(\vec{p} - v\mathcal{E}/c^2 \frac{\vec{p}}{|p|}\right) \qquad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \gamma(v)\left(\mathcal{E} - v\,|p|\right) . \tag{5.1}$$

Puisque $\mathbf{P}^2 > 0$ nous avons $\mathcal{E} > c\,|p|$, d'où $v = c\,|p|\,c/\mathcal{E} < c$. On se place donc dans un tel référentiel. C'est bien le référentiel du centre de masse puisque nous y avons $\mathbf{P} = \left(\mathcal{E}_{CM}/c, \vec{0}\right)$. De plus, une inspection directe donne que

$$\mathcal{E}_{CM} = \frac{1}{\sqrt{1 - (|p|\,c/\mathcal{E})^2}} \times \frac{1}{\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}^2 - \vec{p}^{\,2} c^2\right) = c\sqrt{\mathbf{P}^2} . \tag{5.2}$$

5.2 Énergie seuil d'une réaction

On considère une réaction

$$A_1 + \cdots + A_n \to B_1 + \cdots + B_k \tag{5.3}$$

On cherche un critère pour qu'elle soit possible. Clairement, si le référentiel de centre de masse existe (référentiel où la composante spatiale de l'impulsion totale est nulle), pour produire les particules $B_1, \dots, B_k$, il faut au moins être capable de les produire au repos. Ainsi, dans le référentiel du centre de masse il faut que l'énergie totale soit supérieure à $Q = \Sigma_\ell m_{B_\ell} c^2$. C'est-à-dire, à la vue des résultats du paragraphe précédent,

$$\left(\Sigma_\ell m_{B_\ell} c^2\right) < c\sqrt{\mathbf{P}^{\rm in}.\mathbf{P}^{\rm in}} \tag{5.4}$$

Nous allons être un peu plus explicite par rapport à ce résultat. Nous allons voire que tous le référentiels ne sont pas équivalents par rapport à la possibilité d'une réaction. Considérons une production d'une paire proton-antiproton à la suite d'une collision proton-proton. Ce fut ainsi que fut observé pour la première fois l'antiproton au Bevatron (Bev pour Bilion of eV, ou encore GeV) de Berkley en 1955 par Chamberlain *et al*. La réaction est la suivante

$$p + p \to p + p + p + \overline{p} \ . \tag{5.5}$$

C'était une réaction sur cible fixe, ce qui veux dire qu'on accélérait un faisceau d'hydrogène ionisé au moyen d'un jeu judicieux de champ électrique et magnétique (à Berkley on travaillait avec un synchrotron) et que ce faisceau rentrait en collision avec une cible fixe, par exemple du cuivre (qui contient bien des protons). Ici nous supposerons pour simplifier que la cible est un proton. Alors, dans le référentiel du laboratoire, nous avons

$$\mathbf{P}^{\text{in}}.\mathbf{P}^{\text{in}} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P_2})^2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + 2\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_2 = m^2c^2 + m^2c^2 + 2\mathcal{E}m \ , \tag{5.6}$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie du proton incident, et m la masse d'un proton (ou anti-proton). En appliquant la condition d'énergie seuil, nous arrivons à

$$16m^2c^4 < 2m^2c^4 + 2\mathcal{E}m \Rightarrow \mathcal{E} > 7mc^2 = 6,6\text{Gev} \tag{5.7}$$

Cependant, si la réaction se fait entre deux faisceaux de protons contra-propageant, alors le référentiel du laboratoire est le référentiel du centre de masse. Nous avons alors $\mathbf{P}^{\text{in}}.\mathbf{P}^{\text{in}}c^2 = \left(2\mathcal{E}, \vec{0}\right)^2 = 4\mathcal{E}^2$, où $\mathcal{E}$ est l'énergie portée par chacun des protons contra-propageant. D'où,

$$16m^2c^4 < 4\mathcal{E}^2 \Rightarrow \mathcal{E} > 2mc^2 \ . \tag{5.8}$$

Ainsi, dans le référentiel de centre de masse, il faut fournir une énergie cinétique totale de $2mc^2$ (mc^2 pour chaque proton), soit juste ce qu'il faut pour produire les 4 particules au repos, alors que dans le référentiel de la cible cette énergie cinétique est trois fois plus importante puisqu'égale à $6mc^2$. Á puissance maximale d'accélération il y a donc intérêt de travailler avec des collisions contra-propageantes. Ainsi, on a plus d'énergie disponible pour la réaction. La contre-partie est que le nombre de réactions est diminué d'un facteur $10^4 - 10^6$ par rapport à la cible fixe pour des raisons de faibles densités des faisceaux.

exercice 5.1 *La théorie quantique relativiste de Dirac (1928) prévoit la violation du nombre de particules (comme cela à déjà été observé dans la nature). En particulier elle prévoit l'existence de l'antielectron souvent appelé positron. Cette particule a les mêmes caractéristiques que l'électron et, par couplage électromagnétique, elle peut s'annihiler avec un autre électron. Le produit peut être d'autres paires* e^+/e^- *où des photons. Nous rappelons que le positron fut découvert en 1932 à partir des traces du rayonnement cosmique laissé dans une chambre de Wilson. Monter que la réaction* $e^+ + e^- \to \gamma$ *est impossible.*

Solution :
On écrit la conservation de l'énergie impulsion dans le référentiel du centre de masse e^+/e^-.

5.3 Dans la peau de Litvienko

En 2006, pour avoir désobéi et dévoilé les secrets des méandres du pouvoir Russe, Litvienko s'est fait injecter du Polonium 210 dans son sang. Cet élément radioactif s'est progressivement désintégré dans son corps, jusqu'à causer la mort. Nous avons

$${}^{210}_{84}\text{Po} \to {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He} \ . \tag{5.9}$$

L'énergie libérée par cette désintégration est de $5,407$Mev. Nous rappelons que c'est la différence des énergies de masse entre les particules pères et fils. Nous nous proposons de déterminer l'énergie emportée par chaque particule α dans le corps de l'ex-directeur de la FSB. On peut essentiellement considérer que le Polonium est immobile. Nous écrivons la conservation de la 4-impulsion. Alors

$$\vec{p}_\alpha = -\vec{p}_{Pb} \quad , \quad \sqrt{p_\alpha^2 c^2 + m_\alpha^2 c^4} + \sqrt{p_{Pb}^2 c^2 + m_{Pb}^2 c^4} = m_{Po} c^2 \tag{5.10}$$

En bon physiciens, nous pouvons procéder à des simplifications. Puisque les masses mises en jeu sont d'au moins 1 Gev alors que l'énergie de désintégration n'est que de 5 MeV, il est clair que nous pouvons effectuer une simplification en ne gardant que les termes du deuxième ordre en p_α/m. Dans les deux cas, l'équation n'a qu'un nombre discret de solution. Ainsi, dans une désintégration à deux corps, les impulsions et énergies des particules émises sont fixés. Le seul arbitraire porte sur la direction d'émission.

5.4 Effet Compton

Nous allons maintenant discuter un effet un peu plus subtile des lois de conservations à travers une réaction $2 \to 2$. Nous allons nous pencher sur l'effet Compton. C'est le nom que porte la changement de la longueur d'onde d'un photon lors d'une diffusion sur un électron dans un cristal. En général, cela se produit pour des photons dans le domaine des rayons X (énergies de l'ordre de 20 keV) qui diffusent sur des électrons des couches externes atomiques. Á la vue des énergies du photon, nous pouvons clairement négliger le mouvement de l'électron dans le référentiel du laboratoire, (ce qui revient à négliger que son énergie de liaison). Alors soit θ l'angle formé entre les vecteurs d'ondes incident et sortant du photon. Nous avons alors, dans le référentiel du laboratoire

$$\mathbf{P}^{\text{in}}_{\text{tot}} = \underbrace{(h\nu/c, \hbar k, 0, 0)}_{\mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma} + \underbrace{(mc, 0, 0, 0)}_{\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-}} \qquad \mathbf{P}^{\text{out}} = \underbrace{(h\nu'/c, \hbar k' \cos\theta, \hbar k' \sin\theta, 0)}_{\mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma} + \underbrace{\left(E/c, p_x, p_y, 0\right)}_{\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-}} \tag{5.11}$$

Nous allons ici introduire les variables de Mandelstam et en tirer profit. Ces variables sont cruciales pour l'étude d'une réaction $2 \to 2$. Elles permettent de caractériser les variables dynamiques en termes de quantités invariantes par changement de référentiel Galiléen. Traditionnellement elles sont notées

$$s = \left(\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-} + \mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma\right)^2 = \left(\mathbf{P}^{\text{out}}_{e_-} + \mathbf{P}^{\text{out}}_\gamma\right)^2 \tag{5.12}$$

$$t = \left(\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-} - \mathbf{P}^{\text{out}}_{e_-}\right)^2 = \left(\mathbf{P}^{\text{out}}_\gamma - \mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma\right)^2 \tag{5.13}$$

$$u = \left(\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-} - \mathbf{P}^{\text{out}}_\gamma\right)^2 = \left(\mathbf{P}^{\text{out}}_{e_-} - \mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma\right)^2 \tag{5.14}$$

Leur utilité vient du fait qu'elles ne dépendent pas du référentiel inertiel où on les calcule. Leur valeur numérique peut donc être déterminée dans le référentiel où une des quadri-impulsion a une forme simple, par exemple la particule correspondante est au repos.

exercice 5.2 *Soit une réaction plus générale* $1+2 \to 3+4$. *Définir les variables de Mandelstam correspondantes. Montrer que les trois variables ne sont pas indépendantes dans la mesure où*

$$s + t + u = \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right) c^2 \tag{5.15}$$

Ici nous utiliserons la variable t. Nous avons

$$\left(\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-} - \mathbf{P}^{\text{out}}_{e_-}\right)^2 = 2m^2c^2 - \mathbf{P}^{\text{out}}_{e_-}.\mathbf{P}^{\text{in}}_{e_-} = \left(\mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma - \mathbf{P}^{\text{out}}_\gamma\right)^2 = 0 - 2\mathbf{P}^{\text{out}}_\gamma.\mathbf{P}^{\text{in}}_\gamma \tag{5.16}$$

$$-2\left(\frac{h\nu h\nu'}{c^2} - \hbar k \hbar k' \cos\theta\right) = 2m^2c^2 - 2mcE/c \tag{5.17}$$

$$\frac{h^2 \nu\nu'}{c^2}\left(1 - \cos\theta\right) = m\left(E - mc^2\right) . \tag{5.18}$$

Nous avons utilisé que $\hbar k = p = h\nu/c$. Nous joignons à cette relation la conservation de l'énergie

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + E \quad \text{de sorte que} \quad h(\nu - \nu') = \frac{h^2\nu\nu'}{mc^2}(1-\cos\theta) \ . \tag{5.19}$$

Nous obtenons ainsi la formule pour la différence des longueurs d'ondes du photon incident et émis

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) \quad \text{avec} \quad \lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.10^{-11}\text{m} \ . \tag{5.20}$$

La très faible valeur de la longueur d'onde Compton limite l'observation de ce phénomène au cas de photons très énergétiques. Rappelons que la diffusion Compton fut observé pour la première fois par Compton (sic :)). En 1922, il observait alors la diffusion de rayons X monochromatiques sur du graphite. La diffusion de ces rayons par la maille cristalline donne accès à la transformée de Fourier de cette maille. Selon la valeur de l'angle d'observation on observe des pics. La lumière qui arrive sur ces pics a la même longueur d'onde que la lumière produite par la source (*cf* principes de la diffraction). Or Compton, en envoyant des rayon X à $\lambda = 0,708\mathring{A}$, observe à côté des pics issus de l'onde incidente, d'autres pics d'intensité plus faible et décalés vers les plus grandes longueurs d'ondes $\widetilde{\lambda} = \lambda + \delta\lambda(\theta)$ avec, par exemple, $\delta\lambda(\theta = \pi/2) = 0,022\mathring{A}$.

Remarquons aussi que la longueur d'onde de Compton donne l'ordre de grandeur pour la précision sur la mesure de la position d'une particule.

exercice 5.3 *Rechercher d'autres types de diffusions possibles de photons dans les cristaux et solides.*

exercice 5.4 *Traiter le cas où aucune des particules n'est un photon.*

5.5 Désintégration à trois corps : la découverte du neutrino.

Nous allons terminer ce cours par discuter l'effet d'une désintégration à trois corps. C'est ce qui a conduit à la découverte du neutrino. Ce dernier est une particule très légère, dont la masse est estimée à 2, 5eV pour le plus léger. Il n'interagit que *via* l'interaction faible, que qui rend sa détection directe très difficile. Celle-ci fut établie que très récemment, au moyen d'efforts titanesques (on détecte 20-40 particules dans 800 tonnes de substrat, a vous de faire le calcul).

Le neutrino est produit lors de désintégrations faibles. Par exemple

$$^{18}F \rightarrow ^{18}O + e^+ + \nu_e \quad \text{ou} \quad ^{60}\text{Co} \rightarrow ^{18}Ni + e^- + \overline{\nu}_e \tag{5.21}$$

On a vu que dans une réaction à deux corps, le module de l'impulsion et donc l'énergie des particules sortantes est fixé. Or dans les désintégrations $\beta^\pm$, on observe un taux de formation continu d'électrons/positrons entre l'énergie minimale et maximale disponible. Cela ne peut donc être une désintégration à deux corps. C'est en 1931 que Pauli propose que l'énergie manquante est emportée par une autre particule qui était invisible car elle interagissait peu.

Les désintégrations nucléaire mettent en jeu des énergies de l'ordre de quelques MeV. Á la vue de la masse des noyaux, nous pouvons donc supposer l'énergie de recul du noyau fils négligeable. Bien évidemment nous étudions la réaction dans le référentiel du centre de masse. Alors, la conservation de l'impulsion donne que le noyau fils prend l'impulsion de recul du mouvement de l'électron et du neutrino. Il ne reste que la conservation de l'énergie. Là, en posant $Q = \Delta Mc^2$ pour la différence des énergies de masse entre les noyaux père et fils, nous avons que

$$Q = \sqrt{p_{e_-}^2c^2 + m_{e_-}^2c^4} + p_{\overline{\nu}}c \tag{5.22}$$

Ici, à la vue des énergies mises en jeu, le neutrino se comporte comme une particule ultra-relativiste. En effet, $Q \gg m_{\overline{\nu}}c^2$!

Références

Simon [1] B.Simon ; Relativité restreinte.

Raymond [2] Relativité restreinte, cours délivré à l'ENS de Paris, accéssible en ligne sur http ://www.phys.ens.fr/spip.php ?article116

Feynman [3] R.P. Feynman ; Le cours de physique de Feynmann : Mécanique 2.