TD 07 – NP-Complétude (corrigé)

Pour ce TD, vous pourrez supposer que le problèmes **SAT**, **3-SAT**, **Clique** et **Vertex-Cover** sont NP-Complets.

(QuestionCours) Exercice 1. *Echauffement*

Soient P_1 et P_2 deux problèmes de décision, et supposons qu'on connaisse une transformation polynomiale (une réduction) de P_1 en P_2. Répondre aux sept questions suivantes avec un maximum de deux lignes de justification par question.

1. Si $P_1 \in$ P, a-t-on $P_2 \in$ P ?
   ☞ Non.
2. Si $P_2 \in$ P, a-t-on $P_1 \in$ P ?
   ☞ Oui.
3. Si P_1 est NP-complet, P_2 est-il NP-complet ?
   ☞ Non, car $P_2 \notin$ NP.
4. Si P_2 est NP-complet, P_1 est-il NP-complet ? ☞ Non.
5. Si on connaît une transformation polynomiale de P_2 en P_1, P_1 et P_2 sont-ils NP-complets ?
   ☞ Non.
6. Si P_1 et P_2 sont NP-complets, existe-t-il une transformation polynomiale de P_2 en P_1 ?
   ☞ Oui.
7. Si $P_1 \in$ NP, P_2 est-il NP-complet ?
   ☞ Non, cela n'indique rien sur la NP-complétude des problèmes.

(Variantes3Sat) Exercice 2. *Quelques variantes de 3-SAT*

Montrer la $\mathcal{NP}$-complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. **3-SAT NAE** (*not all equal*), où l'on impose que les trois littéraux de chaque clause ne soient pas tous à la même valeur.
   ☞ Évidemment 3-SAT NAE est NP.

   Pour montrer qu'il est NP-complet, et contrairement à toute attente, nous allons effectuer une réduction à partir de 3-SAT de la manière suivante :

   Pour chaque clause, $a \vee b \vee c$ du problème 3-SAT, on créé les instances $a \vee b \vee x$ et $c \vee \overline{x} \vee f$ où f est global (ie f est la même pour chaque clause créée ainsi)

   S'il existe une instanciation des variables qui met toutes les clauses à vrai, il en existe aussi une pour sa réduction, pour cela, il suffit de prendre $x = \overline{a \vee b}$, avec les notations ci-dessus, de plus si a ou b sont à vrai, x sera à faux, et donc pour la seconde clause sera mis a vrai par $\overline{x}$, on fini en prenant f toujours à faux, on a donc une bonne instanciation pour 3-SAT NAE.

   Réciproquement, si on a un bonne instanciation du problème 3-SAT NAE (réduction du problème 3-SAT) il existe un bonne instanciation pour le problème 3-SAT d'origine. En effet si f est à faux soit c est à vrai et donc la clause $a \vee b \vee c$ est vrai, soit c est à faux donc $\overline{x}$ est à vrai, x est donc à faux, d'où soit a soit b est à vrai et donc la clause $a \vee b \vee c$ est à vrai, par contre si f est à vrai, on prend toutes les variables du problème NAE et on prend leur négation, sans changer l'instance du problème. Cette instanciation, met toujours NAE à vrai, car comme "not all equal" une variable fausse au moins par clause qui est à vrai, et on recommence comme ci-dessus.

   Ce qui précède montre que tout problème 3-SAT peut se réduire polynomialement (on multiplie le nombre de clause par deux, et on rajoute une variable plus une par clauses de départ) en un problème 3-SAT NAE équivalent, 3-SAT NAE est donc NP-complet.

2. **3-SAT OIT** (*one in three*), où l'on impose qu'exactement un littéral soit à VRAI dans chaque clause.
   ☞ On fait comme le cas précédent, sauf qu'à partir de $a \vee b \vee c$ on créé les trois clauses $a \vee x \vee y$, $\overline{b} \vee x \vee x'$ et $\overline{c} \vee y \vee y'$

   Pour commencer on va montrer que s'il existe une bonne instanciation pour le problème 3-SAT de départ, il en existe une pour sa réduction à 3-SAT OIT.

   C'est assez simple à montrer une fois qu'on connaît la transformation, par contre elle est un peu longue à trouver. En effet, pour chaque clause de $a \vee b \vee c$ 3-SAT , si a est à vrai on met les variables x et y (avec les notations précédentes) à faux, et on donne la valeur de b à x' et celle de c à y' (a, b et c restent inchangées d'un problème à l'autre) ; et si a est à faux, alors soit b, soit c est à vrai. Comme la construction est symétrique, on supposera que b est à vrai, x' et y sont donc mis à faux, donc x doit être mis à vrai, et y' à c. On a alors exactement une variable à vrai dans les trois instances. On répète ce procédé pour chaque instance, et vu qu'on ne touche à aucune des variables directement associées à celle du problème 3-SAT, il n'y a pas de problème.

   Dans l'autre sens, on va montrer que si on a une instanciation qui permet de répondre oui au problème 3-SAT OIT obtenu à partir d'un problème 3-SAT par la construction explicitée plus haut alors on en a une pour ce problème 3-SAT. En effet on ne peut avoir aucune clause $a \vee b \vee c$ à faux car cela signifie que a, b et c sont faux, ce qui signifie que dans les clauses du 3-SAT OIT équivalentes on a x et x' à faux à cause de $\bar{b}$ (dans la deuxième clause), et de même, on a y et y' à faux à cause de $\bar{c}$ (dans la troisième clause), ce qui donne que la première clause est fausse, il y a donc contradiction.

On a donc équivalence entre entre les deux problèmes. Il y a un certificat pour un problème 3-SAT si et seulement il y en a une pour sa réduction vue précédemment, en un problème 3-SAT OIT. De plus la réduction est polynomiale (on multiplie le nombre de clauses par trois, et on rajoute six variables par clause de départ).

Ce qui précède montre que tout problème 3-SAT peut se réduire polynomialement en un problème 3-SAT OIT équivalent, 3-SAT OIT est donc un problème NP

☞ **Remarque :** une fois qu'on a montré que 3-SAT OIT est NP-complet, le problème SUBSET-SUM devient plus facile, car on démontre que SUBSET-SUM est NP-complet en faisant la même construction, sans les s_i et s'_i, et en prenant t=1...11 ...1.

(Dominateur) Exercice 3. *Ensemble Dominateur*

1. Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient un dominateur de cardinal K, i.e. un sous-ensemble $D \subset V$ de cardinal K tel que pour tout sommet $u \in V \setminus D$, il existe $u \in D$ avec $(u, v) \in E$

   ☞ Réduction à partir de vertex-cover en rajoutant dans la nouvelle instance in sommet uv pour châque arête (u,v) que l'on relie à u et à v.