

---

**TD 07 – NP-Complétude**


---

Pour ce TD, vous pourrez supposer que les problèmes **SAT**, **3-SAT**, **Clique** et **Vertex-Cover** sont NP-Complets.

**(QuestionCours) Exercice 1.***Echauffement*

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux problèmes de décision, et supposons qu'on connaisse une transformation polynomiale (une réduction) de  $P_1$  en  $P_2$ . Répondre aux sept questions suivantes avec un maximum de deux lignes de justification par question.

1. Si  $P_1 \in P$ , a-t-on  $P_2 \in P$  ?
2. Si  $P_2 \in P$ , a-t-on  $P_1 \in P$  ?
3. Si  $P_1$  est NP-complet,  $P_2$  est-il NP-complet ?
4. Si  $P_2$  est NP-complet,  $P_1$  est-il NP-complet ?
5. Si on connaît une transformation polynomiale de  $P_2$  en  $P_1$ ,  $P_1$  et  $P_2$  sont-ils NP-complets ?
6. Si  $P_1$  et  $P_2$  sont NP-complets, existe-t-il une transformation polynomiale de  $P_2$  en  $P_1$  ?
7. Si  $P_1 \in NP$ ,  $P_2$  est-il NP-complet ?

**(Variantes3Sat) Exercice 2.***Quelques variantes de 3-SAT*

Montrer la  $\mathcal{NP}$ -complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. **3-SAT NAE** (*not all equal*), où l'on impose que les trois littéraux de chaque clause ne soient pas tous à la même valeur.
2. **3-SAT OIT** (*one in three*), où l'on impose qu'exactly un littéral soit à VRAI dans chaque clause.

**(Dominateur) Exercice 3.***Ensemble Dominateur*

1. Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $K \geq 3$ , déterminer si  $G$  contient un dominateur de cardinal  $K$ , i.e. un sous-ensemble  $D \subset V$  de cardinal  $K$  tel que pour tout sommet  $u \in V \setminus D$ , il existe  $u \in D$  avec  $(u, v) \in E$

**(SousChaîne) Exercice 4.***Sous Chaîne transitive*

Dans un graphe orienté, on dit que  $\{x_1, \dots, x_k\}$  est une chaîne transitive de longueur  $k$  si et seulement si pour tout  $1 \leq i < j \leq k$ ,  $(x_i, x_j) \in E$ . Montrer que le problème suivant est  $\mathcal{NP}$ -complet.

**Sous-chaîne transitive :***Instance :* Un graphe orienté  $D = (V, E)$ .*Question :*  $D$  contient-il une sous-chaîne transitive de longueur au moins  $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$  ?

*Indication :* Vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. Si on se donne un ensemble de clauses  $C_1, \dots, C_k$ , avec  $C_i = (x_i^1 \vee x_i^2 \vee x_i^3)$ , on peut construire une instance du problème de sous-chaîne transitive en posant  $V = \{C_0\} \cup_{1 \leq i \leq k} \{C_i, x_i^1, x_i^2, x_i^3\}$  et en choisissant avec soin les arêtes à mettre dans  $E$ .

**(HC) Exercice 5.***Circuit Hamiltonien*

Soit  $G = (V, E)$  un graph. On dit que  $G$  admet un circuit hamiltonien si  $G$  possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. On s'intéresse au problème suivant :

**Circuit Hamiltonien :***Instance :* Un graphe  $G = (V, E)$ .*Question :*  $C$  contient-il un circuit hamiltonien ?

1. Montrez que **Circuit Hamiltonien** est NP-Complet.
2. Que pensez-vous du même problème mais où l'on cherche un cycle passant par toutes les arêtes exactement une fois ?