# TD 08 – NP-Complétude, encore

(SatN) **Exercice 1.** *Echauffement*

On appelle SAT-$N$ le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de $N$ occurrences de la même variable.

1. Montrer que SAT-3 est au moins aussi dur que SAT. En déduire que pour tout $N \geq 3$, SAT-$N$ est $\mathcal{NP}$-complet.
2. Soit $x$ une variable apparaissant dans une formule $F$ de SAT-2. Trouver une formule équivalente à $F$ et dans laquelle la variable $x$ n'apparaisse plus. En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

(2PartEtAll) **Exercice 2.** *2 Partitions et ses variantes*

On définit les deux problèmes suivants :

**SUBSET-SUM**
*Instance :* Un ensemble fini $S$ d'entiers positifs et un entier objectif $t$.
*Question :* Existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$ ?

**2-PARTITION**
*Instance :* $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble d'entier.
*Question :* Existe-t-il $I \subset S$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$ ?

On suppose pour l'instant que ces deux problèmes sont NP-Complets. Montrer la NP-Complétude des problèmes suivants.

1. Etant donnés $n$ entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, peut-on trouver un sous-ensemble $I \subset [1..n]$ tel que $|\sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \notin I} a_i| \leq 1$
2. Soient $n = 2p$ un entier pair, et $n$ entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Existe-t-il une partition de $\{1, 2, \ldots n\}$ en deux ensembles $I$ et $I'$ de même cardinal $p$ et tels que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I'} a_i$ ?
3. Étant donnés $n$ entiers $S\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, peut-on trouver trois sous-ensembles $I_1$, $I_2$ et $I_3$ partitionnant $[1..n]$ et tels que $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i = \sum_{i \in I_3} a_i$ ?
4. S'agit-il de NP-complétude au sens faible ou au sens fort ?

On va maintenant s'intéresser à la NP-Complétude des deux problèmes définis au début de l'exercice.

5. Montrer que 2-Partition est NP-complet. (On pourra supposer la NP-Complétude de **SUBSET-SUM**).
6. Montrer que **SUBSET-SUM** est NP-complet.

   *Indication :* vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_0, \ldots, C_{m-1}$ sur les variables $x_0, \ldots, x_{n-1}$, considérer $S$ l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où $b_{ij}$ (resp. $b'_{ij}$) vaut 1 si le littéral $x_i$ (resp. $\overline{x_i}$) apparaît dans $C_j$ et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2.10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif $t$ tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme $t$ si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

**(HC) Exercice 3.** *Circuit Hamiltonien*

Soit $G = (V, E)$ un graph. On dit que $G$ admet un circuit hamiltonien si $G$ possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. On s'intéresse au problème suivant :

**Circuit Hamiltonien** :
*Instance :* Un graphe $G = (V, E)$.
*Question :* $C$ contient-il un circuit hamiltonien ?

1. Montrez que **Circuit Hamiltonien** est NP-Complet.
2. Que pensez-vous du même problème mais où l'on cherche un cycle passant par toutes les arêtes exactement une fois ?