TD 10 – NP-Complétude, encore et toujours (corrigé)

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G admet un circuit hamiltonien si G possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. On s'intéresse au problème suivant :

Circuit Hamiltonien :
Instance : Un graphe $G = (V, E)$.
Question : C contient-il un circuit hamiltonien ?

Pour les deux premiers exercices du TD on supposera que **Circuit Hamiltonien** est NP-complet. Le but du troisième exercice sera de montrer cette hypothèse.

(Chevaliers) **Exercice 1.** *Chevaliers de la table ronde*

1. **Chevaliers de la table ronde**
Étant donnés n chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?
☞ $\in$ NP : trivial.
Instance I1 de départ : (V,E) de *Circuit Hamiltonien*.
Instance I2 créée : On crée un chevalier pour chaque sommet de V. Deux chevaliers sont féroces ennemis ssi il n'y a pas d'arête de E entre les deux sommets de V desquels ils proviennent.
Équivalence : Si on a un Circuit réalisable dans I1, alors on place les chevaliers autour de la table de la façon suivante : un chevalier est voisin d'un autre ssi le sommet représentant du premier est relié au sommet représentant du second dans le circuit.
Réciproquement, si on peut réunir les chevaliers autour de la table, alors on peut faire un Circuit en prenant pour arêtes les arêtes entre les représentants des chevaliers de toutes les paires de chevaliers voisins.

(Roue) **Exercice 2.** *Réinventons la roue*

1. Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient une roue de taille K, i.e. un ensemble de $K + 1$ sommets w, v_1, v_2, …, v_K tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i < K$, $(v_K, v_1) \in E$ et $(v_i, w) \in E$ pour $1 \leq i \leq K$ (w est le centre de la roue).
☞ en partant de Cycle Hamiltonien (instance $\mathcal{I}$ graphe $g = (V, E)$), on construit un nouveau graphe en rajoutant un sommet w relié à tous les autres. On demande si il existe une roue de taille $|V|$ dans le nouveau graphe (instance $\mathcal{I}'deroue$). si $\mathcal{I}$ possède un cycle hamiltonien, alors on a une roue de centre w. Réciproquement si $\mathcal{I}'$ possède une roue, alors soit w' le centre de la roue. On peut facilement voir qu'il existe également une roue de centre w car w' est relié à tous les sommets par définition du centre de la roue,et donc il peut facilement remplacer w' dans le cycle. On a donc un cycle hamiltonien dans le graphe initial de l'instance $\mathcal{I}$.

(HC2) **Exercice 3.** *Circuit Hamiltonien*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G admet un circuit hamiltonien si G possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. Le problème du **Circuit Hamiltonien** consiste à déterminer si un graphe possède un tel circuit.

1. Montrer que ce problème appartient à la classe NP.
2. Dans le problème SAT, montrer qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'une proposition n'apparaît pas à la fois positivement et négativement dans une clause.

Pour montrer que ce problème est NP-difficile, on réduit le problème de satisfaisabilité d'une formule CNF au problème de l'existence d'un circuit hamiltonien. Soit $\phi = \wedge_{j=1}^{m} c_j$ une formule CNF construite à partir de propositions $p_1, ..., p_n$.

On construit ensuite le graphe indépendant de la formule.
Les sommets sont $d, f, p_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m + 3$ et les sommets c_j avec $1 \leq j \leq m$.
Les arcs de ce graphe sont :
— Les arcs $(d, p_{1,1})$, $(d, p_{1,3m+3})$, $(p_{n,1}, f)$, $(p_{n,3m+3}, f)$, (f, d).
— Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a les arcs $(p_{i,1}, p_{i+1,1})$, $(p_{i,1}, p_{i+1,3m+3})$, $(p_{i,3m+3}, p_{i+1,1})$, $(p_{i,3m+3}, p_{i+1,3m+3})$.

— Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m+2$, on a les arcs $(p_{i,j}, p_{i,j+1})$, $(p_{i,j+1}, p_{i,j})$.

On ajoute ensuite les arcs suivant :

— Pour chaque clause c_j où apparaît positivement p_i, on ajoute $(p_{i,3j}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j+1})$.

— Pour chaque clause c_j où apparaît négativement p_i, on ajoute $(p_{i,3j+1}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j})$.

3. Dessinez le graphe indépendant d'une formule.

4. En utilisant ce graphe, montrer que le problème **Circuit Hamiltonien** est NP-complet.