TD 10 – NP-Complétude, encore et toujours

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G admet un circuit hamiltonien si G possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. On s'intéresse au problème suivant :

Circuit Hamiltonien :
Instance : Un graphe $G = (V, E)$.
Question : C contient-il un circuit hamiltonien ?

Pour les deux premiers exercices du TD on supposera que **Circuit Hamiltonien** est NP-complet. Le but du troisième exercice sera de montrer cette hypothèse.

(Chevaliers) Exercice 1. *Chevaliers de la table ronde*

1. **Chevaliers de la table ronde**
   Étant donnés n chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?

(Roue) Exercice 2. *Réinventons la roue*

1. Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient une roue de taille K, i.e. un ensemble de $K + 1$ sommets w, v_1, v_2, $\ldots$, v_K tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i < K$, $(v_K, v_1) \in E$ et $(v_i, w) \in E$ pour $1 \leq i \leq K$ (w est le centre de la roue).

(HC2) Exercice 3. *Circuit Hamiltonien*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G admet un circuit hamiltonien si G possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. Le problème du **Circuit Hamiltonien** consiste à déterminer si un graphe possède un tel circuit.

1. Montrer que ce problème appartient à la classe NP.
2. Dans le problème SAT, montrer qu'on peut supposer sans perte de généralité qu'une proposition n'apparaît pas à la fois positivement et négativement dans une clause.

Pour montrer que ce problème est NP-difficile, on réduit le problème de satisfaisabilité d'une formule CNF au problème de l'existence d'un circuit hamiltonien. Soit $\phi = \wedge_{j=1}^{m} c_j$ une formule CNF construite à partir de propositions $p_1, ..., p_n$.

On construit ensuite le graphe indépendant de la formule.
Les sommets sont $d, f, p_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m + 3$ et les sommets c_j avec $1 \leq j \leq m$.
Les arcs de ce graphe sont :
- Les arcs $(d, p_{1,1})$, $(d, p_{1,3m+3})$, $(p_{n,1}, f)$, $(p_{n,3m+3}, f)$, (f, d).
- Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a les arcs $(p_{i,1}, p_{i+1,1})$, $(p_{i,1}, p_{i+1,3m+3})$, $(p_{i,3m+3}, p_{i+1,1})$, $(p_{i,3m+3}, p_{i+1,3m+3})$.
- Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 3m + 2$, on a les arcs $(p_{i,j}, p_{i,j+1})$, $(p_{i,j+1}, p_{i,j})$.

On ajoute ensuite les arcs suivant :
- Pour chaque clause c_j où apparaît positivement p_i, on ajoute $(p_{i,3j}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j+1})$.
- Pour chaque clause c_j où apparaît négativement p_i, on ajoute $(p_{i,3j+1}, c_j)$ et $(c_j, p_{i,3j})$.

3. Dessinez le graphe indépendant d'une formule.
4. En utilisant ce graphe, montrer que le problème **Circuit Hamiltonien** est NP-complet.