TD 11 – NP-Complétude et gadgets (corrigé)

(HC3) **Exercice 1.** *Circuit Hamiltonien*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G admet un circuit hamiltonien si G possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. Le problème du **Circuit Hamiltonien** consiste à déterminer si un graphe possède un tel circuit.

1. Montrer que **Circuit Hamiltonien** est NP-Complet pour un graphe orienté si et seulement si il l'est pour un graphe non orienté. (Indice : créez un gadget pour remplacer un arc orienté).

(ColorPlan2) **Exercice 2.** *3-Color Plan*

On définit les problèmes suivants :
COLOR. Soit $G = (V, E)$ un graphe et k une borne ($1 \leq k \leq |V|$). Peut-on colorier les sommets de G avec k couleurs ? Le problème est d'associer à chaque sommet $v \in V$ un nombre (sa couleur) $\text{color}(v)$ compris entre 1 et k, de telle sorte que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur : $(u, v) \in E \Rightarrow \text{color}(u) \neq \text{color}(v)$
3-COLOR. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Peut on colorier les sommets de G avec 3 couleurs ?
3-COLOR-PLAN. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire (on peut le dessiner sans que les arêtes ne se coupent). Peut on colorier les sommets de G avec 3 couleurs ?
On veut montrer que **3-COLOR-PLAN** est NP-complet par réduction à partir de **3-COLOR**.

1. Considérez le gadget W représenté ci-dessous (fig. 2).. Montrez que ce gadget possède les propriétés suivantes :
   (i) Pour tout 3-coloriage de W les sommets a et a' ainsi que b et b' ont la même couleur.

   (ii) Si (a, a') et (b, b') ont la même couleur donnée, on peut compléter ce coloriage en un 3-coloriage de W.

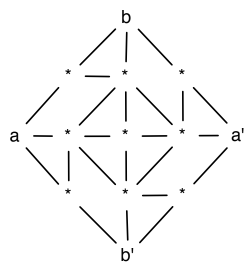

Figure 1 – Le gadget W

☞
i) On procède par exploration exhaustive des coloriages possibles. Les coloriages montrés en ii) donnent des exemples.
ii) Si on donne par exemple $a = a' = 0$, $b = b' = 1$, on peut compléter le coloriage comme dans la figure 3. Si on donne $a = a' = 0$, $b = b' = 0$, on peut compléter le coloriage comme dans la figure 4. Les autres cas sont symétriques.

2. Expliquez comment utiliser ce gadget pour traiter le cas d'un croisement entre deux arrêtes d'un graphe quelconque.

☞ Une arête (u,v) qui croise (u',v') est remplacée par l'arête (u,a) suivie du gadget W, avec $v = a'$: on met une arête entre u et l'extrémité gauche du gadget, et on confond v et l'extrémité droite du gadget. De même pour (u',v') : il y a une arête entre u' et l'extrémité nord b du gadget, mais $v' = b'$. De cette façon, comme a et a' ont la même couleur, u et v en ont une différente. Enfin,

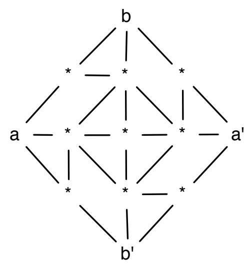

Figure 2 – Le gadget W avec 13 sommets

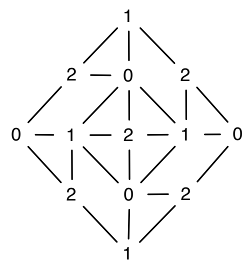

Figure 3 – 3-coloriage de W avec $a = a' = 0$, $b = b' = 1$

quand il y a plusieurs arêtes, on place plusieurs gadgets en série, en confondant l'extrémité droite d'un gadget avec l'extrémité gauche du gadget suivant.

3. Prouver que **3-COLOR-PLAN** est NP-complet.
☞

1. Comme **3-COLOR** est dans NP, **3-COLOR-PLAN** est dans NP.

2. On fait une réduction à partir de 3-COLOR en utilisant le gadget de la figure 2, appelé W. Soit I_1 une instance de 3-COLOR, c'est un graphe G. A partir de I_1 on construit une instance I_2 de 3-COLOR-PLAN comme graphe G en remplaçant les arêtes qui se croisent par un gadget W comme vu à la question précédente. G est 3-coloriable ssi G' est 3-coloriable :

   $\Rightarrow$ Si G est 3-coloriable, la proposition i) donne la solution.
   $\Leftarrow$ Si G' est 3-coloriable, la proposition ii) donne la solution.

(Color2) Exercice 3. *3-Color*

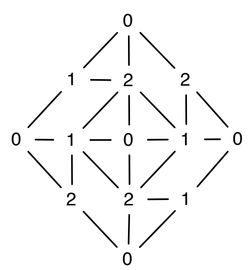

Figure 4 – 3-coloriage de W avec $a = a' = 0$, $b = b' = 0$

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le problème **3-COLOR** consiste à savoir si on peut on colorier les sommets de G avec 3 couleurs de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Pour montrer que **3-COLOR** est NP-Complet on va faire une réduction depuis **3-SAT**. L'idée est de prendre une couleur pour représenter `Vrai`, une pour représenter `Faux`, et une qui permette de transférer les contraintes.

1. Le but de cette question est de trouver un gadget qui "encode" le `or`. Trouver un gadget dont les trois points d'entrées soient trois variables a, b et c et dont le point de sortie satisfasse les contraintes suivantes :
   — si les trois points d'entrées sont coloriés à `Faux` alors le point de sortie est colorié avec `Faux`.
   — si un des points d'entrées est coloriés à `Vrai` alors on peut colorier le point de sortie avec `Vrai`.

2. Montrer que **3-COLOR** est NP-Complet.