

TD 11 – NP-Complétude et gadgets

(HC3) Exercice 1.*Circuit Hamiltonien*

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que G admet un circuit hamiltonien si G possède un cycle passant par chaque sommet exactement une fois. Le problème du **Circuit Hamiltonien** consiste à déterminer si un graphe possède un tel circuit.

1. Montrer que **Circuit Hamiltonien** est NP-Complet pour un graphe orienté si et seulement si il l'est pour un graphe non orienté. (Indice : créez un gadget pour remplacer un arc orienté).

(ColorPlan2) Exercice 2.*3-Color Plan*

On définit les problèmes suivants :

COLOR. Soit $G = (V, E)$ un graphe et k une borne ($1 \leq k \leq |V|$). Peut-on colorier les sommets de G avec k couleurs ? Le problème est d'associer à chaque sommet $v \in V$ un nombre (sa couleur) $\text{color}(v)$ compris entre 1 et k , de telle sorte que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur : $(u, v) \in E \Rightarrow \text{color}(u) \neq \text{color}(v)$

3-COLOR. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Peut on colorier les sommets de G avec 3 couleurs ?

3-COLOR-PLAN. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire (on peut le dessiner sans que les arêtes ne se croisent). Peut on colorier les sommets de G avec 3 couleurs ?

On veut montrer que **3-COLOR-PLAN** est NP-complet par réduction à partir de **3-COLOR**.

1. Considérez le gadget W représenté ci-dessous (fig. 1).. Montrez que ce gadget possède les propriétés suivantes :
 - (i) Pour tout 3-coloriage de W les sommets a et a' ainsi que b et b' ont la même couleur.
 - (ii) Si (a, a') et (b, b') ont la même couleur donnée, on peut compléter ce coloriage en un 3-coloriage de W .

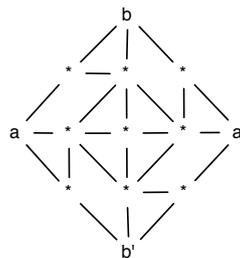


FIGURE 1 – Le gadget W

2. Expliquez comment utiliser ce gadget pour traiter le cas d'un croisement entre deux arêtes d'un graphe quelconque.
3. Prouver que **3-COLOR-PLAN** est NP-complet.

(Color2) **Exercice 3.**

3-Color

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le problème **3-COLOR** consiste à savoir si on peut colorier les sommets de G avec 3 couleurs de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Pour montrer que **3-COLOR** est NP-Complet on va faire une réduction depuis **3-SAT**. L'idée est de prendre une couleur pour représenter Vrai, une pour représenter Faux, et une qui permette de transférer les contraintes.

1. Le but de cette question est de trouver un gadget qui "encode" le or. Trouver un gadget dont les trois points d'entrées soient trois variables a, b et c et dont le point de sortie satisfasse les contraintes suivantes :
 - si les trois points d'entrées sont coloriés à Faux alors le point de sortie est colorié avec Faux.
 - si un des points d'entrées est coloriés à Vrai alors on peut colorier le point de sortie avec Vrai.
2. Montrer que **3-COLOR** est NP-Complet.