Emulation d'un calculateur quantique

Année 2012-2013

- Bits et portes logiques quantiques
  Bits quantiques ou qubits
  Portes logiques quantiques
- Algorithmes
  Algorithme de Deutsch
  Mise en oeuvre informatique
- Réalisations physiques

Modélisation de la propriété de superposition

Etats classiques : $|0\rangle$ et $|1\rangle$

Etats quantiques : $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$

Règle de Born $\Rightarrow \boxed{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1}$

Plus formellement :

Un qubit est un vecteur unitaire de V = Vect($|0\rangle$,$|1\rangle$), $\mathbb{C}$-ev.

Dans notre émulateur

- L'état $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ est représenté par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
- Pour générer un qubit de manière aléatoire : `genere_qbit`

Représentation d'un qubit

$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$

On note : $\begin{cases} \alpha = |\alpha| e^{i\varphi_\alpha} \\ \beta = |\beta| e^{i\varphi_\beta} \end{cases}$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ donc :
$\exists\ \theta \in [0;\pi], \begin{cases} |\alpha| = \cos\frac{\theta}{2} \\ |\beta| = \sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$

$$\boxed{|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle}$$

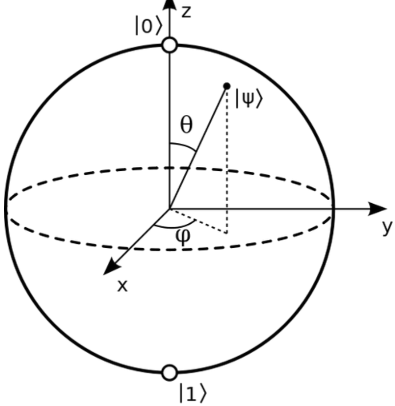


Figure : Sphère de Bloch

Modélisation de la propriété d'intrication

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \in V \otimes V$$

$$\boxed{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \Leftrightarrow \alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10}}$$

<u>Généralisation :</u> $|\psi\rangle = \sum_{p=0}^{2^n} \alpha_p \big|\bar{p}^2\big\rangle \in V^{\otimes n}, \qquad \sum_{p=0}^{2^n} |\alpha_p|^2 = 1$

Dans notre émulateur

- L'état $|\psi\rangle$ de taille n est représenté par le vecteur colonne de taille 2^n contenant ses coordonnées dans la base correspondante.
- Fonctions : `mult_qubit`, `genere_qubit_n`

Modélisation des portes quantiques usuelles

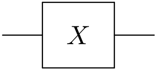
Opérateur $U : |\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle = |U\psi\rangle$

- linéaire
- unitaire

$\Rightarrow$ Les portes logiques sont représentées par des matrices unitaires de $\mathscr{M}_{2^n}(\mathbb{C})$

Exemples

Not :

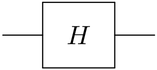


$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle \mapsto |1\rangle$$

$$|1\rangle \mapsto |0\rangle$$

Hadamard :

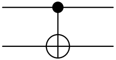


$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

CNot :



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

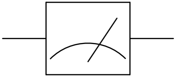
$$|00\rangle \mapsto |00\rangle \ , \ |01\rangle \mapsto |01\rangle$$

$$|10\rangle \mapsto |11\rangle \ , \ |11\rangle \mapsto |10\rangle$$

Une opération particulière : la mesure

La mesure de $\sum_{p=0}^{2^n-1} \alpha_p \left|\bar{p}^2\right\rangle$ donne l'état $\left|\bar{p}^2\right\rangle$ avec la probabilité $|\alpha_p|^2$.

$\Rightarrow$ opération irréversible et non linéaire.



Emulation : la fonction `mesure`

$\lvert\alpha_1\rvert^2$	$\lvert\alpha_1\rvert^2 + \lvert\alpha_2\rvert^2$	...	$\sum_{p=0}^{2^n-1} \lvert\alpha_p\rvert^2 = 1$

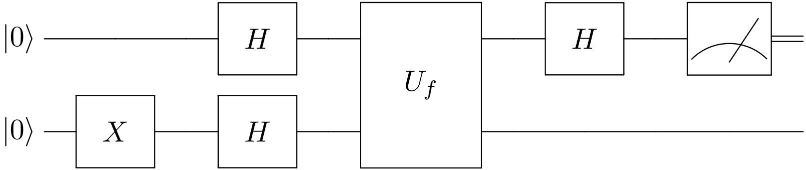
m = un nombre aléatoire entre 0 et 1

Principe de l'algorithme de Deutsch

Le problème de Deutsch

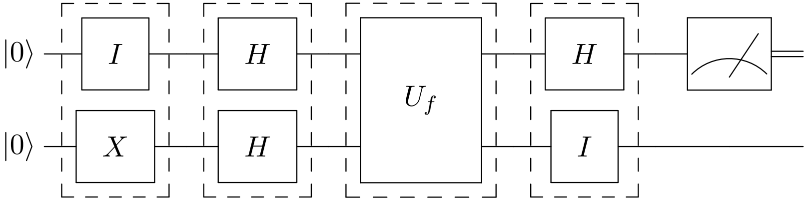
$$f : \{0;1\} \to \{0;1\}$$

- Constante ?
- Equilibrée ?



$U_f : |x\rangle|y\rangle \mapsto |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$

Simulation de l'algorithme



Fonctions implémentées

- Matrice équivalente d'une zone : `matrix_of_gates`.

  Mange : un tableau de matrices $[|H;H|]$.

  Renvoie : la matrice équivalente $H \otimes H$.

- Matrice équivalente du circuit : `matrix_of_circuit`

  Mange : un tableau de matrices $[|[|I;X|];[|H;H|];[|Uf|];[|H;I|]|]$

  Renvoie : la matrice équivalente $(I \otimes X)(H \otimes H)U_f(H \otimes I)$

Exigences

- Support fiable et extensible d'information quantique
- Réalisation d'un ensemble de portes universelles (unitaires) : portes à 1 qubit et CNOT
- Préparation des états initiaux
- Mesure de l'état de sortie

τ_Q : temps de décohérence

τ_{op} : temps nécessaire pour réaliser une opération

n_{op} : nombre d'opérations possible

$$n_{op} = \frac{\tau_Q}{\tau_{op}}$$

Exemples

- Résonance magnétique nucléaire (RMN)
- Ions piégés