

---

# REPRÉSENTATIONS $p$ -ADIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

Laurent Berger

---

**Abstract.** — In this paper, we associate to every  $p$ -adic representation  $V$  a  $p$ -adic differential equation  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , that is to say a module with a connection over the Robba ring. We do this via the theory of Fontaine’s  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.

This construction enables us to relate the theory of  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules to  $p$ -adic Hodge theory. We explain how to construct  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  and  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  from  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , which allows us to recognize semi-stable or crystalline representations; the connection is then unipotent or trivial on  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$ .

In general, the connection has an infinite number of regular singularities, but  $V$  is de Rham if and only if those are apparent singularities. A structure theorem for modules over the Robba ring allows us to get rid of all singularities at once, and to obtain a “classical” differential equation, with a Frobenius structure.

Using this, we construct a functor from the category of de Rham representations to that of classical  $p$ -adic differential equations with Frobenius structure. A recent theorem of Y. André gives a complete description of the structure of the latter object. This allows us to prove Fontaine’s  $p$ -adic monodromy conjecture: every de Rham representation is potentially semi-stable.

As an application, we can extend to the case of arbitrary perfect residue fields some results of Hyodo ( $H_g^1 = H_{st}^1$ ), of Perrin-Riou (the semi-stability of ordinary representations), of Colmez (absolutely crystalline representations are of finite height), and of Bloch and Kato (if the weights of  $V$  are  $\geq 2$ , then Bloch-Kato’s exponential  $\exp_V$  is an isomorphism).

## Table des matières

Introduction.....	2
0.1. Généralités et notations.....	2
0.2. Théorie de Hodge $p$ -adique et $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.....	4
0.3. Structures différentielles sur les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et monodromie $p$ -adique.....	5
0.4. Extensions de représentations semi-stables.....	7
0.5. Plan de l’article.....	7
1. Rappels et notations.....	8

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 14F30.

*Mots clefs.* — Périodes  $p$ -adiques – représentations  $p$ -adiques ordinaires – de de Rham – semi-stables – cristallines – monodromie  $p$ -adique – équations différentielles  $p$ -adiques – isocristaux surconvergentes – théorie de Hodge  $p$ -adique.

1.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et ses sous-anneaux.....	8
1.2. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ et ses sous-anneaux.....	10
1.3. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}$ et ses sous-anneaux.....	11
2. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger}$ .....	12
2.1. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ .....	13
2.2. Plongement des $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\dagger}$ .....	17
2.3. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ .....	19
2.4. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger,r}$ et leurs plongements dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\dagger}$ .....	21
2.5. Action de $H_K$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ .....	23
2.6. Les anneaux $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ et $\mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger}$ .....	24
3. Application aux représentations $p$ -adiques.....	26
3.1. Régularisation par le Frobenius.....	26
3.2. Représentations semi-stables.....	27
3.3. Représentations cristallines et représentations de hauteur finie....	31
3.4. Une autre définition de $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$ .....	32
4. Propriétés de $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ .....	33
4.1. L'opérateur $\nabla$ .....	34
4.2. Modules sur $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ .....	37
5. Structures différentielles sur les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et monodromie $p$ - adique.....	40
5.1. L'opérateur $\nabla_V$ .....	40
5.2. Application aux représentations semi-stables.....	42
5.3. Les modules $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$ .....	43
5.4. Représentations de de Rham.....	45
5.5. Représentations de de Rham et équations différentielles $p$ -adiques	49
5.6. Représentations $\mathbf{C}_p$ -admissibles.....	52
6. Extensions de représentations semi-stables.....	55
6.1. Extensions de représentations semi-stables.....	56
6.2. L'exponentielle de Bloch-Kato.....	57
Diagramme des anneaux de périodes.....	58
Index des notations.....	60
Bibliographie.....	61

## Introduction

**0.1. Généralités et notations.** — Dans tout cet article  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p$ , et  $F$  est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ . Soit  $K$  une extension finie totalement ramifiée de  $F$ , ce qui fait que le corps résiduel de  $\mathcal{O}_K$  s'identifie à  $k$  et que le corps  $K$  est complet pour la valuation  $v_p$  qui étend celle de  $F$ . Soit  $\mathbf{C}_p$  le complété d'une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ . On s'intéressera aux représentations  $p$ -adiques  $V$  du groupe de Galois absolu  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  c'est-à-dire aux  $\mathbf{Q}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie  $d$  munis d'une action linéaire et continue

de  $G_K$ . Pour les autres notations utilisées dans cette introduction, on se reportera au premier chapitre.

J-M. Fontaine a construit dans [26] une équivalence de catégories  $V \mapsto \mathbf{D}(V)$  entre la catégorie de toutes les représentations de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales (le foncteur inverse est noté  $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ ). Un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local  $\mathbf{B}_K$  de dimension 2 muni d'une action semi-linéaire d'un Frobenius  $\varphi$  et d'une action semi-linéaire de  $\Gamma_K$  commutant à celle de  $\varphi$ . Un tel module est étale si  $\varphi$  est de pente 0 ("unit root"). Le corps  $\mathbf{B}_K$  est isomorphe (non canoniquement) à l'anneau des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  en l'indéterminée  $T$  où la suite  $a_k$  est une suite bornée d'éléments de  $F$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{-k} = 0$ . L'action de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  est assez compliquée en général mais si  $K$  est non-ramifié ( $K = F$ ), alors on peut choisir  $T$  de telle sorte que  $\varphi(T) = (1 + T)^p - 1$  et  $\gamma(T) = (1 + T)^{\chi(\gamma)} - 1$  ( $\chi : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  est le caractère cyclotomique; dans le corps du texte,  $T$  est égal à un élément  $\pi_K$  construit via la théorie du corps des normes et l'action de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  provient d'une action naturelle; si  $K = F$ , on a  $\pi_K = \pi = [\varepsilon] - 1$ ).

L'anneau  $\mathbf{B}_K$  est assez désagréable mais il contient l'anneau  $\mathbf{B}_K^\dagger$  des séries surconvergentes, c'est-à-dire l'anneau constitué des séries  $A(T) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  où la suite  $a_k$  est une suite bornée d'éléments de  $F$  et il existe  $r < 1$  tel que la série  $A(T)$  converge sur une couronne non-vide du type  $\{z \in \mathbf{C}_p, r < |z| < 1\}$ . Le théorème principal de [8] est que tout  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale provient par extension des scalaires d'un "module surconvergent"; plus précisément on a le résultat suivant

**Théorème 0.1.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale, alors l'ensemble des sous- $\mathbf{B}_K^\dagger$ -modules libres de type fini stables par  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  admet un plus grand élément  $D^\dagger$  et on a  $D = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger$ .*

Le fait que l'ensemble des sous- $\mathbf{B}_K^\dagger$ -modules libres de type fini stables par  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  admet un plus grand élément est un résultat de Cherbonnier [7], et moyennant ce résultat, le théorème est énoncé dans [8] de manière duale (via le foncteur  $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ ) sous la forme "toute représentation de  $G_K$  est surconvergente". Grâce à ce résultat, on va pouvoir tensoriser au-dessus de  $\mathbf{B}_K^\dagger$  avec l'anneau de Robba  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  (anneau apparaissant dans la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques), constitué des séries  $A(T) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  telles que  $a_k \in F$  et qu'il existe  $r < 1$  tel que la série  $A(T)$  converge sur une couronne non-vide du type  $\{z \in \mathbf{C}_p, r < |z| < 1\}$  (sans condition de croissance au voisinage de  $\{z \in \mathbf{C}_p, |z| = 1\}$ ). Ceci va nous permettre, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , d'une part de retrouver les invariants  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  associés à  $V$  par la théorie de Hodge  $p$ -adique et, d'autre part, en utilisant l'action infinitésimale de  $\Gamma_K$ ,

d’associer à  $V$  un module à connexion  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  sur l’anneau de Robba  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ . Cet article rassemble un certain nombre de résultats que l’on peut obtenir via l’étude de ce module à connexion: caractérisation des représentations absolument cristallines, semi-stables, de de Rham et  $\mathbf{C}_p$ -admissibles, correspondance entre représentations de de Rham et équations différentielles  $p$ -adiques classiques, et démonstration de la conjecture de “monodromie  $p$ -adique”. On termine avec quelques applications.

**0.2. Théorie de Hodge  $p$ -adique et  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.** — Soient  $\mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[\log(T)]$  (anneau muni des actions évidentes de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$ ),

$$\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\text{log}}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V).$$

Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , soient  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ ,  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  les modules associés à  $V$  par la théorie de Hodge  $p$ -adique. Le premier résultat est que l’on peut retrouver ces modules

**Théorème 0.2.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors*

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{D}_{\text{log}}^\dagger(V)[1/t])^{\Gamma_K} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t])^{\Gamma_K}.$$

*De plus:*

(1) *si  $V$  est une représentation semi-stable, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$$

(2) *si  $V$  est une représentation cristalline, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$$

Dans l’énoncé ci-dessus le  $t$  qui apparaît est un élément de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  sur lequel  $\Gamma_K$  agit via  $\gamma(t) = \chi(\gamma)t$  et tel que  $\varphi(t) = pt$ ; si  $K = F$ , on a  $t = \log(1 + T)$ .

Les modules  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  sont naturellement munis d’un Frobenius  $\varphi$ , d’un opérateur de monodromie  $N$  et d’une filtration. Le théorème précédent permet de retrouver les actions de  $\varphi$  et  $N$ , mais la recette permettant de retrouver la filtration est suffisamment peu ragoûtante pour ne pas être explicitée dans cet article.

Un corollaire du théorème 0.2 est le résultat suivant:

**Corollaire 0.3.** — *Si  $V$  est une représentation cristalline de  $G_F$ , alors  $V$  est de hauteur finie.*

Ce résultat avait été conjecturé par Fontaine (voir [26, 54]) et démontré par Colmez [18] de manière très détournée (la démonstration utilisait deux versions [17, 9] de la démonstration de la loi de réciprocité conjecturée par Perrin-Riou [40]) dans le cas d’un corps résiduel fini. La démonstration donnée dans cet article utilise à la place le théorème

ci-dessus et un résultat d'analyse  $p$ -adique démontré par Kedlaya [34]. Signalons que Benois [3] a par ailleurs démontré la loi de réciprocité de Perrin-Riou pour les représentations cristallines de hauteur finie ce qui, combiné avec le résultat ci-dessus, fournit une démonstration de cette loi de réciprocité dans le cas général, n'utilisant que la théorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules, réalisant ainsi un programme de Fontaine.

### 0.3. Structures différentielles sur les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et monodromie $p$ -adique.

— Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma_K$  assez proche de 1. La série qui définit  $\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))}$  converge vers un opérateur différentiel  $\nabla$ ; si  $K = F$  on a  $\nabla = \log(1 + T)(1 + T)\frac{d}{dT}$ . Si  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n}$  est l'anneau des séries convergeant sur la couronne  $\{p^{-1/e_K r_n} \leq |z| < 1\}$  (où  $e_K = [K_\infty : F_\infty]$ ) et  $r_n = (p - 1)p^{n-1}$ , alors  $\nabla$  stabilise  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n}$  pour  $n$  assez grand et on dispose de plus de morphismes injectifs  $\iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n} \rightarrow K_n[[t]]$  qui vérifient  $\iota_n \circ \nabla = t\frac{d}{dt} \circ \iota_n$ . Soit aussi  $\partial = t^{-1}\nabla$ ; si  $K = F$  on a donc  $\partial = (1 + T)\frac{d}{dT}$ , c'est une autre dérivation de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ , qui est d'ailleurs une base du  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ -module de rang 1 des dérivations de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ .

Ce qui précède correspond au cas de la représentation triviale et, plus généralement, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  et si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_K$  assez proche de 1, la série qui définit  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  converge vers un opérateur différentiel  $\nabla_V$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  au-dessus de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  muni de  $\nabla$ . Plus précisément, si  $n$  est assez grand,  $\nabla_V$  stabilise le sous-module  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V)$  ce qui permet d'associer à toute représentation  $p$ -adique de  $G_K$  un module différentiel sur une couronne.

Une conséquence presque immédiate de 0.2 est le théorème suivant:

**Théorème 0.4.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$  est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si  $\nabla_V$  est une connexion unipotente (respectivement triviale) sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t]$ .*

Le module différentiel  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  est à points singuliers réguliers, mais a une infinité de singularités dans la couronne; en effet la série  $\log(1 + T)$  s'annule en tous les  $\zeta - 1$ , où  $\zeta$  est une racine d'ordre  $p^n$  de 1. On n'est donc pas dans le cadre classique des équations différentielles  $p$ -adiques, mais si la représentation  $V$  est de de Rham, on peut supprimer les singularités et retomber sur un objet classique (voir le théorème 0.5 ci-dessous).

En localisant en  $\zeta - 1$  (où  $\zeta$  est un racine primitive d'ordre  $p^n$  de l'unité), ce qui revient à considérer l'application  $\iota_n : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V) \rightarrow (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ , on retombe sur le module différentiel considéré par Fontaine dans [27, chap. 3], ce qui permet en particulier de retrouver le module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  à partir du noyau de cette connexion, et de montrer que la représentation  $V$  est de de Rham si et seulement si  $\nabla_V$  n'a que des singularités apparentes en les  $\zeta - 1$ . Il est donc naturel d'espérer que l'on peut supprimer toutes les singularités

simultanément ou, ce qui revient au même, construire un sous-objet de rang maximal, stable par  $\partial_V = t^{-1}\nabla_V$ . De fait, on a le résultat suivant:

**Théorème 0.5.** — *Si  $V$  est une représentation de de Rham de  $G_K$ , dont les poids de Hodge-Tate sont négatifs, alors il existe un unique sous  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , libre de rang  $d$  et stable par  $\partial_V$ . De plus,  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est stable par  $\varphi$  et  $\Gamma_K$ .*

Ceci nous permet enfin de faire le lien entre les représentations de de Rham et les équations différentielles  $p$ -adiques classiques. Le résultat principal de cet article est le suivant:

**Théorème 0.6.** — *Il existe un foncteur  $V \mapsto \mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ , de la catégorie des représentations  $p$ -adiques de de Rham de  $G_K$ , dans la catégorie des  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  modules libres à connexion (les équations différentielles  $p$ -adiques), munis d'une structure de Frobenius. Ce foncteur associe à une représentation de dimension  $d$  une équation différentielle de rang  $d$ . De plus, les deux catégories ci-dessus sont tannakiennes et  $\mathbf{N}_{\text{dR}}$  est un  $\otimes$ -foncteur exact et fidèle.*

*Enfin,  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est unipotent si et seulement s'il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$  est semi-stable, et  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est quasi-unipotent si et seulement si  $V$  est potentiellement semi-stable.*

Le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est donc muni d'une connexion et d'un opérateur de Frobenius, et André a récemment montré dans [2] (deux autres démonstrations indépendantes ont été données par Kedlaya [34], et par Mebkhout [37]) qu'un tel module est quasi-unipotent. Une conséquence de ceci est une démonstration de la conjecture de monodromie pour les représentations  $p$ -adiques [25, 6.2]:

**Théorème 0.7.** — *Si  $V$  est une représentation de de Rham, alors  $V$  est potentiellement semi-stable.*

Enfin, en utilisant l'application  $\theta : \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$ , on retombe sur le module de Sen (le  $K_\infty$ -espace vectoriel associé à  $V$  via la théorie de Sen, voir [16, 27, 44]), la connexion devenant un opérateur  $K_n$ -linéaire dont les valeurs propres sont les "poids de Hodge-Tate généralisés". En particulier,  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible (ce qui équivaut à  $V$  de Hodge-Tate et tous ses poids de Hodge-Tate sont nuls) si et seulement si cet opérateur est nul. On en déduit le fait que  $\nabla_V$  est divisible par  $t$ , et donc que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  est un  $(\varphi, \partial)$ -isocrystal surconvergent, avec un Frobenius étale. Utilisant ce fait et des techniques d'équations différentielles  $p$ -adiques (plus précisément un théorème de Tsuzuki [10, 53]) on obtient une démonstration du résultat suivant, dû à Sen [44], qui caractérise les représentations  $p$ -adiques  $\mathbf{C}_p$ -admissibles:

**Théorème 0.8.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1)  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible;
- (2) le sous-groupe d'inertie de  $G_K$  agit sur  $V$  à travers un quotient fini.

Ce théorème est d'ailleurs équivalent au théorème de Tsuzuki, voir la remarque 5.30.

**0.4. Extensions de représentations semi-stables.** — En utilisant le théorème de monodromie  $p$ -adique, on peut montrer que:

- Théorème 0.9.** —
- (1) *Toute représentation ordinaire de  $G_K$  est semi-stable;*
  - (2) *une représentation de de Rham, qui est une extension de deux représentations semi-stables, est elle-même semi-stable;*
  - (3) *si  $V$  est une représentation semi-stable dont les poids de Hodge-Tate sont tous  $\geq 2$ , alors  $\exp_V : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow H^1(K, V)$  est un isomorphisme.*

Ces trois résultats étaient connus dans le cas d'un corps résiduel fini, où on peut les déduire de calculs de dimensions de groupes de cohomologie galoisienne (ce qui n'est plus possible si le corps résiduel n'est pas fini). Le (1) avait été démontré dans ce cas là par Perrin-Riou [39, 40, 41] comme corollaire des calculs de Bloch et Kato [5], le (2) par Hyodo [32, 38], et le (3) par Bloch et Kato.

**0.5. Plan de l'article.** — Cet article comporte six chapitres subdivisés en paragraphes. Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les représentations  $p$ -adiques et les anneaux de Fontaine. Dans le deuxième on donne la construction des anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^\dagger$ , qui sont fondamentaux pour ce qui suit. On donne dans le troisième chapitre une application de ces constructions: comment retrouver  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  à partir du  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}(V)$ . Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la connexion  $\nabla$  sur l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ , ce qui permet de définir dans le cinquième chapitre l'équation différentielle associée à une représentation  $p$ -adique; on donne des applications à la théorie de Fontaine, à la théorie de Sen, et aux représentations de de Rham (preuve de la conjecture de monodromie  $p$ -adique). Enfin dans le sixième chapitre on donne quelques applications du théorème de monodromie  $p$ -adique.

Le théorème 0.2 est la réunion du théorème 3.6 et de la proposition 3.7. Le corollaire 0.3 est l'objet du théorème 3.10 et le théorème 0.4 à la proposition 5.6. Le théorème 0.5 et sa réciproque sont démontrés dans le paragraphe 5.4, et le théorème 0.6 est le théorème 5.20. Le théorème 0.7 correspond au corollaire 5.22 et le théorème 0.8 correspond à la proposition 5.24. Le premier point de 0.9 est le corollaire 6.3, le (2) est le théorème 6.2,

et le (3) est le théorème 6.8. Cet article comporte deux appendices pour le rendre plus lisible: un diagramme des anneaux de périodes, et un index des notations.

**Remerciements:** Cet article est une version améliorée de ma thèse avec Pierre Colmez. Je tiens à le remercier d’avoir partagé avec moi ses idées et ses connaissances, ainsi que pour le temps et l’énergie qu’il m’a consacrés.

Lors de la rédaction de cet article, j’ai eu des conversations enrichissantes avec Yves André, Pierre Berthelot, Bruno Chiarellotto, Gilles Christol, Richard Crew, Jean-Marc Fontaine et Kiran Kedlaya. Je remercie le referee pour ses nombreuses suggestions, qui m’ont permis de grandement améliorer cet article.

Je tiens aussi à remercier les organisateurs du “Dwork Trimester” à Padova pour leur hospitalité. Mon séjour à Padova a été une occasion unique de discuter du contenu de cet article.

## 1. Rappels et notations

Ce chapitre est entièrement constitué de rappels sur la théorie des représentations  $p$ -adiques. On se reportera à [8, 9, 17, 24, 25, 26] ou aussi [20] pour la démonstration des faits qui sont rappelés ici. Pour ce qui est de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques et des isocristaux surconvergentes, le lecteur pourra se reporter à [14, 15, 22, 34, 52, 53].

La principale stratégie (due à Fontaine, voir par exemple [25]) pour étudier les représentations  $p$ -adiques d’un groupe  $G$  est de construire des  $\mathbf{Q}_p$ -algèbres topologiques  $B$  munies d’une action du groupe  $G$  et de structures supplémentaires de telle manière que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$  est un  $B^G$ -module qui hérite de ces structures, et que le foncteur qui à  $V$  associe  $D_B(V)$  fournisse des invariants intéressants de  $V$ . On dit qu’une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G$  est  $B$ -admissible si on a  $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq B^d$  en tant que  $G$ -modules.

**1.1. Le corps  $\tilde{\mathbf{E}}$  et ses sous-anneaux.** — Soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ ,  $F$  le corps des fractions de l’anneau des vecteurs de Witt sur  $k$  et  $K$  une extension finie totalement ramifiée de  $F$ . Soit  $\overline{F}$  une clôture algébrique de  $F$  et  $\mathbf{C}_p = \widehat{\overline{F}}$  sa complétion  $p$ -adique. On pose  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ , c’est aussi le groupe des automorphismes continus  $K$ -linéaires de  $\mathbf{C}_p$ . Le corps  $\mathbf{C}_p$  est un corps complet algébriquement clos de corps résiduel  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} = \overline{k}$ . On pose aussi  $K_n = K(\mu_{p^n})$  et  $K_\infty$  est défini comme étant la réunion des  $K_n$ . Soit  $H_K$  le noyau du caractère cyclotomique  $\chi : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  et  $\Gamma_K = G_K/H_K$  le groupe de Galois de  $K_\infty/K$  qui s’identifie via le caractère cyclotomique à un sous groupe



ouvert de  $\mathbf{Z}_p^*$ . Soient<sup>(1)</sup>

$$\tilde{\mathbf{E}} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbf{C}_p = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \mid (x^{(i+1)})^p = x^{(i)}\}$$

et  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbf{E}}$  tels que  $x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ . Si  $x = (x^{(i)})$  et  $y = (y^{(i)})$  sont deux éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}$ , alors on définit leur somme  $x + y$  et leur produit  $xy$  par :

$$(x + y)^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j} \text{ et } (xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}$$

ce qui fait de  $\tilde{\mathbf{E}}$  un corps de caractéristique  $p$  dont on peut montrer qu'il est algébriquement clos. Si  $x = (x^{(n)})_{n \geq 0} \in \tilde{\mathbf{E}}$  soit  $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$ . C'est une valuation sur  $\tilde{\mathbf{E}}$  pour laquelle celui-ci est complet; l'anneau des entiers de  $\tilde{\mathbf{E}}$  est  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  et l'idéal maximal est  $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}} = \{x \in \tilde{\mathbf{E}}, v_{\mathbf{E}}(x) > 0\}$ . Soit  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  l'anneau  $W(\tilde{\mathbf{E}}^+)$  des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  et

$$\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[1/p] = \left\{ \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k], x_k \in \tilde{\mathbf{E}}^+ \right\}$$

où  $[x] \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  est le relèvement de Teichmüller de  $x \in \tilde{\mathbf{E}}^+$ . Cet anneau est muni d'un morphisme d'anneaux  $\theta : \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$  défini de la manière suivante :

$$\theta \left( \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \right) = \sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$$

Soient  $\varepsilon = (\varepsilon^{(i)}) \in \tilde{\mathbf{E}}^+$  avec  $\varepsilon^{(0)} = 1$  et  $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ ,  $\pi = [\varepsilon] - 1$ ,  $\pi_n = [\varepsilon^{p^{-n}}] - 1$ ,  $\omega = \pi/\pi_1$  et  $q = \varphi(\omega) = \varphi(\pi)/\pi$ . Alors  $\ker(\theta)$  est l'idéal principal engendré par  $\omega$ . De même soit  $\tilde{p} = (p^{(n)}) \in \tilde{\mathbf{E}}^+$  avec  $p^{(0)} = p$ , alors  $\ker(\theta)$  est aussi engendré par  $[\tilde{p}] - p$ .

Remarquons que  $\varepsilon$  est un élément de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  tel que  $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon - 1) = p/(p - 1)$ . On pose  $\mathbf{E}_F = k((\varepsilon - 1))$  et on définit  $\mathbf{E}$  comme étant la clôture séparable de  $\mathbf{E}_F$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}$  ainsi que  $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E} \cap \tilde{\mathbf{E}}^+$  et  $\mathfrak{m}_{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cap \mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  l'anneau des entiers et l'idéal maximal de  $\mathbf{E}$ . Remarquons que, par définition,  $\mathbf{E}$  est séparablement clos, et que l'on retrouve  $\tilde{\mathbf{E}}$  à partir de  $\mathbf{E}$  en prenant le complété de sa clôture radicielle. On renvoie à [9, p. 243] pour une application de la théorie du corps de normes [56] à la construction d'une application  $\iota_K : \varprojlim \mathcal{O}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}^+$  de la limite projective des  $\mathcal{O}_{K_n}$  relativement aux applications normes dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  dont la principale propriété est la suivante :

**Proposition 1.1.** — *L'application  $\iota_K$  induit une bijection de  $\varprojlim_n \mathcal{O}_{K_n}$  sur l'anneau des entiers  $\mathbf{E}_K^+$  de  $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{H_K}$ .*

<sup>(1)</sup>Le lecteur est invité à consulter l'appendice "Diagramme des anneaux de périodes" tout au long de la lecture de ces constructions.

On remarquera que la proposition ci-dessus est énoncée dans [9, I.1.1] avec la restriction supplémentaire que  $K/\mathbf{Q}_p$  est finie mais ceci n'est pas nécessaire (en revanche il est important que  $K/F$  soit finie).

De plus on peut montrer de la même manière que  $\mathbf{E}_K$  est une extension finie séparable de  $\mathbf{E}_F$  de degré  $e_K = [K_\infty : F_\infty]$  et de groupe de Galois  $H_F/H_K$  (si  $K/F$  est galoisienne), et que le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K)$  s'identifie à  $H_K$ . Enfin  $\mathbf{E}_K^+$  est un anneau de valuation discrète de la forme  $k[[\bar{\pi}_K]]$  où  $\bar{\pi}_K = \iota_K(\varpi_K)$  est l'image d'une suite  $\varpi_K$  d'uniformisantes compatibles pour les normes des  $\mathcal{O}_{K_n}$ .

**1.2. L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  et ses sous-anneaux.** — L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est défini comme étant le complété pour la topologie  $\ker(\theta)$ -adique de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  (on remarquera que  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  est complet pour cette topologie):

$$\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_{n \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}^+ / (\ker(\theta)^n)$$

c'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal  $\ker(\theta)$ ; la série qui définit  $\log([\varepsilon])$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  vers un élément  $t$ , qui est un générateur de l'idéal maximal, ce qui fait que  $\mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[1/t]$  est un corps, muni d'une action de  $G_F$  et d'une filtration définie par  $\text{Fil}^i(\mathbf{B}_{\text{dR}}) = t^i \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  pour  $i \in \mathbf{Z}$ .

On dit qu'une représentation  $V$  de  $G_K$  est de de Rham si elle est  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ -admissible ce qui équivaut à ce que le  $K$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ .

L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$  est défini comme étant

$$\mathbf{B}_{\text{max}}^+ = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\omega^n}{p^n} \text{ où } a_n \in \tilde{\mathbf{B}}^+ \text{ est une suite qui tend vers } 0 \right\}$$

et  $\mathbf{B}_{\text{max}} = \mathbf{B}_{\text{max}}^+[1/t]$ . On peut d'ailleurs remplacer  $\omega$  par n'importe quel générateur de  $\ker(\theta)$ , par exemple  $[\tilde{p}] - p$ . Cet anneau se plonge canoniquement dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  (les séries définissant ses éléments convergent dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ ) et en particulier il est muni de l'action de Galois et de la filtration induites par celles de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ , ainsi que d'un Frobenius  $\varphi$ , qui étend l'application  $\varphi : \tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+$  déduite de  $x \mapsto x^p$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ . On remarquera que  $\varphi$  ne se prolonge pas par continuité à  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ . On pose  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{max}}^+)$  (on remarquera que l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  est l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{cont}}^+$  de [17]). La notation s'explique par le fait que l'on a [4] un isomorphisme:  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = H_{\text{rig}}^0(\mathcal{O}_{\bar{F}}/F)$ .

On dit qu'une représentation  $V$  de  $G_K$  est cristalline si elle est  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ -admissible ou, ce qui revient au même,  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t]$ -admissible (les périodes des représentations cristallines vivent dans des sous  $F$ -espaces vectoriels de dimension finie, stables par  $\varphi$ , de  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ , et donc en fait dans l'anneau  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{max}}^+[1/t])$ ); ceci équivaut à ce que le  $F$ -espace

vectorel

$$\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . Alors  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  est muni d'un Frobenius et d'une filtration induits par ceux de  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ , et  $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = K \otimes_F \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  ce qui fait qu'une représentation cristalline est aussi de de Rham.

La série qui définit  $\log(\bar{\pi}^{(0)}) + \log([\bar{\pi}]/\bar{\pi}^{(0)})$  (après avoir choisi  $\log(p)$  et où  $\bar{\pi} = \varepsilon - 1$ ) converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  vers un élément  $\log[\bar{\pi}]$  qui est transcendant sur  $\text{Frac } \mathbf{B}_{\text{max}}^+$  et on pose  $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{max}}[\log[\bar{\pi}]]$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+ = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[\log[\bar{\pi}]]$ . On dit qu'une représentation  $V$  est semi-stable si elle est  $\mathbf{B}_{\text{st}}$ -admissible ou, ce qui revient au même,  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+[1/t]$ -admissible (même raison que ci-dessus); ceci équivaut à ce que le  $F$ -espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . La définition de  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  donnée ci-dessus est légèrement différente de celle de Fontaine, mais le foncteur  $\mathbf{D}_{\text{st}}$  est le même. Alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  est muni d'un Frobenius, d'une filtration et d'un opérateur de monodromie  $N = -d/d \log[\bar{\pi}]$  qui vérifie  $N\varphi = p\varphi N$  (voir [51] pour une justification du signe “-”), et  $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = K \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ . De plus  $V$  est cristalline si et seulement si elle est semi-stable et  $N = 0$  sur  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ . On utilisera aussi le  $F$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{st}}^+(V) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ .

**1.3. L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}$  et ses sous-anneaux.** — Soit  $\tilde{\mathbf{A}}$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}[1/p]$ . Soit  $\mathbf{A}_F$  le complété de  $\mathcal{O}_F[\pi, \pi^{-1}]$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  pour la topologie de celui-ci, c'est aussi le complété  $p$ -adique de  $\mathcal{O}_F[[\pi]][\pi^{-1}]$ . C'est un anneau de valuation discrète complet dont le corps résiduel est  $\mathbf{E}_F$ . Soit  $\mathbf{B}$  le complété pour la topologie  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[1/p]$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}$ . On définit alors  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap \tilde{\mathbf{A}}^+$ . Ces anneaux sont munis d'une action de Galois et d'un Frobenius déduits de ceux de  $\tilde{\mathbf{E}}$ . On pose  $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{H_K}$  et  $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[1/p]$ . Quand  $K = F$  les deux définitions coïncident.

Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  soit  $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ . On sait [26] que  $\mathbf{D}(V)$  est un  $\mathbf{B}_K$ -espace vectoriel de dimension  $d = \dim(V)$  muni d'un Frobenius et d'une action résiduelle de  $\Gamma_K$  qui commutent (c'est un  $(\varphi, \Gamma_K)$  module) et que l'on peut récupérer  $V$  grâce à la formule  $V = (\mathbf{D}(V) \otimes_{\mathbf{B}_K} \mathbf{B})^{\varphi=1}$ .

Tout élément  $x \in \tilde{\mathbf{B}}$  peut s'écrire de manière unique sous la forme  $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  où les  $x_k$  sont des éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}$ . Si  $r > 0$ , on pose:

$$\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r} = \{x \in \tilde{\mathbf{B}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{pr}{p-1}k = +\infty\}$$

Si  $r \in \mathbf{R}$  on définit  $n(r)$  comme étant le plus petit entier  $n$  tel que  $r \leq r_n = p^{n-1}(p-1)$ . La série  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  si et seulement si la série  $\sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$  converge

dans  $\mathbf{C}_p$  (voir [18, II.25], et la construction qui précède 2.11). On en déduit notamment pour  $n$  entier tel que  $p^{n-1}(p-1) \geq r$  une application injective (on montrera cela et plus en 2.11, 2.25)  $\iota_n = \varphi^{-n} : \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  qui envoie  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  sur la somme de la série  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k^{p^{-n}}]$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . Soient  $\mathbf{B}^{\dagger,r} = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger = \cup_{r \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et  $\mathbf{B}^\dagger = \cup_{r \geq 0} \mathbf{B}^{\dagger,r}$ . Enfin  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$  est l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \cap \tilde{\mathbf{A}}$  tels qu'en plus,  $v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{pr}{p-1}k \geq 0$  pour tout  $k \geq 0$ ,  $\mathbf{A}^{\dagger,r} = \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r} \cap \mathbf{A}$ , et  $\mathbf{A}^\dagger = \tilde{\mathbf{A}}^\dagger \cap \mathbf{A}$  où  $\tilde{\mathbf{A}}^\dagger = \tilde{\mathbf{B}}^\dagger \cap \tilde{\mathbf{A}}$ . On pose  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r} = (\mathbf{B}^{\dagger,r})^{H_K}$ ,  $\mathbf{A}_K^{\dagger,r} = (\mathbf{A}^{\dagger,r})^{H_K}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} = (\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r})^{H_K}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r} = (\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r})^{H_K}$  (en général, si  $R$  est un anneau muni d'une action de  $H_K$ , on pose  $R_K = R^{H_K}$ ).

Pour situer ces anneaux, le lecteur est invité à se reporter au diagramme des anneaux de périodes qui se trouve en appendice.

**Remarque 1.2.** — La notation adoptée ici diffère un peu de celle de [8, 9]. Ce que nous appelons  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  (respectivement  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}$ ) y est noté  $\tilde{\mathbf{B}}_{r-}^\dagger$  (respectivement  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ ).

On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  est surconvergente si  $\mathbf{D}(V)$  possède une base sur  $\mathbf{B}_K$  constituée d'éléments de  $\mathbf{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ . Rappelons le résultat principal [8, 9] à ce sujet:

**Théorème 1.3.** — *Toute représentation  $V$  de  $G_K$  est surconvergente, c'est-à-dire qu'il existe  $r(V)$  tel que  $\mathbf{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r(V)}} \mathbf{D}^{\dagger,r(V)}(V)$ .*

On a d'autre part une description assez précise des anneaux  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  comme le montre la proposition suivante:

**Proposition 1.4.** — *Il existe  $n(K) \in \mathbf{N}$  et  $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n(K)}}$  dont l'image modulo  $p$  est une uniformisante  $\bar{\pi}_K$  de  $\mathbf{E}_K$ . Si  $r \geq r_{n(K)}$ , alors tout élément  $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  peut s'écrire  $x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$  où  $a_k \in F$  et où la série  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  est holomorphe et bornée sur la couronne  $\{p^{-1/e_K r} \leq |T| < 1\}$ .*

## 2. Les anneaux $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ et $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^\dagger$

Soit  $\alpha < 1$  et  $\mathcal{B}_F^\alpha$  l'ensemble des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  avec  $a_k \in F$ ,  $\{a_k\}_k$  étant une suite bornée telle que tout  $\rho \in [\alpha; 1[$ , on ait  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |a_k| \rho^k = 0$ , et  $\mathcal{B}_F = \cup_{\alpha < 1} \mathcal{B}_F^\alpha$ . Les rappels du chapitre précédent montrent que l'application  $f \mapsto f(\pi_K)$  de  $\mathcal{B}_F$  dans  $\mathbf{B}_K^\dagger$  est un isomorphisme.

Soit  $\mathcal{H}_F^\alpha$  l'ensemble des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  avec  $a_k \in F$  et telles que tout  $\rho \in [\alpha; 1[$ , on ait  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |a_k| \rho^k = 0$ . Alors  $\mathcal{H}_F = \cup_{\alpha < 1} \mathcal{H}_F^\alpha$  est l'anneau de Robba à coefficients dans  $F$  dont il a été question dans l'introduction:

$$\mathcal{H}_F = \cup_{r \geq 0} \cap_{s \geq r} \mathcal{O}_F \left\{ \frac{p}{T^r}, \frac{T^s}{p} \right\} \left[ \frac{1}{p} \right].$$

Afin de faire le lien entre les représentations  $p$ -adiques et les équations différentielles, on “définit” donc un anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \supset \tilde{\mathbf{B}}^\dagger$  tel que  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger)^{H_K}$  contienne  $\mathcal{H}_F(\pi_K)$ :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger = \cup_{r \geq 0} \cap_{s \geq r} \tilde{\mathbf{A}}^+ \left\{ \frac{p}{[\pi]^r}, \frac{[\pi]^s}{p} \right\} \left[ \frac{1}{p} \right].$$

Cet anneau contient  $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$ , et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ : il va donc servir comme intermédiaire entre les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et la théorie de Hodge  $p$ -adique. Il y a un certain nombre de choses techniques à démontrer pour vérifier que sa définition a bien un sens (les trois premiers paragraphes de ce chapitre), et le lecteur est invité à ne les consulter qu’en cas de besoin.

**2.1. Les anneaux  $\tilde{\mathbf{A}}_I$ .** — Dans tout ce chapitre,  $r$  et  $s$  sont deux éléments de  $\mathbf{N}[1/p] \cup \{+\infty\}$  tels que  $r \leq s$ . Rappelons que pour  $n \geq 0$  on a posé  $r_n = (p-1)p^{n-1}$ . Dans toute la suite, on notera  $[x]^r$  pour  $[x^r]$ , même si  $r$  n’est pas entier. On convient que  $p/[\pi]^{+\infty} = 1/[\pi]$  et que  $[\pi]^{+\infty}/p = 0$ . Soient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} &= \tilde{\mathbf{A}}^+ \left\{ \frac{p}{[\pi]^r}, \frac{[\pi]^s}{p} \right\} \\ &:= \tilde{\mathbf{A}}^+ \{X, Y\} / ([\pi]^r X - p, pY - [\pi]^s, XY - [\pi]^{s-r}) \\ \text{et } \tilde{\mathbf{B}}_{[r;s]} &= \tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}[1/p] \end{aligned}$$

où, si  $A$  est un anneau complet pour la topologie  $p$ -adique,  $A\{X, Y\}$  désigne la complétion  $p$ -adique de  $A[X, Y]$  c’est-à-dire que  $A\{X, Y\} = \{\sum_{i,j \geq 0} a_{ij} X^i Y^j\}$  où  $a_{ij}$  est une suite qui tend vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies.

**Lemme 2.1.** — Soit  $A = \tilde{\mathbf{A}}^+ \{X, Y\}$  et  $I = ([\pi]^r X - p, pY - [\pi]^s, XY - [\pi]^{s-r})$ . Alors

- (1)  $I \cap p^n A = p^n I$ ;
- (2)  $I$  est fermé dans  $A$  pour la topologie  $p$ -adique.

*Démonstration.* — Le (2) suit du (1) puisque  $I$  est complet pour la topologie  $p$ -adique et que le (1) montre qu’une suite d’éléments de  $I$  qui tend vers 0 dans  $A$  tend vers 0 dans  $I$ . Montrons donc le (1). Soit  $f(X, Y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} X^i Y^j$ ,  $f(X, Y) \in p^n A$  ce qui revient à dire que  $p^n | a_{ij}$ . Quitte à modifier  $f$  par des éléments de  $p^n(XY - [\pi]^{s-r}) \subset p^n I$  on peut supposer que  $f(X, Y) = \sum_i a_i X^i + \sum_j b_j Y^j$  où  $p^n$  divise  $a_i$  et  $b_j$ . Si  $f(X, Y) \in I$  c’est que l’on peut écrire

$$f(X, Y) = a(X, Y)([\pi]^r X - p) + b(X, Y)(pY - [\pi]^s) + c(X, Y)(XY - [\pi]^{s-r})$$

et les relations

$$\begin{aligned} Y([\pi]^r X - p) &= [\pi]^r (XY - [\pi]^{s-r}) - (pY - [\pi]^s) \text{ et} \\ X(pY - [\pi]^s) &= p(XY - [\pi]^{s-r}) - ([\pi]^r X - p)[\pi]^{s-r} \end{aligned}$$

montrent que quitte à modifier  $c(X, Y)$  on peut supposer que  $a(X, Y) = a(X, 0)$  et  $b(X, Y) = b(0, Y)$ . On voit alors que  $c(X, Y) = 0$  et donc finalement que  $f(X, Y) = a(X)([\bar{\pi}]^r X - p) + b(Y)(pY - [\bar{\pi}]^s)$ . Montrons que  $a(X) \in p^n A$  (la preuve pour  $b(Y)$  est la même). Posons  $a(X) = \sum_i c_i X^i$ . On a alors  $a_0 = -pc_0$  et  $a_i = [\bar{\pi}]^r c_{i-1} - pc_i$  ce qui fait si  $i \geq 0$  et  $0 \leq j \leq n-1$ , alors  $p^n$  divise  $c_{i+j}[\bar{\pi}]^r - pc_{i+j+1}$  et donc aussi  $\sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\pi}]^{r(n-1-j)} p^j (c_{i+j}[\bar{\pi}]^r - pc_{i+j+1}) = [\bar{\pi}]^{rn} c_i - p^n c_{i+n}$  et donc  $p^n$  divise  $c_i$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique (il est clairement complet). De plus on a une application naturelle surjective  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  dans le complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\bar{\pi}]^r, [\bar{\pi}]^s/p]$  dont le noyau est l'image de l'adhérence de  $I$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  et donc nul, ce qui fait que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  s'identifie aussi au complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\bar{\pi}]^r, [\bar{\pi}]^s/p]$ .*

**Lemme 2.3.** — *Tout élément de  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  peut s'écrire de la manière suivante:*

$$\sum_{k \geq 0} \left( \frac{p}{[\bar{\pi}]^r} \right)^k a_k + \sum_{k > 0} \left( \frac{[\bar{\pi}]^s}{p} \right)^k b_k$$

avec  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  deux suites de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  qui convergent vers 0 (cette écriture est bien sûr non-unique).

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la définition. On se contentera de remarquer que

$$\left( \frac{p}{[\bar{\pi}]^r} \right)^k \cdot \left( \frac{[\bar{\pi}]^s}{p} \right)^\ell = \begin{cases} [\bar{\pi}]^{k(s-r)} \left( \frac{[\bar{\pi}]^s}{p} \right)^{\ell-k} & \text{si } k \leq \ell \\ [\bar{\pi}]^{\ell(s-r)} \left( \frac{p}{[\bar{\pi}]^r} \right)^{k-\ell} & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$$

$\square$

**Lemme 2.4.** — *Si  $\rho$  et  $\sigma$  sont deux éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  qui vérifient  $v_{\mathbf{E}}(\rho) = pr/(p-1)$  et  $v_{\mathbf{E}}(\sigma) = ps/(p-1)$ , alors  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} = \tilde{\mathbf{A}}^+\{p/[\rho], [\sigma]/p\}$ .*

*Démonstration.* — C'est évident.  $\square$

Remarquons que si on a  $r_1 \leq r_2 \leq s_2 \leq s_1$ , alors il y a une inclusion (les deux anneaux en présence sont intègres et ont même corps des fractions):

$$\tilde{\mathbf{A}}^+\left[\frac{p}{[\bar{\pi}]^{r_1}}, \frac{[\bar{\pi}]^{s_1}}{p}\right] \hookrightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+\left[\frac{p}{[\bar{\pi}]^{r_2}}, \frac{[\bar{\pi}]^{s_2}}{p}\right]$$

**Lemme 2.5.** — *L'inclusion ci-dessus se prolonge en un morphisme  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r_1;s_1]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_2;s_2]}$  qui est toujours injectif.*

*Démonstration.* — Le morphisme du haut se factorise en  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r_1;s_1]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_1;s_2]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_2;s_2]}$  et on peut donc supposer  $r_1 = r_2$  ou  $s_1 = s_2$ . Supposons par exemple  $r_1 = r_2 = r$  (l'autre cas se traite de la même manière). Alors il suffit de montrer que le morphisme composé

$\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s_1]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r;s_2]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r;r]}$  est injectif (tout ceci pour simplifier la notation). On va donc montrer que si  $s \geq r$ , alors  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r;r]}$  est injectif. Soient  $\alpha = [\bar{\alpha}]$  et  $\beta = [\bar{\beta}]$  avec  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \tilde{\mathbf{E}}$  tels que  $v_{\mathbf{E}}(\bar{\alpha}) = r$  et  $v_{\mathbf{E}}(\bar{\beta}) = s - r$  de telle sorte que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} &= \tilde{\mathbf{A}}\{X, Y\}/(\alpha X - p, pY - \alpha\beta, XY - \beta) \text{ et} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[r;r]} &= \tilde{\mathbf{A}}\{X, Y\}/(\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1).\end{aligned}$$

Le fait que l'application naturelle  $f(X, Y) \mapsto f(X, \beta Y)$  du premier anneau dans le second est injective est équivalent au fait que si  $f(X, \beta Y) \in (\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$ , alors  $f(X, \beta Y)$  appartient à l'idéal de l'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}\{X, \beta Y\}$  engendré par  $(\alpha X - p, pY\beta - \alpha\beta, XY\beta - \beta)$ , ce que nous allons maintenant démontrer.

Commençons par remarquer que quitte à modifier  $f(X, Y)$  par des éléments de l'idéal  $(\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$  on peut supposer (en remplaçant  $XY$  par 1) que

$$f(X, \beta Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i X^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j \beta^j Y^j.$$

Supposons que l'on ait

$$f(X, \beta Y) = a(X, Y)(\alpha X - p) + b(X, Y)(pY - \alpha) + c(X, Y)(XY - 1).$$

Les relations

$$\begin{aligned}Y(\alpha X - p) &= \alpha(XY - 1) - (pY - \alpha) \text{ et} \\ X(pY - \alpha) &= p(XY - 1) - (\alpha X - p)\end{aligned}$$

montrent que l'on peut supposer, quitte à modifier  $c(X, Y)$ , que  $a(X, Y) = a(X, 0) := a(X)$  et  $b(X, Y) = b(0, Y) := b(Y)$ . Comme  $f(X, \beta Y)$  ne contient pas de terme en  $XY$  c'est alors que  $c(X, Y) = 0$ . On a donc montré que

$$f(X, \beta Y) = a(X)(\alpha X - p) + b(Y)(pY - \alpha).$$

Posons  $b(Y) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j Y^j$ . Pour terminer la démonstration il faut montrer que  $b_j$  est un multiple de  $\beta^{j+1}$ . Un calcul facile montre que si  $j \geq 1$ , alors  $\delta_j \beta^j = (pb_{j-1} - \alpha b_j)$  ce qui fait que  $\beta^j$  divise  $pb_{j-1} - \alpha b_j$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et donc que  $\beta^{j+1}$  divise

$$\sum_{k=0}^n p^{n-k} \alpha^k (pb_{j+k} - \alpha b_{j+k+1}) = p^{n+1} b_j - \alpha^{n+1} b_{j+n+1}.$$

Reste à choisir  $n$  assez grand pour que  $\beta^{j+1}$  divise  $\alpha^{n+1}$  ce qui montre alors que  $\beta^{j+1}$  divise  $b_j$ .  $\square$

On utilise ces injections pour définir, si  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ :  $\tilde{\mathbf{B}}_I = \bigcap_{[r;s] \subset I} \tilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$ .

Soient  $I \subset J$  deux intervalles fermés, ce qui fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_J \subset \tilde{\mathbf{B}}_I$ , on définit une valuation  $p$ -adique  $V_I$  sur  $\tilde{\mathbf{B}}_J$  en décidant que  $V_I(x) = 0$  si et seulement si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I - p\tilde{\mathbf{A}}_I$  et que

l'image de  $V_I$  est  $\mathbf{Z}$ . Par définition  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  muni de  $V_I$  est un espace de Banach  $p$ -adique. De plus le complété de  $\tilde{\mathbf{B}}_J$  pour  $V_I$  s'identifie à  $\tilde{\mathbf{B}}_I$ .

**Remarque 2.6.** — Comme  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  est un anneau, on a  $V_I(xy) \geq V_I(x) + V_I(y)$ .

Le but de cette partie est de dégager quelques propriétés de ces anneaux. Commençons par remarquer que le groupe de Galois  $G_F$  agit sur  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et que cette action s'étend à l'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\pi]^r, [\pi]^s/p]$  et le stabilise, ce qui fait que l'action de  $G_F$  s'étend par continuité à une action par isométries sur son complété  $p$ -adique et par suite à tous les  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_I$ .

De même le Frobenius  $\varphi$  s'étend en un morphisme

$$\varphi : \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\pi]^r}, \frac{[\pi]^s}{p}] \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\pi]^{pr}}, \frac{[\pi]^{ps}}{p}]$$

et se prolonge donc en une application de  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{pI}$  pour tout  $I$ .

**Lemme 2.7.** — Si  $I \subset [r; +\infty]$ , alors  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r} \subset \tilde{\mathbf{B}}_I$  et si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  s'écrit  $x = \sum_{k \gg 0} p^k [x_k]$ , alors la valuation

$$W_I(x) = \inf_{\alpha \in I} \inf_{k \in \mathbf{Z}} k + \frac{p-1}{p\alpha} v_{\mathbf{E}}(x_k)$$

vérifie  $V_I(x) = \lfloor W_I(x) \rfloor$  où  $\lfloor a \rfloor$  est le plus grand entier  $\leq a$ .

*Démonstration.* — Le premier point suit de la définition et de plus si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  vérifie  $W_I(x) \geq 0$ , alors la somme qui le définit converge dans  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  ce qui fait que  $V_I(x) \geq 0$ . Reste à montrer que si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I$ , alors  $W_I(x) \geq 0$ . Comme  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  est le complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\pi]^r, [\pi]^s/p]$  il suffit de montrer que  $W_I(x) \geq 0$  si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ , si  $x = p/[\pi]^r$  et si  $x = [\pi]^s/p$  ce qui est clair. Comme  $W_I(p) = 1$  on en déduit que  $\lfloor W_I(\cdot) \rfloor$  est une valuation  $p$ -adique dont l'image est  $\mathbf{Z}$  et telle que  $W_I(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I$  ce qui fait que  $V_I(x) = \lfloor W_I(x) \rfloor$ .  $\square$

**Exemple 2.8.** — Beaucoup de ces anneaux sont déjà connus:

- (1)  $\tilde{\mathbf{A}}_{[0; r_0]} = \mathbf{A}_{\max}^+$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{[0; r_0]} = \mathbf{B}_{\max}^+$ ;
- (2)  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \tilde{\mathbf{B}}_{[0; +\infty[}$ ;
- (3)  $\tilde{\mathbf{A}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}_{[0; +\infty]}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{B}}_{[0; +\infty]}$ ;
- (4)  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}_{[+\infty; +\infty]}$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_{[+\infty; +\infty]}$ ;
- (5)  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{A}}_{[r; +\infty]}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{[r; +\infty]}$ .

*Démonstration.* — Le (2) est une conséquence du (1) et du fait que par définition,  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$ . Les (3) et (4) sont évidents, et le (5) est contenu dans [8, remarque II.1.3]. Reste à montrer le (1) qui suit du fait que par définition  $\mathbf{A}_{\max}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+\{[\tilde{p}]/p - 1\}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{[0; r_0]} = \tilde{\mathbf{A}}^+\{[\tilde{p}]/p\}$  (et  $A\{X\} = A\{X - 1\}$  puisque  $A[X] = A[X - 1]$ ).  $\square$



**Lemme 2.9.** — On a  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}/(p) = \tilde{\mathbf{E}}^+[X, \bar{\pi}^{s-r} X^{-1}]/(\bar{\pi}^s, \bar{\pi}^r X)$ . Notamment si  $r = s$ , alors  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;r]}/(p) = \tilde{\mathbf{E}}^+(\bar{\pi}^r)[X, X^{-1}]$ .

*Démonstration.* — Soit  $A = \tilde{\mathbf{A}}^+\{X, Y\}$  et  $I = (XY - [\bar{\pi}]^{s-r}, p - X[\bar{\pi}]^r, [\bar{\pi}]^s - pY)$  de telle sorte que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  s'identifie à  $A/I$  et donc que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}/(p) = (A/I)/(p)$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$  et la multiplication par  $p$  induit un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & p \downarrow & & p \downarrow & & p \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & I/p & \longrightarrow & A/p & \longrightarrow & (A/I)/p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et comme  $A/I$  est sans  $p$ -torsion, le lemme du serpent montre que  $(A/I)/p$  s'identifie au quotient du  $A/p$  par l'image de  $I$  dans ce dernier. Dans notre situation on a  $A/p = \tilde{\mathbf{E}}^+[X, Y]$  et l'image de  $I$  s'identifie à  $(XY - \bar{\pi}^{s-r}, -X\bar{\pi}^r, \bar{\pi}^s)$  d'où le lemme.  $\square$

**Remarque 2.10.** — Attention au fait que dans le lemme précédent,  $(\bar{\pi}^s, \bar{\pi}^r X)$  est l'idéal de l'anneau  $\tilde{\mathbf{E}}^+[X, \bar{\pi}^{s-r} X^{-1}]$  engendré par  $\bar{\pi}^s$  et  $\bar{\pi}^r X$ .

**2.2. Plongement des  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .** — On va maintenant définir des morphismes de  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . On va montrer que si  $r_n \in I$ , alors l'application  $\varphi^{-n}$  réalise une injection de  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . Pour cela, soit  $J_n = [r_n; r_n]$  avec  $n \geq 0$ . Si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k \geq 0} a_k \left( \frac{p}{[\bar{p}]} \right)^k + \sum_{j \geq 0} b_j \left( \frac{[\bar{p}]}{p} \right)^j = \sum_{k \geq 0} a_k \left[ \left( \frac{p}{[\bar{p}]} - 1 \right) + 1 \right]^k + \sum_{j \geq 0} b_j \left[ \left( \frac{[\bar{p}]}{p} - 1 \right) + 1 \right]^j \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \left( \frac{p}{[\bar{p}]} - 1 \right)^\ell \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} a_k + \sum_{m \geq 0} \left( \frac{[\bar{p}]}{p} - 1 \right)^m \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} b_j \end{aligned}$$

et comme les  $a_j$  et  $b_k$  tendent vers 0, les séries

$$\sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} b_j$$

convergent dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et la série du haut est donc convergente pour la topologie  $\ker(\theta)$ -adique et converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  vers un élément  $\iota_0(x) \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .

**Proposition 2.11.** — L'application  $x \mapsto \iota_0(x)$  est un morphisme injectif de  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et si  $r_0 \in I$ , alors le noyau du morphisme composé  $\theta \circ \iota_0 : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p$  est  $\ker(\theta \circ \iota_0 : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) = ([\bar{p}]/p - 1)\tilde{\mathbf{A}}_I$ .

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord que  $\ker(\theta \circ \iota_0 : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) \subset ([\tilde{p}]/p - 1)\tilde{\mathbf{A}}_I$ . Soit donc  $I = [rr_0; sr_0]$  avec  $r \leq 1 \leq s$  et  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I$  tel que  $\theta \circ \iota_0(x) = 0$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k \geq 0} a_k \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} \right)^k + \sum_{j \geq 0} b_j \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} \right)^j \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} - [\tilde{p}^{1-r}] \right)^\ell \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} [\tilde{p}^{1-r}]^{k-\ell} a_k + \sum_{m \geq 0} \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} - [\tilde{p}^{s-1}] \right)^m \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} [\tilde{p}^{s-1}]^{j-m} b_j \\ &= \sum_{\ell \geq 1} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} - [\tilde{p}^{1-r}] \right)^\ell \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} [\tilde{p}^{1-r}]^{k-\ell} a_k + \sum_{m \geq 1} \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} - [\tilde{p}^{s-1}] \right)^m \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} [\tilde{p}^{s-1}]^{j-m} b_j \\ &\quad + \sum_{k \geq 0} (a_k [\tilde{p}^{1-r}]^k + b_k [\tilde{p}^{s-1}]^k). \end{aligned}$$

les deux premiers termes étant des séries convergent dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  (ne pas oublier que  $a_k \rightarrow 0$  et  $b_j \rightarrow 0$ ) et dont la somme est dans le noyau de  $\theta \circ \iota_0$ , et le troisième terme étant un élément de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  (même argument pour la convergence) qui est annulé par  $\theta$  et qui s'écrit donc  $([\tilde{p}] - p)y$  avec  $y \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ . Montrons que

$$x - \sum_{k \geq 0} (a_k [\tilde{p}^{1-r}]^k + b_k [\tilde{p}^{s-1}]^k) = ([\tilde{p}]/p - 1)z$$

avec  $z \in \tilde{\mathbf{A}}_I$ . On a

$$\begin{aligned} x - \sum_{\ell \geq 0} (a_\ell [\tilde{p}^{1-r}]^\ell + b_\ell [\tilde{p}^{s-1}]^\ell) &= \sum_{\ell \geq 1} a_\ell \left( \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} \right)^\ell - [\tilde{p}^{1-r}]^\ell \right) + \sum_{\ell \geq 1} b_\ell \left( \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} \right)^\ell - [\tilde{p}^{s-1}]^\ell \right) = \\ &= \left( \frac{[\tilde{p}] - p}{p} \right) \left( - \sum_{k \geq 1} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} \right)^k \sum_{\ell \geq k} a_\ell [\tilde{p}^{1-r}]^{\ell-k} + [\tilde{p}^{s-1}] \sum_{j \geq 0} \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} \right)^j \sum_{\ell \geq j+1} b_\ell [\tilde{p}^{s-1}]^{\ell-j-1} \right) \end{aligned}$$

comme le montre un petit calcul, ce qui montre l'assertion quant au noyau de  $\theta \circ \iota_0$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}_I$ .

Enfin montrons que  $\iota_0$  est injectif. Si  $\iota_0(x) = 0$  avec  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ , alors  $\theta \circ \iota_0(x) = 0$  et donc  $x$  est divisible par  $[\tilde{p}]/p - 1$ . Comme  $\iota_0$  est un morphisme d'anneau et que  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est intègre, c'est que  $x = ([\tilde{p}]/p - 1)x_1$  avec  $\iota_0(x_1) = 0$  et  $x_1 \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . En itérant ce procédé on en déduit que  $x \in \cap_{n=0}^{+\infty} ([\tilde{p}]/p - 1)^n \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Reste donc à montrer que  $\cap_{n=0}^{+\infty} ([\tilde{p}]/p - 1)^n \tilde{\mathbf{A}}_{J_0} = 0$ . L'image de cette intersection dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}/(p)$  s'identifie à  $\cap_{n=0}^{+\infty} (X - 1)^n \tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[X, X^{-1}]$  qui est nulle. On en déduit qu'un élément de l'anneau  $\cap_{n=0}^{+\infty} ([\tilde{p}]/p - 1)^n \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  est infiniment divisible par  $p$  et donc nul.  $\square$

**Proposition 2.12.** — *Si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_n}$  on pose  $\iota_n(x) = \iota_0(\varphi^{-n}(x))$ . L'application  $x \mapsto \iota_n(x)$  est un morphisme injectif de  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_n}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et si  $r_n \in I$ , alors le noyau du morphisme composé  $\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p$  est  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) = ([\tilde{p}^n]/p - 1)\tilde{\mathbf{A}}_I$ .*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente, étant donné que l'application  $\varphi^{-n} : \tilde{\mathbf{A}}_{J_n} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  est une bijection, et que  $\varphi^{-n}([\tilde{p}^{p^n}]/p - 1) = [\tilde{p}]/p - 1$ .  $\square$

**Corollaire 2.13.** — Si  $r_n \in I$ , alors  $\iota_n$  réalise une injection de  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .

**Remarque 2.14.** — Le noyau de l'application  $\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p$  est  $\ker(\theta \circ \iota_n) = \varphi^{n-1}(q)\tilde{\mathbf{B}}_I$ . En effet,  $([\tilde{p}^{p^n}] - p) = \varphi^n([\tilde{p}] - p)$ ,  $\varphi^{n-1}(q) = \varphi^n(\omega)$  et on sait que  $[\tilde{p}] - p$  et  $\omega$  engendrent le même idéal de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ .

**Lemme 2.15.** — Les inclusions naturelles de  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  induisent une suite exacte  $0 \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \mathbf{A}_{\text{max}}^+ \oplus \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{J_0} \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — La flèche est  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+ \oplus \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  est surjective car il suffit de décomposer une écriture d'un élément de  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  en deux. Ensuite  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  est contenu dans l'intersection de  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  et de  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  et il reste donc à montrer que l'inclusion

$$\tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+$$

est aussi une surjection. On va d'abord montrer que c'est vrai modulo  $p\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  (on remarquera que modulo  $p$  la flèche n'est plus injective). Rappelons que les anneaux  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  s'identifient à  $\tilde{\mathbf{A}}^+\{X\}/(pX - [\tilde{p}])$  et à  $\tilde{\mathbf{A}}^+\{Y\}/([\tilde{p}]Y - p)$  et que  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}/(p) = \tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[X, X^{-1}]$ . L'image de  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  dans cet anneau s'identifie à  $\tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[1/X]$  et celle de  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  à  $\tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[X]$  ce qui fait que l'image de leur intersection (qui est un sous-ensemble de l'intersection de leurs images) est un sous-anneau de  $\tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})$  et donc que la flèche  $\tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+$  est surjective modulo  $p\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Si l'on prend  $x$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+$  il existe donc  $y \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  tel que  $x - y \in p\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Cela veut dire que  $x - y \in p\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  d'une part et  $\in p\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} + [\tilde{p}]\tilde{\mathbf{A}}^+$  d'autre part (il suffit d'appliquer le lemme 2.9 à tous ces anneaux). Comme  $p$  divise  $[\tilde{p}]$  dans  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  il existe  $z \in [\tilde{p}]\tilde{\mathbf{A}}^+$  tel que  $x - y - z \in p(\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+)$ . On conclut en itérant ce procédé (comme  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  est complet pour la topologie  $p$ -adique).  $\square$

**2.3. L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ .** — Dans ce paragraphe on introduit l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ .

**Définition 2.16.** — Les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$  sont définis par  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{[r; +\infty[}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger = \cup_{r \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ . On munit  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  de la topologie de Fréchet définie par l'ensemble des  $V_I$  où  $I$  parcourt l'ensemble des intervalles fermés de  $[r; +\infty[$ . On définit aussi  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  comme étant l'anneau des entiers de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  pour la valuation  $V_{[r; r]}$ .

**Proposition 2.17.** — On a  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n} \rightarrow \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}$ .

*Démonstration.* — Étant donnée la remarque 2.14 il suffit de montrer que  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) = ([\tilde{p}^{p^n}]/p - 1)\tilde{\mathbf{B}}_I$  pour tout  $I \subset [r_n; +\infty[$  ce qui suit de 2.12.  $\square$

**Lemme 2.18.** — *On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r} \rightarrow 0$$

*Démonstration.* — On va d'abord montrer que si  $r_n \geq r$ , alors on a

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]} \rightarrow 0$$

il est clair que tout élément de  $\tilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]}$  s'écrit comme somme d'éléments des deux autres et il faut vérifier que deux écritures différentes diffèrent par un élément de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  ce qui revient à montrer que  $\tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]} \cap \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} = \tilde{\mathbf{B}}^+$ , ou encore en appliquant  $\varphi^{-n}$  que  $\tilde{\mathbf{B}}_{[rp^{-n};+\infty]} \cap \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_0]} = \tilde{\mathbf{B}}^+$  ce qui suit du lemme 2.15.

Montrons maintenant le lemme. Si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$ , alors pour tout  $n$  on peut écrire (puisque  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r} \subset \tilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]}$ ):  $x = a_n + b_n$  avec  $a_n \in \tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$  et  $b_n \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]}$ . Remarquons que  $x = a_{n+1} + b_{n+1}$  est une autre écriture de ce type (puisque  $a_{n+1} \in \tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$  et  $b_{n+1} \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]}$ ) et donc que  $b_{n+1} - b_n \in \tilde{\mathbf{B}}^+$  ce qui fait que quitte à modifier  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  par des éléments de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  on peut supposer que  $a_n = a_{n+1}$  et  $b_n = b_{n+1}$  ce qui fait que  $x = a + b$  avec  $a \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et  $b \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ .  $\square$

**Proposition 2.19.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est complet pour sa topologie de Fréchet et contient  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  comme sous-anneau dense.*

*Démonstration.* — Le fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est complet suit du fait que chacun des  $\tilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$  est complet pour  $V_{[r;s]}$ . Ensuite montrons que  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  est dense. Soient  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  et  $r < s < t$  trois réels. Alors comme  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{[r;t]}$ , on peut l'écrire comme

$$x_n + \sum_{k>n} b_k \left( \frac{[\overline{\pi}]^t}{p} \right)^k$$

avec  $x_n \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et  $b_k \in \tilde{\mathbf{A}}_K^+$ , si  $n \gg 0$ . On a alors

$$x - x_n \in \left( \frac{[\overline{\pi}]^t}{p} \right)^n \tilde{\mathbf{A}}_{[r;t]} \subset \left( \frac{[\overline{\pi}]^t}{p} \right)^n \tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$$

et un petit calcul montre qu'alors  $V_{[r;s]}(x - x_n) \geq n(t/s - 1)$ . Un argument d'extraction diagonale permet de trouver une suite qui converge vers  $x$  pour la topologie de Fréchet.  $\square$

**Corollaire 2.20 (Principe du maximum).** — *Pour  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  et  $I = [s;t] \ni r$ , on a  $V_I(x) = \inf\{V_{[s;s]}(x); V_{[t;t]}(x)\}$ .*

*Démonstration.* — Un petit argument montre que c'est vrai avec  $W_I$  à la place de  $V_I$  pour  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ ; on conclut par densité et continuité.  $\square$

**Lemme 2.21.** — *Si  $a$  est un élément de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  qui vérifie  $\lambda = v_{\mathbf{E}}(a) > 0$ , alors la topologie définie par  $V_I$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est plus fine que la topologie  $[a]$ -adique c'est-à-dire que si  $V_I(y_i) \rightarrow$*

$+\infty$ , alors  $y_i \rightarrow 0$  pour la topologie  $[a]$ -adique. De plus les topologies  $[a]$ -adiques et  $V_{[r;r]}$ -adiques sont équivalentes.

*Démonstration.* — Soit  $(y_i)$  une suite telle que  $V_I(y_i) \geq n$  pour  $i \geq i_0$  et soit  $m \leq \frac{nrp}{\lambda(p-1)}$ . Alors un petit calcul montre que  $V_I(y_i[a]^{-m}) \geq 0$  pour  $i \geq i_0$  et donc  $V_{[r;r]}(y_i[a]^{-m}) \geq 0$  pour  $i \geq i_0$  ce qui revient à dire que  $y_i \in [a]^m \tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  pour  $i \geq i_0$  et donc que  $y_i$  tend vers 0 pour la topologie  $[a]$ -adique.

De même si  $y \in [a]^m \tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$ , alors  $V_{[r;r]}(y) \geq \frac{(p-1)m\lambda}{pr}$  et donc les deux topologies sont équivalentes. On prendra garde au fait que cela n'est plus vrai si  $I$  n'est plus réduit à  $[r;r]$ .  $\square$

**Corollaire 2.22.** — L'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$  est complet pour la valuation  $V_{[r;r]}$ .

*Démonstration.* — Dans [8, II.1.2] on montre que  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$  est séparé complet pour la topologie  $[a]$ -adique si  $v_{\mathbf{E}}(a) > 0$ .  $\square$

**2.4. Les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,r}$  et leurs plongements dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .** — Ce paragraphe est consacré à la construction d'un anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  qui est à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  ce que  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  est à  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ . On commence par construire une application logarithme.

**Proposition 2.23.** — Il existe une et une seule application  $x \mapsto \log[x]$  de  $\tilde{\mathbf{E}}$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[X]$  qui vérifie  $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$ ,  $\log[x] = 0$  si  $x \in \bar{k}$ ,  $\log[\bar{\pi}] = X$  et

$$\log[x] = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} \frac{([x] - 1)^n}{n} \text{ si } v_p(x^{(0)} - 1) \geq 1$$

*Démonstration.* — Soit  $U_1$  l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbf{E}}$  tels que  $v_p(x^{(0)} - 1) \geq 1$ . Pour  $x \in U_1$  la série  $\log[x] = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} ([x] - 1)^n / n$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$  et  $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$  par un argument de séries formelles. On en déduit notamment que  $\log[x] = \varphi(\log[x]/p)$  ce qui fait que l'image de  $U_1$  par  $\log$  est en fait incluse dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ . Si  $x \in \tilde{\mathbf{E}}$  est tel que  $v_p(x^{(0)} - 1) > 0$ , alors il existe  $n$  tel que  $x^{p^n} \in U_1$  et le  $\log$  s'étend donc à l'ensemble des  $x$  tels que  $v_p(x^{(0)} - 1) > 0$ . Ensuite soit  $x \in (\tilde{\mathbf{E}}^+)^*$ . On peut écrire  $x = x_0(1 + y)$  avec  $x_0 \in \bar{k}$  et  $y \in \mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}^+}$  de manière unique ce qui montre que  $\log$  s'étend à  $(\tilde{\mathbf{E}}^+)^*$ . Enfin  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  est un anneau de valuation et le choix de  $\log[\bar{\pi}]$  achève de déterminer l'application  $\log : \tilde{\mathbf{E}} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[X]$ .  $\square$

**Proposition 2.24.** — Il existe une unique application  $\log : \tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[X]$  telle que  $\log([x]) = \log[x]$ ,  $\log(p) = 0$  et  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ .

*Démonstration.* — Si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  est exactement divisible par  $p^a$ , alors il existe  $r$  tel que l'on peut écrire  $x = p^a \overline{[x/p^a]}(1 - pz)$  avec  $z \in \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ , où  $\overline{[x/p^a]}$  est l'image de  $x/p^a$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ ,

et la série

$$\log(1 - pz) = - \sum_{n \geq 1} \frac{(pz)^n}{n}$$

converge dans  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r}$  qui est complet pour la topologie  $p$ -adique ce qui permet d'étendre  $\log$  par multiplicativité à  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  (et aussi à  $\tilde{\mathbf{B}}^+$ ).  $\square$

On pose  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[X]$  muni de l'action de  $G_F$  et du Frobenius donnés par  $\varphi(X) = pX$  et  $g(X) = X + \log([g(\bar{\pi})/\bar{\pi}])$  ce qui fait que l'on peut prolonger l'application  $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  pour  $n$  assez grand par  $\iota_n(X) = p^{-n} \log[\bar{\pi}]$ . La proposition suivante montre que  $\iota_n$  est injectif et commute aux actions de  $G_F$  et de Frobenius (là où ce-dernier est défini), et dès lors on écrira  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[\log[\bar{\pi}]]$ . Soit aussi  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} = \cup_{r \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r}$ .

**Proposition 2.25.** — *L'application  $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}[X] \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  qui étend  $\iota_n$  par  $\iota_n(X) = p^{-n} \log[\bar{\pi}]$  est injective, commute à l'action de Galois et sa restriction à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  est  $\varphi^{-n}$ .*

*Démonstration.* — Les deux derniers points sont triviaux. Pour montrer le premier, il suffit de montrer que l'élément  $\log[\bar{\pi}]$  est transcendant sur le corps des fractions de  $\iota_n(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$  et cela revient au même de montrer que  $u = \log([\bar{p}])$  est transcendant sur  $\iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ . Montrons tout d'abord que l'on a  $u \notin \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ . Soit  $\beta = 1 - [\bar{p}]/p$  et  $S$  l'anneau des éléments de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  qui appartiennent à  $F \otimes_{\mathcal{O}_F} \tilde{\mathbf{A}}^+[[\beta]]$ . Rappelons que Fontaine a montré que  $u \notin \text{Frac } S$  (cf [24, 4.3.2]). La démonstration de la proposition 2.11 montre que si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$ , alors  $\iota_0(x) \in S$  (en regardant la série qui donne l'image de  $x$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ ) et donc si  $u \in \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ , alors on a  $x, y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$  tels que  $\iota_0(y) = \iota_0(x)u$  (puisque  $\varphi^{-n}(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}) = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$ ) et le résultat de Fontaine montre que cela n'est pas possible et donc que  $u \notin \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ .

Montrons maintenant que  $u$  est transcendant sur  $\iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$  pour tout  $n$ . Un petit calcul montre qu'il existe  $\eta : G_F \rightarrow \mathbf{Q}_p$  tel que  $g(u) = u + \eta(g)t$ . Soit  $u^d + x_{d-1}u^{d-1} + \dots + x_0 = 0$  le polynôme minimal de  $u$ . Alors en appliquant  $g$  et en comparant les coefficients il vient  $g(x_{d-1}) = x_{d-1} + d\eta(g)t$  ce qui fait que  $x_{d-1} - du$  s'identifie à un élément  $c$  de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  stable par  $G_F$  et donc que  $u = d^{-1}(x_{d-1} - c) \in \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ , avec  $c \in F$ , et on vient de voir que cela est impossible.  $\square$

Par la proposition 2.24 il existe un élément  $\log(\pi) \in \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  (remarquons que l'on a  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[\log(\pi)]$  puisque la série qui définit  $\log([\bar{\pi}]/\pi)$  converge dans  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$ ). On munit  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  de l'opérateur de monodromie  $N$  défini par

$$N \left( \sum_{k=0}^d a_k \log(\pi)^k \right) = - \sum_{k=0}^d k a_k \log(\pi)^{k-1}$$

c'est-à-dire que  $N = -d/d \log(\pi)$ . Un calcul facile montre que  $N$  commute à l'action de  $G_F$ .

**Remarque 2.26.** — L'élément  $\log(\pi)$  est plus agréable que  $\log[\overline{\pi}]$ , par exemple  $\iota_n(\log(\pi)) \in F_n[[t]]$  si  $n \geq 1$ .

**2.5. Action de  $H_K$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ .** — Dans ce paragraphe on décrit les invariants de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  sous l'action de  $H_K$ . Soit  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{H_K}$ .

**Lemme 2.27.** — Soit  $I$  un intervalle qui contient  $[0; r]$  et  $J = I \cap [r; +\infty[$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_K^+ \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}_I^{H_K} \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_J^{H_K} \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — On a vu que l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}_I \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_J \rightarrow 0$  et en prenant les invariants par  $H_K$  on trouve

$$0 \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_K^+ \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}_I^{H_K} \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_J^{H_K} \xrightarrow{\delta} H^1(H_K, \widetilde{\mathbf{B}}^+)$$

et pour montrer le lemme il suffit de montrer que  $\delta = 0$ . Si  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_J^{H_K}$ , alors comme  $[\overline{\pi}]$  est inversible dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_J^{H_K}$  (sauf si  $r = 0$ , auquel cas le lemme est trivial), on a  $x[\overline{\pi}]^{-1} \in \widetilde{\mathbf{B}}_J^{H_K}$  et il existe  $n$  tel que  $\delta(x[\overline{\pi}]^{-1}) \in H^1(H_K, p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}^+)$  et donc  $\delta(p^n(x[\overline{\pi}]^{-1})[\overline{\pi}]) \in H^1(H_K, W(\mathfrak{m}_{\mathbf{E}^+}))$ . Or ce dernier espace de cohomologie est nul ([17, IV.2.4] appliqué à la représentation triviale) et on en déduit que  $\delta(x) = p^{-n}\delta(p^n x) = 0$ .  $\square$

**Corollaire 2.28.** — Dans le cas où  $I = [0; +\infty[$ , on obtient la suite exacte:

$$0 \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_K^+ \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \oplus (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+)^{H_K} \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow 0$$

**Lemme 2.29.** — Si  $x \in (\mathbf{B}_{\text{max}}^+)^{H_K}$ , alors il existe une suite  $a_i$  d'éléments de  $\widetilde{\mathbf{B}}_K^+$ , qui tend vers 0, telle que  $x = \sum_{i \geq 0} a_i(\omega/p)^i$ .

*Démonstration.* — On se ramène immédiatement à montrer que si  $x \in (\mathbf{A}_{\text{max}}^+)^{H_K}$ , alors il existe une suite  $a_i$  d'éléments de  $\widetilde{\mathbf{A}}_K^+$ , telle que  $x = \sum_{i \geq 0} a_i(\omega/p)^i$ . On va d'abord montrer que  $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}_K^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}_{\infty}}$  est surjective. Si  $K = F$ , c'est bien connu (on se ramène à montrer que c'est vrai modulo  $p$ , et cela résulte alors du fait que les  $\{\varepsilon^i, i \in \mathbf{Z}[1/p] \cap [0; 1[)\}$  forment une base de  $\widetilde{\mathbf{E}}_F^+ / (\varepsilon - 1)\widetilde{\mathbf{E}}_F^+$  (voir [8, III.2.1])); ensuite soient  $\iota_K(\varpi_K)$  l'élément construit dans la proposition 1.1,  $\varpi_n = \iota_K(\varpi_K)^{(n)}$ , et  $\mathfrak{a} = \{x \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_{\infty}}, v_p(x) \geq 1/p\}$ . Rappelons [9, p. 243] que si  $n \gg 0$  et  $x \in \mathcal{O}_{K_{n+1}}$ , alors  $N_{K_{n+1}/K_n}(x) - x^p \in \mathfrak{a}$ . Comme  $v_{\mathbf{E}}(\iota_K(\varpi_K)) = \frac{p}{(p-1)e_K}$  on a, pour  $n \gg 0$ ,  $v_p(\varpi_n) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)e_K}$  et donc, si  $n \gg 0$ , alors  $\varpi_n$  est égal modulo  $\mathfrak{a}$  à une uniformisante de  $\mathcal{O}_{K_n}$ . Ceci implique que l'application  $\mathcal{O}_{F_n}[\varpi_n] \rightarrow \mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$  est surjective, et donc que  $\mathcal{O}_{\widehat{F}_{\infty}}[\varpi_n]_{n \geq 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}_{\infty}}$  est surjective (puisqu'elle l'est modulo  $\mathfrak{a}$  et que les deux  $\mathcal{O}_{\widehat{F}_{\infty}}$ -modules en présence sont complets pour la topologie  $\mathfrak{a}$ -adique). Comme  $\varpi_n = \theta \circ \varphi^{-n}([\iota_K(\varpi_K)])$ , ceci montre que  $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}_K^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}_{\infty}}$  est surjective. Soit maintenant

$x \in (\mathbf{A}_{\max}^+)^{H_K}$ . On définit deux suites  $x_i$  et  $a_i$  de  $(\mathbf{A}_{\max}^+)^{H_K}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_K^+$  de la manière suivante:  $x_0 = x$ , et si  $i \geq 0$ , alors comme  $\theta(x_i) \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$ , il existe  $a_i \in \tilde{\mathbf{A}}_K^+$  tel que  $\theta(x_i) = \theta(a_i)$ . Ceci montre que  $x_i - a_i$  est dans le noyau de  $\theta$  et est donc divisible par  $\omega/p$  dans  $\mathbf{A}_{\max}^+$ . On pose  $x_{i+1} = (p/\omega)(x_i - a_i)$ . Il est clair qu'alors,  $x = \sum_{i \geq 0} a_i(\omega/p)^i$ .

Montrons que  $a_i \rightarrow 0$ : si  $x \in \mathbf{A}_{\max}^+$  alors il existe une suite  $\alpha_i = o(i)$ , telle que  $x \in p^{-\alpha_i} \tilde{\mathbf{A}}^+ + (\omega/p)^i \mathbf{A}_{\max}^+$ , et un petit calcul montre que cela force  $a_i \rightarrow 0$ .  $\square$

**Proposition 2.30.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  est dense dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  pour la topologie de Fréchet de ce dernier.*

*Démonstration.* — Cela revient à montrer que si l'on se fixe un intervalle  $I = [r; r_n]$  avec  $n \gg 0$ , alors pour tout  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  il existe une suite  $x_j \in \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  telle que  $V_I(x - x_j) \rightarrow +\infty$ . Étant donnée la décomposition du corollaire 2.28 il suffit de le faire pour  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_{n+m}]}^{H_K}$  avec  $m \gg 0$ . On se fixe  $m$  tel que  $V_I(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1) > 0$  (c'est possible car pour tout  $I$  compact,  $\varphi^{n+m-1}(q/p) \rightarrow 1$  pour  $V_I$ ). Le lemme 2.29 auquel on applique  $\varphi^{n+m}$  montre que tout élément  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_{n+m}]}^{H_K}$  peut s'écrire  $x = \sum_{i \geq 0} z_i(\varphi^{n+m-1}(q/p))^i$  où  $z_i$  est une suite de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^+$  qui tend vers 0, et donc que  $x = \sum_{i \geq 0} z_i(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$  où  $y_i$  est une suite bornée de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^+$ . Comme  $V_I(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1) > 0$ , la suite  $(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$  tend vers 0 pour  $V_I$  et donc, pour montrer la proposition, il suffit de prendre  $x_j = \sum_{i=0}^j z_i(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$ .  $\square$

**2.6. Les anneaux  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  et  $\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger$ .** — Soit  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  le complété de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  pour la topologie de Fréchet. On va donner une description nettement plus agréable des  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ . On a déjà vu qu'il existe  $n(K) \in \mathbf{N}$  et  $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n(K)}}$  dont l'image modulo  $p$  est une uniformisante de  $\mathbf{E}_K$  et que si  $r \geq r_{n(K)}$ , alors tout élément  $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  peut s'écrire  $x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$  où  $a_k \in F$  et où la série  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  est holomorphe et bornée sur la couronne  $\{p^{-1/e_K r} \leq |T| < 1\}$ .

L'anneau  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  est alors muni de la topologie induite par celle de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  qui devient la topologie de la convergence sur les couronnes définies par un intervalle compact ce qui fait que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est le complété de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  pour cette topologie et donc que

**Proposition 2.31.** — *Soit  $\mathcal{H}_F^\alpha(X)$  l'ensemble des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  où  $a_k \in F$  et telles que tout  $\rho \in [\alpha; 1[$ ,  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |a_k| \rho^k = 0$  et soit  $\alpha(K, r) = p^{-1/e_K r}$ . Alors l'application  $\mathcal{H}_F^{\alpha(K,r)} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  qui à  $f$  associe  $f(\pi_K)$  est un isomorphisme.*

La fin de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition suivante:

**Proposition 2.32.** — *Si  $r$  est un entier assez grand, alors il existe des applications  $R_k : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \varphi^{-k}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^k r})$ , telles que:*

- (1)  $R_k$  est une section continue de l'inclusion  $\varphi^{-k}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^k r}) \subset \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ ;
- (2)  $R_k$  est  $\varphi^{-k}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^k r})$ -linéaire;



- (3) si  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k(x) = x$ ;  
(4) si  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , et  $\gamma \in \Gamma_K$ , alors  $\gamma \circ R_k(x) = R_k \circ \gamma(x)$ .

Soit  $I = p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0; 1[$ , si  $i \in I$ , soit  $\varepsilon^i = (\varepsilon^{(n)})^{p^{ni}}$ , pour  $n$  assez grand tel que  $p^{ni} \in \mathbf{Z}$ . Rappelons (voir [8, III.2], par exemple) que tout élément  $x \in \widetilde{\mathbf{E}}_F^+$  s'écrit de manière unique sous la forme:  $x = \sum_{i \in I} \varepsilon^i \bar{a}_i(x)$ , où  $(\bar{a}_i(x))_i$  est une suite de  $\mathbf{E}_F^+$  qui tend vers 0. On en déduit que tout élément  $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$  s'écrit de manière unique sous la forme:  $x = \sum_{i \in I} [\varepsilon^i] a_i(x)$ , où  $(a_i(x))_i$  est une suite de  $\mathbf{A}_F^+$  qui tend vers 0. On pose alors, pour  $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ ,  $R_k(x) = \sum_{i \in p^{-k}\mathbf{Z} \cap I} [\varepsilon^i] a_i(x)$ . En particulier,  $R_k(\widetilde{\mathbf{A}}_F^+) \subset \varphi^{-k}(\mathbf{A}_F^+)$ . Rappelons que si  $r$  est un entier  $\geq 2$ , alors  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^{\dagger,r} = \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/\pi^r\}$ , et que pour définir les  $R_k$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^{\dagger,r}$  dans [8, III.2], on étend  $R_k$  à  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^{\dagger,r}$  par la formule  $R_r(\sum a_i(p/\pi^r)^i) = \sum R_k(a_i)(p/\pi^r)^i$ . Pour construire les  $R_k$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , et démontrer la proposition 2.32, on va suivre un chemin semblable.

**Lemme 2.33.** — Soit  $r$  un entier  $\geq 2$ . On a  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} = \cap_{s \geq r} \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/\pi^r, \pi^s/p\}$ .

*Démonstration.* — On va montrer que  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} = \cap_{s \geq r} \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/[\pi^r], [\pi^s]/p\}$ , le lemme en suit car si  $r > 1$ , alors  $\pi/[\pi]$  est une unité de  $\mathbf{A}^{\dagger,r}$ .

Soit  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$ , et  $n \gg 0$ . On peut écrire  $x = a + b$ , avec  $a \in \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$ , et  $b \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]})^{H_K}$  par le lemme 2.27. Le lemme 2.29 montre que  $b$  peut s'écrire  $b = \sum b_i(\varphi^n(\omega)/p)^i$ , où  $b_i$  est une suite de  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$  qui tend vers 0. On peut d'ailleurs remplacer  $\omega$  par n'importe quel élément  $u$  de  $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ , tel que les idéaux  $(\omega, p)$  et  $(u, p)$  de  $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$  soient égaux. On peut notamment écrire  $x = \sum c_i([\pi]^{rn}/p)^i$ , où  $c_i$  est une suite de  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$  qui tend vers 0. Ceci étant vrai pour tout  $n \gg 0$ , le lemme en résulte.  $\square$

**Lemme 2.34.** — Si on étend  $R_k$  à  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/\pi^r, \pi^s/p\}$ , par

$$R_k \left( \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j} \left( \frac{p}{\pi^r} \right)^i \left( \frac{\pi^s}{p} \right)^j \right) = \left( \sum_{i,j \geq 0} R_k(a_{i,j}) \left( \frac{p}{\pi^r} \right)^i \left( \frac{\pi^s}{p} \right)^j \right)$$

alors, si  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/\pi^r, \pi^s/p\}$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k(x) = x$ .

*Démonstration.* — Cela suit du fait que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k(a_{i,j}) = a_{i,j}$ , d'une part, et que  $a_{i,j} \rightarrow 0$ , d'autre part.  $\square$

*Démonstration de la proposition 2.32.* — Comme on a défini les applications  $R_k$  de  $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/\pi^r, \pi^s/p\}$  dans lui-même, et que  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} = \cap_{s \geq r} \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \{p/\pi^r, \pi^s/p\}$  (par le lemme 2.33), on en déduit des applications  $R_k : \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$ . Les deux premiers points de la proposition 2.32 sont clairs sur la définition pour  $K = F$ . Le troisième suit (toujours si  $K = F$ ) du lemme précédent.

Cela définit  $R_k$  dans le cas où  $K = F$ . Dans le cas général,  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}/\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$  est une extension de degré  $e_K$  si  $r$  est assez grand. Soient alors  $T_{K/F} = \sum_{\sigma \in H_F/H_K} \sigma$ ,  $\{e_i\}$  une base de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  sur  $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ , et  $e_i^*$  la base duale pour la forme linéaire  $(x, y) \mapsto T_{K/F}(xy)$ . Si  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , on a

$$x = \sum T_{K/F}(xe_i^*)e_i = \sum a_i e_i \text{ avec } a_i \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$$

et on pose  $R_k(x) = \sum R_k(a_i)e_i$ . Comme  $R_k$  est  $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ -linéaire, cette définition ne dépend pas du choix de la base  $e_i$ .

Les deux premiers points de la proposition sont clairs sur la définition. On a déjà montré le troisième, dans le cas où  $K = F$ , et dans le cas général, si on écrit  $x = \sum_i a_i e_i$ , alors  $R_k(x) \rightarrow x$  car  $R_k(a_i) \rightarrow a_i$  pour chaque  $i$ .

Reste à voir que  $R_k$  commute à  $\gamma \in \Gamma_K$ . C'est vrai sur  $\widetilde{\mathbf{A}}_F^{\dagger}$  car l'écriture que l'on utilise pour définir  $R_k$  est unique. La manière dont on a construit  $R_k$  montre qu'il en est de même sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$ . Comme  $\gamma(e_i) = \sum g_{i,j} e_j$ , avec  $g_{i,j} \in \mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ , on a  $R_k(\gamma(e_i)) = \gamma(e_i) = \gamma(R_k(e_i))$ :  $R_k$  commute donc à  $\gamma \in \Gamma_K$ .  $\square$

On définit aussi  $\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}[\log(\pi)]$ , cet anneau est stable par les actions de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  étant donné que  $\varphi(\log(\pi)) = \log(\varphi(\pi)) = p \log(\pi) + \log(\varphi(\pi)/\pi^p)$  et  $\gamma(\log(\pi)) = \log(\pi) + \log(\gamma(\pi)/\pi)$  et que les séries qui définissent  $\log(\varphi(\pi)/\pi^p)$  et  $\log(\gamma(\pi)/\pi)$  convergent dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ .

Remarquons que si  $n \geq 1$ , alors  $\iota_n(\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger,r_n}) \subset K_n[[t]]$ .

**Définition 2.35.** — On prolonge les  $R_k$  en une section  $\varphi^{-k}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^k r})$ -linéaire de l'inclusion de  $\varphi^{-k}(\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger,p^k r}[1/t])$  dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^{\dagger,r}[1/t]$ : ils commutent toujours à  $\Gamma_K$ , et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k(x) = x$  si  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^{\dagger,r}[1/t]$ .

### 3. Application aux représentations $p$ -adiques

Ce chapitre est consacré à l'application des constructions de la section précédente à la caractérisation des représentations  $p$ -adiques semi-stables (et cristallines) en termes du  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module qui leur est associé. On montre en particulier que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{st}}(V) &= (\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K} \text{ et} \\ \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) &= (\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K} \end{aligned}$$

**3.1. Régularisation par le Frobenius.** — On commence par établir un résultat de régularisation par le Frobenius, qui est à la base des applications suivantes. Le Frobenius  $\varphi$  est une bijection de  $\widetilde{\mathbf{B}}_I$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{pI}$  et induit donc une bijection de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,pr}$  ainsi que de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,r}$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,pr}$  puisque  $\varphi(\log[\overline{\pi}]) = p \cdot \log[\overline{\pi}]$ .

**Lemme 3.1.** — Soit  $h$  un entier positif. Alors

$$\bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r} = \widetilde{\mathbf{A}}^+ \text{ et } \bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs} \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, p^{-s}r} \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$$

*Démonstration.* — Montrons le premier point: comme  $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r}$  il s'écrit de manière unique sous la forme  $\sum_{k \geq 0} p^k [x_k]$  et de même  $p^{hs}x = \sum p^{k+hs} [x_k]$ . Comme  $p^{hs}x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r}$  c'est que

$$v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{rp^{1-s}}{p-1}(k+hs) \geq 0$$

ce qui implique que

$$v_{\mathbf{E}}(x_k) \geq -\frac{(k+hs)r}{p^{s-1}(p-1)}$$

et donc (en laissant tendre  $s$  vers  $+\infty$ ) que  $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geq 0$  ce qui fait que  $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ .

Passons au deuxième point. Pour tout  $s$  on peut écrire  $x = a_s + b_s$  avec  $a_s \in p^{-hs} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r}$  et  $b_s \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ . Par le lemme 2.15 on a  $a_s - a_{s+1} \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$  et d'autre part  $a_s - a_{s+1} \in p^{-h(s+1)} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r}$  ce qui fait que  $a_s - a_{s+1} \in p^{-h(s+1)} \widetilde{\mathbf{A}}^+$  et que quitte à modifier  $a_{s+1}$  on peut supposer que  $a_s = a_{s+1} = a$ . On a alors  $a \in \bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r} = \widetilde{\mathbf{A}}^+$  et donc  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ .  $\square$

**Proposition 3.2 (Régularisation par le Frobenius).** — Soit  $r$  et  $u$  deux entiers positifs et  $A \in M_{u \times r}(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger})$ . On suppose qu'il existe  $P \in \text{GL}_u(F)$  telle que  $A = P\varphi^{-1}(A)$ . Alors  $A \in M_{u \times r}(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+)$ .

*Démonstration.* — Soit  $A = (a_{ij})$  et  $a_{ij} = \sum_{n=0}^d a_{ij,n} \log[\overline{\pi}]^n$ . Soit  $h_0 \in \mathbf{Z}$  tel que  $p^{h_0}P \in M_u(\mathcal{O}_F)$  et  $h = h_0 + d$ . L'hypothèse reliant  $A$  et  $P$  peut s'écrire:

$$p_{i1}\varphi^{-1}(a_{1j}) + \cdots + p_{iu}\varphi^{-1}(a_{uj}) = a_{ij} \quad \forall i \leq u, j \leq r$$

et comme  $\varphi^{-1}(\log[\overline{\pi}]^n) = p^{-n} \log[\overline{\pi}]^n$ , on en tire que si  $a_{ij,n} \in p^{-c} \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ , alors comme  $p^{h_0}p_{ik} \in \mathcal{O}_F$  et  $\varphi^{-1}(a_{ik,n}) \in p^{-c} \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, r/p}$ , on a  $a_{ij,n} \in p^{-h-c} \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, r/p}$ . On itère ce procédé et il en sort finalement que l'on a  $a_{ij,n} \in \bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs-c} \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, rp^{-s}}$ . On est en mesure d'appliquer le lemme 3.1 à  $p^c a_{ij,n}$  et la proposition suit.  $\square$

**3.2. Représentations semi-stables.** — Soient  $\mathbf{B}_{\text{log}, K}^{\dagger, r} = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}[\log(\pi)]$  et

$$\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V) = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V) \text{ et } \mathbf{D}_{\text{log}}^{\dagger}(V) = \mathbf{B}_{\text{log}, K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$$

Le théorème 1.3 montre que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{log}}^{\dagger}(V)$  sont des  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$ - et  $\mathbf{B}_{\text{log}, K}^{\dagger}$ -modules libres de rang  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . Si  $M$  est un  $G_F$ -module soit  $M(i)$  le tordu de  $M$  par  $\chi^i$  (twist de Tate).

**Proposition 3.3.** — *On a*

$$\{x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}, g(x) = \chi^i(g)x, \forall g \in G_K\} = \begin{cases} Ft^i & \text{si } i \geq 0; \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Soit  $V_i^n = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r_n}(i))^{G_K}$ . C'est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie (puisque  $\iota_n$  réalise une injection de  $V_i^n$  dans  $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{G_K} = K$ ) stable par Frobenius et la proposition 3.2 implique que  $V_i^n = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+(i))^{G_K}$  ce qui fait [24] que  $V_i^n = F$ . Comme  $V_i = \cup_{n=0}^{+\infty} V_i^n$  cela démontre le résultat.  $\square$

Soit  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , rappelons que  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . Si  $V$  a ses poids de Hodge-Tate négatifs, alors  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  et en général  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = t^{-d}\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V(-d))$  pour  $d$  assez grand.

**Proposition 3.4.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie, et le morphisme induit par l'inclusion de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) \rightarrow (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

*est un isomorphisme de  $(\varphi, N)$ -modules.*

*Démonstration.* — Si  $n \in \mathbf{N}$ , alors  $D_n = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r_n} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie  $\leq [K : F]d$ , car  $\iota_n$  réalise une injection de  $D_n$  dans  $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ , qui est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $\leq d$ . Si l'on prend  $[K : F]d + 1$  éléments de  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , ils vivent dans  $D_n$  pour  $n \gg 0$ , et vérifient donc une relation de dépendance  $F$ -linéaire. C'est donc que  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $\leq [K : F]d$ .

Passons maintenant au deuxième point. Soient  $v_1, \dots, v_r$  et  $d_1, \dots, d_u$  des  $\mathbf{Q}_p$ - et  $F$ -bases de  $V$  et  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . Il existe une matrice  $A \in M_{r \times u}(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger})$  telle que  $(d_i) = A(v_i)$  (les  $(d_i)$  et  $(v_i)$  sont des vecteurs colonnes). Soit  $P \in \mathrm{GL}_u(F)$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(d_i)$  (qui est inversible car  $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  est une bijection). On a alors  $\varphi(A) = PA$  et donc  $A = \varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(A)$ ; la proposition 3.2 montre que  $A \in M_{r \times u}(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)$  et donc que  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \subset (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Une représentation  $V$  à poids négatifs est donc semi-stable si et seulement si elle est  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ -admissible et elle est cristalline si et seulement si elle est  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$ -admissible, c'est-à-dire si elle est  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ -admissible et que ses périodes sont tuées par  $N$ .

De plus, si les poids de Hodge-Tate de  $V$  ne sont pas négatifs, alors en tordant  $V$  on en déduit que  $V$  est semi-stable si et seulement si elle est  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t]$ -admissible et elle est cristalline si et seulement si elle est  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[1/t]$ -admissible.

**Proposition 3.5.** — *Si  $V$  est semi-stable on a un isomorphisme de comparaison:*

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V) = \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

*Démonstration.* — Ceci résulte du fait que dans ce cas on a déjà:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V) = \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

il suffit alors de tensoriser les deux membres par  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t]$  au-dessus de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t]$ .  $\square$

**Théorème 3.6.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors*

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$$

*Notamment  $V$  est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si  $(\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$  (respectivement  $(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ ) est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ .*

*Démonstration.* — Le deuxième point est une conséquence immédiate du premier. Ensuite comme  $\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t] \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$  (et que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t] \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ ) les résultats précédents montrent que  $(\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$  (resp  $(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ ) est inclus dans  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  (resp dans  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ ).

Montrons donc que  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset (\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ , et que  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \subset (\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ . Il suffit de s'occuper du cas semi-stable car le cas cristallin en suit en faisant  $N = 0$ . Soit  $r = \dim_F(\mathbf{D}_{\text{st}}(V))$ . On peut supposer (quitte à tordre) les poids de Hodge-Tate de  $V$  négatifs puisque l'on a inversé  $t$  partout. On sait qu'alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  et de plus  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$  puisque  $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$  a la bonne dimension. On en déduit que si l'on choisit une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$  et  $\{d_i\}$  une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , alors la matrice  $M \in M_{r \times d}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger})$  définie par  $(d_i) = M(e_i)$  est de rang  $r$  et vérifie  $\gamma_K(M)G - M = 0$  où  $G \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_K^{\dagger})$  est la matrice de  $\gamma_K$  dans la base  $\{e_i\}$ .

Les opérateurs  $R_m$  introduits au paragraphe 2.6 sont  $\mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger}$ -linéaires et commutent à  $\Gamma_K$  (voir la proposition 2.32 et la définition 2.35) ce qui fait que  $\gamma_K(R_m(M))G - R_m(M) = 0$ . De plus,  $R_m(M) \rightarrow M$  et si  $M \in M_{r \times d}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger, r_n})$ , alors  $R_m(M) \in M_{r \times d}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger, r_n})$ . Soit  $N = \varphi^m(R_m(M))$ . On a alors  $\gamma_K(N)\varphi^m(G) = N$  et comme les actions de  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  commutent sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  on a  $\varphi(G) = \gamma_K(P)GP^{-1}$  ( $P$  est la matrice de  $\varphi$  et est inversible car  $\varphi$  est surconvergent et  $\mathbf{B}_K^{\dagger}$  est un corps) ce qui fait que si  $Q = \varphi^{m-1}(P) \dots \varphi(P)P$ , alors  $\varphi^m(G) = \gamma_K(Q)GQ^{-1}$  et donc  $\gamma_K(NQ)G = (NQ)$ . La matrice  $NQ$  détermine  $r$  éléments de  $\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)$  qui sont fixés par  $\gamma_K$ . Il reste à montrer que ces éléments sont libres sur  $F$  quand  $m$  est assez grand. Mais comme  $R_m(M) \rightarrow M$ , la matrice  $NQ$  va être de rang  $r$  pour  $m$  assez grand (puisque  $M$  est de rang  $r$ ) et donc déterminer un sous-module libre de rang  $r$  de  $\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)$ . A fortiori le  $F$ -espace vectoriel engendré par les éléments déterminés par  $NQ$  va être de dimension  $r$  et donc égal à  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ .  $\square$

**Proposition 3.7.** — *On a les isomorphismes de comparaison suivants:*

(1) *si  $V$  est une représentation semi-stable, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t]$$

(2) *si  $V$  est une représentation cristalline, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$$

*Si de plus  $V$  a ses poids de Hodge-Tate négatifs, alors*

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset \mathbf{B}_{\log,K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V).$$

*Démonstration.* — Encore une fois on ne s’occupe que du cas semi-stable, le cas cristallin s’obtenant en faisant  $N = 0$ . On peut supposer que  $V$  a ses poids de Hodge-Tate négatifs car cela revient à multiplier par une puissance de  $t$  le terme de gauche. On sait qu’alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  et que

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^\dagger[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$$

ce qui montre que si l’on choisit des bases  $\{d_i\}$  de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  et  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ , alors  $(e_i) = B(d_i)$  avec  $B \in M_d(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^\dagger[1/t])$ ; la proposition 3.6 implique d’autre part que  $(d_i) = A(e_i)$  avec  $A \in M_d(\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t])$ ; de plus  $AB = \text{Id}$ . On peut alors appliquer l’opérateur  $R_0$  qui est  $\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t]$ -linéaire pour trouver  $AR_0(B) = \text{Id}$  ce qui fait que  $B = R_0(B)$  et que  $B$  a donc ses coefficients dans  $\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t]$  et  $A \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t])$ . Ceci permet de conclure.  $\square$

**Remarque 3.8.** — L’isomorphisme de comparaison ci-dessus est très lié à l’application “exponentielle de Perrin-Riou” [40, 41, 42].

**Proposition 3.9.** — *Soit  $V$  une représentation semi-stable et soit  $M$  la matrice de passage d’une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  à une base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ . Alors il existe  $r \in \mathbf{Z}$  et  $\lambda \in \mathbf{B}_K^\dagger$  tels que  $\det(M) = \lambda t^r$ .*

*Démonstration.* — Le déterminant de la matrice de passage est égal au coefficient de la matrice de passage pour le déterminant de  $V$  et il suffit donc de montrer l’assertion en dimension 1. Une représentation semi-stable de dimension 1 est cristalline et est donc de la forme  $\omega \chi^r$  où  $\omega$  est un caractère non-ramifié et  $\chi$  est le caractère cyclotomique. La période de  $\omega$  est alors un élément  $\beta \in W(\overline{k})$ , ce qui fait que  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = F \cdot \beta t^{-r}$  et  $\mathbf{D}^\dagger(V) = \mathbf{B}_K^\dagger \cdot \beta$  d’où le résultat.  $\square$

**3.3. Représentations cristallines et représentations de hauteur finie.** — Dans ce paragraphe, on se place dans le cas  $K = F$  et  $V$  est une représentation cristalline de  $G_F$ . On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_F$  est de hauteur finie si  $\mathbf{D}(V)$  possède une base sur  $\mathbf{B}_F$  formée d'éléments de  $\mathbf{D}^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}$ . Un résultat de Fontaine [26] (voir aussi [18, III.2]) montre que  $V$  est de hauteur finie si et seulement si  $\mathbf{D}(V)$  possède un sous- $\mathbf{B}_F^+$ -module libre de type fini stable par  $\varphi$  de rang égal à  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant:

**Théorème 3.10.** — *Si  $V$  est une représentation cristalline de  $G_F$ , alors  $V$  est de hauteur finie.*

*Démonstration.* — Fixons une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ , et une base  $\{d_i\}$  de  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ , et soit  $U$  la matrice de passage de l'une à l'autre c'est-à-dire que  $(e_i) = U(d_i)$ . La matrice  $U$  est à coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger[1/t]$ . De plus si l'on remplace  $V$  par  $V(1)$ , alors on peut remplacer  $d_i$  par  $t^{-1}d_i(1)$  et donc  $U$  par  $tU$  ce qui fait que quitte à tordre suffisamment  $V$  on peut supposer que  $U$  est à coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger$ , ce que l'on fait maintenant. Soit  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$  l'anneau des séries formelles  $\sum_{k \geq 0} a_k \pi^k$  où  $a_k \in F$  et  $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$  est de rayon de convergence 1 (c'est-à-dire qu'elles convergent sur le disque ouvert de rayon 1). Nous aurons besoin d'un résultat de Kedlaya [34, 5.3] (la formulation originale de Kedlaya est  $U = VW$  mais on s'y ramène en transposant):

**Proposition 3.11.** — *Si  $U$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger$ , alors il existe  $V$  dans  $\text{Id} + \pi M_d(\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+)$  et  $W$  dans  $M_d(\mathbf{B}_F^\dagger)$  telles que  $U = WV$ .*

Remarquons qu'on a nécessairement  $\det(W) \neq 0$  et comme  $\mathbf{B}_F^\dagger$  est un corps cela implique que  $W$  est inversible. Soit  $P$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{e_i\}$  (qui a ses coefficients surconvergentes),  $D$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{d_i\}$  (qui est donc à coefficients dans  $F$ ) et  $G$  la matrice de  $\gamma_F$  (un générateur de  $\Gamma_F$ ) dans la base  $\{e_i\}$  (elle est aussi surconvergente). Un petit calcul montre que, si  $\{f_i\}$  est la base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  déduite de  $\{e_i\}$  par  $(f_i) = W^{-1}(e_i)$ , alors:

$$\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) = \varphi(V)DV^{-1} = \varphi(W^{-1})PW$$

$$\text{Mat}_{\{f_i\}}(\gamma_F) = \gamma_F(V)V^{-1} = \gamma_F(W^{-1})GW$$

Les coefficients de la matrice  $\varphi(V)DV^{-1}$  sont dans  $\text{Frac } \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$ . D'autre part les coefficients de  $\varphi(W^{-1})PW$  sont dans  $\mathbf{B}_F^\dagger$ . On en déduit que dans la base  $\{f_i\}$ , la matrice de  $\varphi$  a ses coefficients dans  $\text{Frac } \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$  d'une part et dans  $\mathbf{B}_F^\dagger$  d'autre part. C'est donc [18, II.12] que  $\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) \in M_d(\text{Frac } \mathbf{B}_F^+)$ .

De plus si  $v = \det(V)$ , alors  $\det(\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi)) = \varphi(v) \det(D)v^{-1}$  et comme  $V \in \text{Id} + \pi M_d(\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+)$  on a  $v \in 1 + \pi \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$ . Les coefficients de  $\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi)$  n'ont donc

pas de pôles en zéro ce qui fait qu'il existe  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+$  non-divisible par  $\pi$  tel que  $\lambda \text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) \in \text{M}_d(\mathbf{B}_F^+)$ . Pour les même raisons,  $\text{Mat}_{\{f_i\}}(\gamma_F) \in \text{M}_d(\text{Frac } \mathbf{B}_F^+)$ .

Soit  $D$  le  $\mathbf{B}_F^+$ -module engendré par les  $f_i$ ; on vient de voir que  $\lambda\varphi(D) \subset D$  où  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+$  n'est pas divisible par  $\pi$  et que le  $\text{Frac}(\mathbf{B}_F^+)$ -module engendré par  $D$  est stable par  $\Gamma_F$ .

**Lemme 3.12.** — *Si  $D$  est un  $\mathbf{B}_F^+$ -module libre de type fini tel que le  $\text{Frac}(\mathbf{B}_F^+)$  module engendré par  $D$  est stable par  $\Gamma_F$  et  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+ - \pi\mathbf{B}_F^+$  est tel que  $\lambda\varphi(D) \subset D$ , alors il existe  $D' \subset D$  un sous-module libre de type fini stable par  $\varphi$  et  $\Gamma_F$  qui est de rang maximal.*

Pour montrer que la représentation  $V$  est de hauteur finie il suffit donc, grâce au résultat de Fontaine, de montrer le lemme ce que nous faisons maintenant. Le lemme est démontré dans [18] (c'est la réunion des énoncés III.8 à III.15) mais l'une des étapes utilise de manière cruciale que  $k$  est fini et il nous faut la contourner <sup>(2)</sup>

On va d'abord montrer que l'on peut supposer que  $\Gamma_F(D) \subset D$ . Soit  $G = \langle \gamma_F \rangle$ ; on renvoie à la conséquence du corollaire III.15 de [18] pour la construction, sous l'hypothèse que le  $\text{Frac}(\mathbf{B}_F^+)$ -module engendré par  $D$  est stable par  $\Gamma_F$ , de  $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_F^+$  tels que pour tout  $\gamma \in G$  on ait  $\gamma(\alpha D) \subset \beta D$ . Comme  $\gamma(\pi)/\pi$  est inversible dans  $\mathbf{B}_F^+$ , on peut supposer que  $\pi$  ne divise pas  $\alpha$ ; en effet, l'inclusion  $\alpha D \subset \beta D$  implique que si  $\pi$  divise  $\alpha$ , alors  $\pi$  divise  $\beta$ . Soit alors  $G \cdot \alpha D$  le sous- $\mathbf{B}_F^+$ -module de  $\beta D$  engendré par les  $\gamma(\alpha d)$  où  $\gamma \in G$ ,  $d \in D$ . Comme  $\mathbf{B}_F^+$  est noetherien (car principal), comme  $\beta D$  est de type fini, et comme  $G \cdot \alpha D$  est réunion croissante de sous-modules de type fini de  $\beta D$ , c'est que  $G \cdot \alpha D$  est en fait réunion d'un nombre fini de  $\gamma(\alpha D)$ . Il existe donc  $n \in \mathbf{N}$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in G$  tels que  $G \cdot \alpha D = \sum \gamma_i(\alpha D)$ . De plus  $G \cdot \alpha D$  est stable par  $G$  et donc par continuité il est stable par  $\Gamma_F$ . Ensuite comme  $\lambda\varphi(D) \subset D$  on a  $\lambda\alpha \cdot \varphi(\alpha D) \subset \alpha D$ . Soit  $\mu = \prod_{i=1}^n \gamma_i(\lambda\alpha)$ , on voit que  $\mu\varphi(\gamma_i(\alpha D)) \subset \gamma_i(\alpha D)$  pour tout  $i$  et donc que  $\mu\varphi(G \cdot \alpha D) \subset G \cdot \alpha D$  et que  $\pi$  ne divise pas  $\mu$ . Ceci montre que l'on peut se ramener au cas où  $D$  est stable par  $\Gamma_F$ .

On suppose donc maintenant que  $D$  est un  $\mathbf{B}_F^+$ -module libre de type fini stable par  $\Gamma_F$  et que  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+ - \pi\mathbf{B}_F^+$  est tel que  $\lambda\varphi(D) \subset D$ . L'idéal  $I$  des  $\delta \in \mathbf{B}_F^+$  tels que  $\delta\varphi(D) \subset D$  est stable par  $\Gamma_F$  et par [18, III.8] il est de la forme  $(\pi^a \prod_{i=0}^n \varphi^i(q)^{\beta_i})$ . De plus comme  $\lambda \in I$  et que  $\pi$  ne divise pas  $\lambda$  c'est que  $a = 0$ . Soit alors  $\alpha = \pi^{\beta_0 + \dots + \beta_n} q^{\beta_1 + \dots + \beta_n} \dots \varphi^{n-1}(q)^{\beta_n}$ . Un petit calcul montre que  $\varphi(\alpha D) \subset \alpha D$  et que  $\alpha D$  est stable par  $\Gamma_F$ . On peut donc prendre  $D' = \alpha D$  et ceci achève la démonstration du lemme et donc du théorème 3.10.  $\square$

**3.4. Une autre définition de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .** — L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'il existe un anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger$ , tel que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ . On pose  $\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig}, F}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_F^\dagger} \mathbf{B}^\dagger$ . Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de quelques propriétés de  $\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger$ , et

<sup>(2)</sup>Il s'agit du lemme III.9, qui est en fait incorrect (même si  $k$  est fini).



du fait que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ . Ces résultats ne sont pas utilisés dans la suite de l'article.

**Lemme 3.13.** — On a  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_F^\dagger} \mathbf{B}_K^\dagger$ .

*Démonstration.* — Voir la démonstration du lemme 4.1 de [1].  $\square$

**Corollaire 3.14.** — On a  $\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}^\dagger$ .

**Proposition 3.15.** — On a  $(\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger)^{H_K} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ .

*Démonstration.* — Comme  $\mathbf{B}_F^\dagger$  est un corps, il existe une base  $\{e_\alpha\}$  de  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger$  sur  $\mathbf{B}_F^\dagger$ . Soit  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger$ , il s'écrit de manière unique  $x = \sum \lambda_\alpha e_\alpha$ , avec  $\lambda_\alpha \in \mathbf{B}^\dagger$ . Si  $x$  est fixe par  $H_K$ , c'est donc (comme les  $e_\alpha$  sont fixes par  $H_K$ ) que  $\lambda_\alpha \in (\mathbf{B}^\dagger)^{H_K} = \mathbf{B}_K^\dagger$ . Le lemme en résulte.  $\square$

**Lemme 3.16.** — L'application naturelle  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_F^\dagger} \mathbf{B}^\dagger$  dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$  est injective.

*Démonstration.* — Soit  $k \geq 1$ , ayant la propriété suivante: c'est le plus petit entier tel qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger$ , et  $b_1, \dots, b_k \in \mathbf{B}^\dagger$ , tels que  $\sum_i \lambda_i b_i = 0$  dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ , avec  $\sum \lambda_i \otimes b_i \neq 0$ .

Alors, si  $h \in H_F$ , on a  $\sum_i \lambda_i h(b_i) = 0$ , et donc,  $\sum_i \lambda_i (h(b_i/b_1) - b_i/b_1) = 0$ . Par l'hypothèse de minimalité sur  $k$ ,  $h(b_i/b_1) - b_i/b_1 = 0$ , et donc  $b_i/b_1 \in \mathbf{B}_F^\dagger$ . On a alors  $\sum_i \lambda_i b_i/b_1 = 0$ , et donc finalement,  $\sum_i \lambda_i \otimes b_i = b_1 \otimes (\sum_i \lambda_i b_i/b_1) = 0$ . L'application  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_F^\dagger} \mathbf{B}^\dagger$  dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$  est donc injective.  $\square$

**Proposition 3.17.** — On a un isomorphisme  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ .

*Démonstration.* — Comme  $\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ , il suffit de montrer que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V))^{H_K}$ . Comme  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  est un  $\mathbf{B}_K^\dagger$ -module libre de rang  $d$ , on a:

$$(\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V))^{H_K} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V).$$

$\square$

**Remarque 3.18.** — Si l'on pose  $\mathbf{B}_{\text{log}}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger[\log(\pi)]$ , alors on a  $\mathbf{D}_{\text{log}}^\dagger(V) = (\mathbf{B}_{\text{log}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ .

#### 4. Propriétés de $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$

L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  est isomorphe (canoniquement si  $K = F$ ) à l'anneau de Robba utilisé dans la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques. Ce chapitre est consacré à la démonstration de quelques unes de ses propriétés relatives à l'action de  $\Gamma_K$ : on définit

aussi des opérateurs différentiels qui seront utiles pour la suite. Enfin, on montre un théorème de structure pour les modules sur l'anneau de Robba.

**4.1. L'opérateur  $\nabla$ .** — Dans ce paragraphe,  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_K$  et  $n(\gamma) = v_p(1 - \chi(\gamma))$ . On suppose que  $n(\gamma) \geq 1$  et que  $r \geq r_{n(K)}$ .

**Lemme 4.1.** — *Si  $I = [r; s]$  est un intervalle fermé de  $[r; +\infty[$ , alors il existe  $n(I) \in \mathbf{N}$ , tel que pour  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , on ait  $V_I((1 - \gamma)x) \geq V_I(x) + 1$  dès que  $n(\gamma) \geq n(I)$ .*

*Démonstration.* — Par densité et linéarité on se ramène au cas où  $x = \pi_K^k$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ . Alors si  $k \geq 0$

$$\gamma(\pi_K^k) - \pi_K^k = \pi_K^k \left( \frac{\gamma(\pi_K^k)}{\pi_K^k} - 1 \right) = \pi_K^k \left( \frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1 \right) \left( \frac{\gamma(\pi_K^{k-1})}{\pi_K^{k-1}} + \dots + 1 \right)$$

et sinon

$$\gamma(\pi_K^{-k}) - \pi_K^{-k} = \pi_K^{-k} \left( \frac{\pi_K^k}{\gamma(\pi_K^k)} - 1 \right) = \pi_K^{-k} \left( \frac{\pi_K}{\gamma(\pi_K)} - 1 \right) \left( \frac{\pi_K^{k-1}}{\gamma(\pi_K^{k-1})} + \dots + 1 \right)$$

Comme on a  $V_I(xy) \geq V_I(x) + V_I(y)$  (voir la remarque 2.6), le lemme résulte du fait que  $V_I(\gamma(\pi_K)/\pi_K - 1) \geq 1$  si  $n(\gamma)$  est assez grand; en effet,  $\gamma(\pi_K)/\pi_K - 1$  tend vers 0 quand  $\gamma$  tend vers 1.  $\square$

Si  $I = [r; s]$ , soit  $\mathbf{B}_K^I$  l'anneau des séries formelles en  $\pi_K$  qui convergent sur la couronne de rayons intérieurs et extérieurs  $\alpha(K, r)$  et  $\alpha(K, s)$ . Le lemme 4.1 montre que si  $\gamma$  est assez proche de 1, la série d'opérateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - \gamma)^n}{n}$$

converge vers un opérateur continu  $\nabla_I : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_K^I$ , et un petit argument de séries formelles montre que  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ . Notamment  $\nabla_{I_1}(x) = \nabla_{I_2}(x)$  si  $I_k = [r; s_k]$ . On en déduit que la valeur commune des  $\nabla_I(x)$  appartient à  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , et que l'opérateur  $x \mapsto \nabla(x)$ , où  $\nabla(x)$  est la valeur commune des  $\nabla_I(x)$ , est continu pour la topologie de Fréchet.

De même, si  $\gamma$  est assez proche de 1, alors la série d'opérateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))(1 - \gamma)} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - \gamma)^{n-1}}{n}$$

converge vers un opérateur continu  $\nabla/(1 - \gamma) : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_K^I$ , et un petit argument de séries formelles montre que

$$\frac{\nabla}{1 - \gamma_K} = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma_K} \cdot \frac{\nabla}{1 - \gamma}$$

ne dépend pas du choix de  $\gamma$  et définit aussi un opérateur de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  dans lui-même, continu pour la topologie de Fréchet. Il est clair que

$$(1 - \gamma_K) \frac{\nabla}{1 - \gamma_K} = \nabla.$$

**Lemme 4.2.** — La restriction de  $\nabla$  à  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  vérifie  $\nabla = t \cdot \partial$  où  $\partial(x) = (1 + \pi)dx/d\pi$ .

**Remarque 4.3.** — Attention au fait que ces notations ne sont pas compatibles avec [9]. Ce qui est noté  $\partial$  chez nous est noté  $\nabla$  dans [9].

*Démonstration.* — Dans [9] il est démontré que l'image de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r,n}$  par  $\iota_n = \varphi^{-n}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est contenue dans  $K_n[[t]]$  si  $n \geq n(K)$ . L'image par  $\varphi^{-n}$  de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r,n}$  a la même propriété par continuité. Comme  $\varphi^{-n}$  est injectif et que  $\nabla, t\partial$  commutent à  $\varphi$  il suffit de montrer que  $\nabla - t\partial$  est nul sur  $K_n[[t]]$  ce qui est évident.  $\square$

Montrons que  $\partial$  est presque surjective:

**Proposition 4.4.** — La connexion  $\partial$  réalise une surjection

- (1) de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} + F \cdot \log(\pi_K)$  dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ ;
- (2) de  $\mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger}$  dans lui-même.

*Démonstration.* — Tout d'abord si  $e_K$  est l'indice de ramification de  $K_{\infty}/F_{\infty}$ , alors  $\log(\pi/\pi_K^{e_K})$  est une série surconvergente ce qui fait que l'on a  $\mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}[\log(\pi_K)]$ . Rappelons que  $\mathbf{B}_K^{\dagger}$  est un corps, et on peut donc se fixer  $r \geq r_n(K)$  tel que  $\partial(\pi_K)$  et  $1/\partial(\pi_K)$  appartiennent à  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ .

Soit  $F(\pi_K) \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ . Posons  $F(\pi_K)/\partial(\pi_K) = \sum a_n \pi_K^n$ , alors

$$F(\pi_K) = \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} (n+1) \pi_K^n \partial \pi_K + a_{-1} \frac{\partial \pi_K}{\pi_K} = \partial \left( \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} \pi_K^{n+1} + a_{-1} \log(\pi_K) \right)$$

ce qui montre que  $F(\pi_K) = \partial G(\pi_K)$  avec  $G(\pi_K) \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} + F \cdot \log(\pi_K)$  pour  $s > r$ .

Ensuite la formule

$$\partial(G_j(\pi_K) \log^j(\pi_K)) = (\partial G_j)(\pi_K) \partial \pi_K \log^j(\pi_K) + G_j(\pi_K) j \log^{j-1}(\pi_K) \partial \pi_K / \pi_K$$

montre que le (1) de la proposition implique le (2) par une récurrence immédiate.  $\square$

**Remarque 4.5.** — Si  $\partial(y) = x$  et  $x \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger,r}$ , alors on ne peut pas dire que  $y \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger,r}$  mais en revanche  $y \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger,s}$  pour tout  $s > r$ .

Les trois lemmes suivants seront utiles par la suite.

**Lemme 4.6.** — Soit  $x$  un élément de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , tel que pour tout  $n \gg 0$  on ait  $x \in \varphi^{n-1}(q) \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r,n}$ . Alors  $x \in t \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ .

*Démonstration.* — Soit  $s = r_{n_0}$  tel que  $x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n}$  pour tout  $n \geq n_0$ . Rappelons que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  s'identifie (non canoniquement) à un anneau de séries formelles en  $\pi_K$ . Soit  $Q_n(\pi_K) = \varphi^{n-1}(q)$ . On a  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} \cap \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n} = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  car une série est divisible  $Q_n(\pi_K)$  si et seulement si les zéros de la première ont un ordre  $\geq$  à ceux de la seconde, ce que l'on peut vérifier localement. De même, comme les  $\varphi^{n-1}(q)$  sont premiers entre eux, l'hypothèse du lemme est équivalente au fait que, pour tout  $n \gg 0$ , on ait  $x \in \varphi^n(\pi)/\varphi^{n_0-1}(\pi)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} = \varphi^n(\pi)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  puisque  $\varphi^{n_0-1}(\pi)$  est inversible dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . On peut donc écrire  $x = \varphi^n(\pi)p^{-n}x_n$  et on va montrer que la suite  $\{x_n\}$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . Les  $x_n \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  vérifient la relation:

$$\frac{\varphi^n(\pi)}{p^n}x_n - \frac{\varphi^{n+1}(\pi)}{p^{n+1}}x_{n+1} = 0$$

et donc

$$(x_n - x_{n+1}) + x_{n+1} \left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right) = 0$$

On en déduit que si  $I$  est un intervalle contenu dans  $[s; +\infty[$ , alors

$$V_I(x_n - x_{n+1}) = V_I \left( x_{n+1} \left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right) \right) \geq V_I(x_{n+1}) + V_I \left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right)$$

On se fixe  $I$  un intervalle compact et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_I(1 - \varphi^n(q)/p) = +\infty$  sur toute couronne du type  $\{|z| \in I\}$ , on peut supposer que  $V_I(1 - \varphi^n(q)/p) > 0$  pour  $n$  assez grand. Alors l'inégalité ci-dessus montre que  $V_I(x_n - x_{n+1}) > V_I(x_{n+1})$  et donc que  $V_I(x_n) = V_I(x_{n+1})$ . Les  $x_n$  ont donc tous la même valuation pour  $n$  assez grand. Enfin l'inégalité ci-dessus et le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_I(1 - \varphi^n(q)/p) = +\infty$  impliquent que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_I(x_n - x_{n+1}) = +\infty$  et donc que la suite  $x_n$  converge.

Ceci étant vrai pour tout  $I$ , la suite  $x_n$  converge pour la topologie de Fréchet vers une limite  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  et un calcul immédiat montre que  $x = ty$ .  $\square$

**Remarque 4.7.** — On peut aussi dire que  $xt^{-1}$  est une fonction méromorphe sans pôles, et cela la force à être holomorphe, c'est-à-dire que  $xt^{-1} \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ . Cela suit de résultats généraux de Lazard [36] sur les fonctions analytiques, que l'on trouvera dans le paragraphe suivant.

**Proposition 4.8.** — Soit  $r > 0$  et  $n \geq n(r)$ . Alors

$$\begin{aligned} \ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{C}_p) &= \varphi^{n-1}(q)\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \\ \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{C}_p) &= \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Le premier point est une conséquence immédiate de 2.17. Pour le deuxième si  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est tel que  $\theta \circ \iota_n(x) = 0$ , alors  $x = \varphi^{n-1}(q)y$  avec  $y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  et alors  $x = \varphi^{n-1}(q)R_0(y)$  ce qui fait que  $y = R_0(y)$  et donc que  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ .  $\square$

**Lemme 4.9.** — Si  $r > 0$  et  $n \geq n(r)$ , alors l'application injective  $\theta_{\circlearrowleft n} : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}/\varphi^{n-1}(q) \rightarrow K_n$  est une bijection.

*Démonstration.* — Étant donné que l'on a  $\varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \cap \mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$ , l'extension de corps  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}/\varphi^{n-1}(q)$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}/\varphi^{n-1}(q)$  est de même degré que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}/\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} = e_K = [K_\infty : F_\infty]$ .

La proposition est triviale dans le cas  $K = F$  (où  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}/\varphi^{n-1}(q) = F_n$ ), et dans le cas général, elle résulte alors du fait que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}/\varphi^{n-1}(q)$  est une extension de  $F_n$  de degré  $e_K = [K_n : F_n]$  pour  $n \gg 0$ .  $\square$

**4.2. Modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ .** — On établit ici des résultats techniques qui serviront à démontrer un résultat sur la structure de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  quand  $V$  est de de Rham.

Soit  $s \in \mathbf{R}$ , tel que  $n(s) \geq n(K)$ . L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  est muni de sa topologie de Fréchet, définie par les  $\{V_I\}$ , et si  $M$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang  $d$ , alors le choix d'un isomorphisme  $M = (\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})^d$  permet de munir  $M$  d'une topologie. Le théorème de l'image ouverte pour les espaces de Fréchet montre que cette topologie ne dépend pas du choix d'une base de  $M$ . L'objet de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant et son corollaire:

**Théorème 4.10.** — Soit  $M$  un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang fini  $d$ , et  $N \subset M$  un sous-module fermé pour la topologie de Fréchet de  $M$ , tel que

$$N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) = M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}).$$

Alors  $N$  est libre de rang  $d$ .

**Corollaire 4.11.** — Soit  $M$  un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang fini  $d$ , et  $N \subset M$  un sous-module fermé pour la topologie de Fréchet de  $M$ . Alors  $N$  est libre de rang  $e \leq d$ , où

$$e = \dim_{\text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})} N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}).$$

Ces deux résultats sont, apparemment, bien connus des experts, mais nous en reproduisons la démonstration pour la commodité du lecteur. La démonstration va nécessiter quelques résultats préparatoires sur la structure de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . Ces résultats se trouvent dans [1, 36, 12], moyennant une identification de l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  à l'anneau des séries formelles convergeant sur la couronne  $C(I_s) = \{x \in \mathbf{C}_p, \alpha(s, K) \leq |x|_p < 1\}$ , avec  $\alpha(s, K) = p^{-1/e_K s}$ . Si  $I$  est un intervalle de  $[0; 1[$ , soit  $\mathbf{B}_K^I$  l'anneau des séries de Laurent à coefficients dans  $F$ , qui convergent sur la couronne  $C(I) = \{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \in I\}$ . On fixe une identification  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} = \mathbf{B}_K^{I_s}$ .

**Proposition 4.12.** — Soit  $I$  un intervalle de  $[0; 1[$ . L'anneau  $\mathbf{B}_K^I$  a alors les propriétés suivantes:

- (1) si  $I$  est un intervalle compact, alors  $\mathbf{B}_K^I$  est un anneau principal;
- (2) tout idéal de type fini de  $\mathbf{B}_K^I$  est principal (c'est donc un anneau de Bezout);
- (3) tout idéal fermé de  $\mathbf{B}_K^I$  est principal;
- (4) toute fonction méromorphe  $f \in \text{Frac}(\mathbf{B}_K^I)$ , qui n'a pas de pôles, est en fait holomorphe, c'est-à-dire que  $f \in \mathbf{B}_K^I$ ;
- (5) toute matrice à  $d$  lignes et  $e$  colonnes,  $M \in \text{M}_{d \times e}(\mathbf{B}_K^I)$ , peut s'écrire  $M = P \text{diag}(f_i) Q$  où  $P \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_K^I)$ ,  $Q \in \text{GL}_e(\mathbf{B}_K^I)$  et  $\text{diag}(f_i) \in \text{M}_{d \times e}(\mathbf{B}_K^I)$  est nulle sauf sur la diagonale, et  $f_1 | \cdots | f_d$ . En d'autres termes,  $\mathbf{B}_K^I$  admet une théorie des diviseurs élémentaires.

*Démonstration.* — Pour les 4 premiers points, on se reportera à l'article de Lazard [36]. Pour le cinquième point: on commence par montrer que  $\mathbf{B}_K^I$  est un anneau adéquat, c'est-à-dire que  $\mathbf{B}_K^I$  est un anneau intègre où tout idéal de type fini est principal, et qui vérifie la condition technique suivante: pour tous  $a, b \in \mathbf{B}_K^I$ , on peut écrire  $a = a_1 \cdot a_2$  avec  $(a_1, b) = 1$  et  $(a_3, b) \neq 1$  pour tout  $a_3$  qui divise  $a_2$  (et qui n'est pas une unité). C'est une conséquence des résultats de [36], qui permettent de construire des fonctions holomorphes dont l'ensemble des zéros est fixé à l'avance. Le (5) est alors une conséquence directe de [30, Theorem 3].  $\square$

Enfin, on aura besoin du lemme suivant:

**Lemme 4.13.** — Soit  $M$  un  $\mathbf{B}_K^I$ -module, libre de rang  $d$ , et  $M' \subset M$  un sous-module de type fini. Alors  $M'$  est libre de rang  $\leq d$ . Si  $M' \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_K^I) = M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_K^I)$ , alors  $M'$  est libre de rang  $d$ .

*Démonstration.* — Si l'on exprime les coordonnées d'une famille génératrice de  $M'$  dans une base de  $M$ , c'est une conséquence immédiate de la théorie des diviseurs élémentaires.  $\square$

*Démonstration du théorème 4.10.* — La démonstration est largement inspirée de [35]. Soit donc  $M$  un  $\mathbf{B}_K^I$ -module libre de type fini, et  $N \subset M$  un sous-module fermé. Soit  $e \geq d$ . Si  $I$  est un intervalle compact, soit  $\mathcal{G}(e, I)$  l'ensemble des  $e$ -uplets  $(n_1, \dots, n_e) \in N^e$  qui engendrent le  $\mathbf{B}_K^I$ -module  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$ . On remarquera que si  $I$  est fermé, alors  $\mathbf{B}_K^I$  est principal, et donc  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$  est un  $\mathbf{B}_K^I$ -module libre de rang fini  $\leq d$ . Comme

$$N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) = M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}),$$

alors  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$  est en fait un  $\mathbf{B}_K^I$ -module libre de rang égal à  $d$ .

Montrons premièrement que  $\mathcal{G}(e, I)$  est non-vide: comme l'anneau  $\mathbf{B}_K^I$  est principal, il existe  $n'_1, \dots, n'_d \in N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$  qui forment une base de  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$ . On a  $n'_i = \sum a_{ij} p_j$

où  $a_{ij} \in \mathbf{B}_K^I$ , et  $p_1, \dots, p_f$  est une famille de  $N$ . Le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module engendré par les  $p_i$  est un sous-module de type fini de  $M$ , il est donc libre de rang  $d$ , de base  $q_1, \dots, q_d$ . Il n'est pas difficile de voir que les  $q_i$  forment une base de  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$  sur  $\mathbf{B}_K^I$  et donc que  $\mathcal{G}(d, I)$  est non-vide. Ceci implique que  $\mathcal{G}(e, I)$  est non-vide pour  $e \geq d$ .

Montrons ensuite que  $\mathcal{G}(e, I)$  est un ouvert de  $N^e$ . Comme  $\mathcal{G}(d, I)$  est non-vide, on peut se fixer  $(n_1, \dots, n_d) \in \mathcal{G}(d, I)$ . Soit  $(p_1, \dots, p_e) \in \mathcal{G}(e, I)$ , et  $P$  la matrice des  $p_i$  dans la base  $n_j$ . Comme  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  admet la théorie des diviseurs élémentaires, on peut écrire  $P = ADC$ , avec  $A \in \text{GL}_e(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ ,  $C \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ , et  $D$  nulle hors de la diagonale. La matrice  $A$  induit un homéomorphisme de  $N^e$ . Quitte à modifier la base  $n_i$  par  $C$ , et à faire le changement de coordonnées sur  $N^e$  induit par  $A$ , on se ramène à supposer que  $p_i = \alpha_i n_i$  et  $p_i = 0$  si  $i \geq d + 1$ .

Soit  $Q$  la matrice  $d \times d$  des  $\alpha_i$  avec  $i \leq d$ . Par hypothèse,  $\det(Q) \in (\mathbf{B}_K^I)^*$ . Or l'ensemble des  $R \in M_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$  dont le déterminant vérifie  $\det(R) \in (\mathbf{B}_K^I)^*$  est ouvert (le déterminant est une application continue et  $(\mathbf{B}_K^I)^*$  est ouvert dans  $\mathbf{B}_K^I$ , puisque,  $I$  étant compact,  $\mathbf{B}_K^I$  est une algèbre de Banach) et contient  $Q$ . L'ensemble des  $(r_1, \dots, r_e)$  obtenus via  $(r_i) = P(n_i)$  est ouvert et contient  $(p_1, \dots, p_e)$ . Si l'on prend pour  $P$  toutes les matrices  $e \times d$  telles que:

- (1) le déterminant de la matrice  $d \times d$  des  $d$  premières lignes de  $P$  est inversible dans  $\mathbf{B}_K^I$ ;
- (2) la matrice  $e - d \times d$  des  $e - d$  dernières lignes de  $P$  est quelconque.

alors l'ensemble des  $(r_1, \dots, r_e)$  obtenus via  $(r_i) = P(n_i)$  est ouvert et contient  $(p_1, \dots, p_e)$ . Ceci montre que  $\mathcal{G}(e, I)$  est ouvert.

Montrons enfin que si  $e \geq 2d$ , alors  $\mathcal{G}(e, I)$  est dense dans  $N^e$ . Soient  $(n_1, \dots, n_d) \in \mathcal{G}(d, I)$ , et  $(p_1, \dots, p_e) \in N^e$ . Comme auparavant, la théorie des diviseurs élémentaires permet de supposer que  $p_i = \alpha_i n_i$  et  $p_i = 0$  si  $i \geq d + 1$ . Soit  $n > 0$ , et  $q_i = p_i$  pour  $1 \leq i \leq d$ ,  $q_i = p^n n_{i-d}$  pour  $d + 1 \leq i \leq 2d$ , et  $q_i = 0$  si  $i \geq 2d + 1$ . La famille  $(q_i)$  est une famille génératrice de  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$ , aussi proche de  $(p_i)$  que l'on veut (le choix de  $n$  est libre).

L'ensemble  $\mathcal{G}(2d, I)$  est donc un ouvert dense de  $N^{2d}$ , et comme  $N$  est un fermé d'un Fréchet, c'est un métrique complet: il a la propriété de Baire. L'intersection

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{G}(2d, [r; 1 - 1/n])$$

est donc dense dans  $N^{2d}$ , et notamment non-vide. Soit  $(n'_1, \dots, n'_{2d})$  dans l'intersection. Le sous  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module de  $N$  engendré par les  $n'_i$  est de type fini et  $\subset M$ , il est donc libre de rang  $d$ , engendré par  $n_1, \dots, n_d$ . On voit que ces  $n_i$  sont une base de  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^I$

pour tout  $I$ . Soit  $n \in N$ . On peut donc écrire  $n = \sum_{i=1}^d a_i n_i$  avec  $a_i \in \mathbf{B}_K^I$ . Par unicité, on a  $a_i \in \cap \mathbf{B}_K^I = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ .

Le module  $N$  est donc libre de rang  $d$ , étant engendré par les  $n_i$ .  $\square$

*Démonstration du corollaire 4.11.* — Soit  $Q = N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) \cap M$ . Montrons que c'est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang  $e \leq d$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow M/Q \rightarrow 0$ , et par construction,  $M/Q$  est sans-torsion: c'est un module de type fini et sans torsion, donc cohérent, ce qui fait [6, I.2 exercice 11] que  $Q$  lui-même est cohérent. Comme il est de type fini, le lemme 4.13 montre qu'il est libre de rang fini  $e$ .

Ensuite, il est immédiat que  $N \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) = Q \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ , et on peut alors appliquer le théorème 4.10.  $\square$

## 5. Structures différentielles sur les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et monodromie $p$ -adique

Dans le chapitre précédent on a fait l'étude de  $(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}, \nabla)$ . Ce chapitre est consacré à la construction de l'équation différentielle associée à une représentation  $V$ , qui est un module à connexion au-dessus de  $(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}, \nabla)$ . On donne ensuite des applications aux représentations semi-stables, à la théorie de Sen, et à la caractérisation des représentations de de Rham. Comme conséquence de cela, on démontre la conjecture de monodromie  $p$ -adique.

**5.1. L'opérateur  $\nabla_V$ .** — Dans tout ce paragraphe,  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ . Rappelons que l'on a posé  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$  et notamment que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V) \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ . Le lemme de régularisation par le Frobenius montre qu'on a  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi=1} \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$  et donc que l'on peut récupérer  $V$  par la formule

$$V = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V))^{\varphi=1}.$$

On choisit une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$  et on prolonge les opérateurs  $R_m$  à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$  par  $R_m(\sum \lambda_i \otimes e_i) = \sum R_m(\lambda_i) \otimes e_i$ . Comme  $R_m$  est  $\mathbf{B}_K^{\dagger}$ -linéaire, le prolongement ne dépend pas du choix de la base  $\{e_i\}$ . Nous aurons besoin du résultat suivant qui est un corollaire immédiat de la proposition 2.17:

**Lemme 5.1.** — *Soit  $r > 0$  et  $n \geq n(r)$ . Alors*

$$\begin{aligned} \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r}(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) &= \varphi^{n-1}(q) \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r}(V) \\ \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) &= \varphi^{n-1}(q) \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \end{aligned}$$

*Démonstration.* — La proposition 2.17 montre que si  $\theta \circ \iota_n(x) = 0$ , alors  $x = \varphi^{n-1}(q)y$  avec  $y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$ . On a alors  $x = \varphi^{n-1}(q)R_0(y)$  et donc  $y = R_0(y) \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$ .



Enfin pour le deuxième point il suffit d'utiliser le fait qu'un élément de  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}$  divisible par  $\varphi^{n-1}(q)$  dans  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}$  l'est dans  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}$ .  $\square$

On va munir  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  d'une connexion  $\nabla_V$  au-dessus de  $(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}, \nabla)$ , c'est-à-dire d'un opérateur  $\nabla_V$  tel que  $\nabla_V(\lambda \cdot x) = \nabla(\lambda) \cdot x + \lambda \cdot \nabla_V(x)$ .

On se fixe une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$  et si  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  s'écrit  $x = \sum x_i \otimes e_i$  avec  $x_i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , alors on pose (si  $I$  est tel que  $r \in I$ ):  $V_I(x) = \inf_i V_I(x_i)$ . La définition dépend de la base mais pas la topologie définie par les  $V_I$  qui est équivalente à la topologie induite sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  par  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ , et  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  est complet. Dans cette partie  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_K$  et  $n(\gamma) = v_p(1 - \chi(\gamma))$ . On suppose que  $n(\gamma) \geq 1$  et que  $r \geq r_{n(K)}$ .

**Lemme 5.2.** — *Si  $I = [r; s]$  est un intervalle fermé de  $[r; +\infty[$ , alors il existe  $n(I, V) \in \mathbf{N}$ , tel que pour  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$ , on ait  $V_I((1 - \gamma)x) \geq V_I(x) + 1$  dès que  $n(\gamma) \geq n(I, V)$ .*

*Démonstration.* — Si  $y \in \mathbf{D}^{\dagger, r}(V)$ , alors  $V_I((1 - \gamma)y) \geq V_I(y) + 1$ , quand  $n(\gamma)$  est assez grand, puisque l'action de  $G_K$  est continue. On se fixe  $n(\gamma)$  tel que  $V_I((1 - \gamma)e_i) \geq V_I(e_i) + 1$  pour tout  $i$  et le lemme résulte alors du lemme 4.1 (le cas de la représentation triviale) puisque  $(1 - \gamma)(x_i \otimes e_i) = (1 - \gamma)x_i \otimes \gamma(e_i) + x_i \otimes (1 - \gamma)e_i$ .  $\square$

Si  $I = [r; s]$ , soit  $\mathbf{B}_K^I$  l'anneau des séries formelles en  $\pi_K$  qui convergent sur la couronne de rayons intérieurs et extérieurs  $\alpha(K, r)$  et  $\alpha(K, s)$ . Le lemme 5.2 montre que si  $\gamma$  est assez proche de 1, la série d'opérateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - \gamma)^n}{n}$$

converge vers un opérateur continu  $\nabla_{I, V} : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}} \mathbf{B}_K^I$ , et un petit argument de séries formelles montre que  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ . Notamment  $\nabla_{I_1, V}(x) = \nabla_{I_2, V}(x)$  si  $I_k = [r; s_k]$ . On en déduit que la valeur commune des  $\nabla_{I, V}(x)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$ , et que l'opérateur  $x \mapsto \nabla_V(x)$ , où  $\nabla_V(x)$  est la valeur commune des  $\nabla_{I, V}(x)$ , est continu pour la topologie de Fréchet.

Ensuite, un argument standard montre que si  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$ , alors

$$\nabla_V(x) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\gamma(x) - 1}{\chi(\gamma) - 1}$$

ce qui fait que, comme  $(1 - \gamma)(\lambda x) = (1 - \gamma)\lambda \cdot \gamma(x) + \lambda \cdot (1 - \gamma)x$ ,  $\nabla_V$  vérifie  $\nabla_V(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda \nabla_V(x)$ . C'est donc une connexion au-dessus de l'opérateur  $\nabla : \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ .

**Exemple 5.3.** — Un calcul facile montre par exemple que  $\nabla_{\mathbf{Q}_p(r)} = t\partial + r$  sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(\mathbf{Q}_p(r))$ .

**Lemme 5.4.** — *Soit  $x$  un élément de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$ , tel que pour tout  $n \gg 0$ , on ait  $x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V)$ . Alors  $x \in t\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$ .*

*Démonstration.* — Après le choix d'une base de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  cela suit immédiatement de 4.6.  $\square$

**5.2. Application aux représentations semi-stables.** — Dans ce paragraphe, on réécrit les résultats du paragraphe 3.2 en termes de la connexion  $\nabla_V$ . Soit  $M$  un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module libre de rang fini  $d$  muni d'une connexion  $\nabla_M$  au-dessus de  $\nabla$ .

**Proposition 5.5.** — *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (1) *Il existe  $e_0, \dots, e_{d-1} \in M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  tels que  $\nabla_M e_i = 0$  et  $\oplus e_i \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t] = M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$ ;*
- (2) *il existe  $d$  éléments  $f_0, \dots, f_{d-1}$  de  $M$ , formant une base de  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  et tels que  $\nabla_M(f_i) \in t \cdot \langle f_{i-1}, \dots, f_0 \rangle$  où  $\langle \cdot \rangle$  dénote le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module engendré.*

*Démonstration.* — Commençons par montrer que (1) implique (2). L'opérateur de monodromie  $N = 1 \otimes N$  laisse stable le  $F$ -espace vectoriel engendré par les  $e_i$ , car le (1) implique que les  $e_i$  engendrent le noyau de  $\nabla_M$  agissant sur  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$ , et un calcul direct montre que  $N$  commute à  $\nabla_M$  (car  $N$  commute à l'action de  $G_F$ ) et donc stabilise son noyau: on peut alors supposer que  $N(e_i) \in \langle e_{i-1}, \dots, e_0 \rangle$  car  $N$  est nilpotent. On peut écrire de manière unique  $e_i = \sum_{j=0}^{d-1} \log^j(\pi) d_{ji}$ . Montrons que  $f_i = d_{0,i}$  est une famille qui satisfait la condition de (2). Le fait que  $\nabla_M(e_i) = 0$  et  $N(e_i) \in \langle e_{i-1}, \dots, e_0 \rangle$  implique respectivement que

$$\nabla_M(d_{0,i}) = d_{1,i} \frac{t(1+\pi)}{\pi} \text{ et } d_{1,i} \in \langle d_{0,i-1}, \dots, d_{0,0} \rangle$$

ce qui fait que  $\nabla_M(d_{0,i}) \in t \langle d_{0,i-1}, \dots, d_{0,0} \rangle$ . Montrons enfin que les  $f_i$  engendrent  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$ . Soit  $m \in M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$ , par hypothèse on peut écrire  $m = \sum \mu_i e_i$  et donc  $m = \sum \lambda_i f_i + n \cdot \log(\pi)$  où  $\lambda_i$  est le terme constant de  $\mu_i$  et comme  $m \in M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  on a nécessairement  $n = 0$ .

Montrons l'implication réciproque. On va montrer par récurrence que l'on peut prendre  $e_i = \sum_{j=0}^i f_j a_{ji}$  avec  $a_{ji} \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  et  $a_{ii} = 1$ . En rang 1 il n'y a rien à montrer. En rang  $d$ ,  $\nabla_M$  induit une connexion sur  $(\oplus f_i \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger) / f_0 \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  qui satisfait les mêmes conditions et il existe donc  $e'_1, \dots, e'_{d-1}$  tels que  $\nabla_M(e'_i) = \alpha_i f_0$ . Un calcul immédiat montre que  $\alpha_i \in t \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  et donc qu'il existe  $\beta_i \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  tel que  $\nabla(\beta_i) = \alpha_i$  (par la proposition 4.4, il existe  $\beta_i \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  tel que  $\partial(\beta_i) = t^{-1} \alpha_i$ ). On pose alors  $e_0 = f_0$  et  $e_i = e'_i - \beta_i f_0$ , ce qui achève la récurrence. La matrice de passage des  $f_i$  aux  $e_i$  est triangulaire avec des 1 sur la diagonale et on en déduit que les  $e_i$  engendrent bien  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$  sur  $\mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$ .  $\square$

Un  $\nabla$ -cristal sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module libre muni d'un Frobenius et d'une connexion qui commutent, la connexion étant au-dessus de  $\nabla$ .

**Proposition 5.6.** — *Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique et  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  le  $\nabla$ -cristal qu'on lui a associé. Alors il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$  est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$  contient un sous- $\nabla$ -cristal unipotent (respectivement trivial) de rang  $d$ .*

*Démonstration.* — On a vu dans le paragraphe 3.2 que  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_{K_n}$  si et seulement si le module

$$\mathbf{D}_{\text{log}}^\dagger(V)[1/t] = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$$

contient  $d$  éléments linéairement indépendants fixés par l'action de  $\Gamma_{K_n}$  (une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ ). Si  $V$  est semi-stable, alors  $\nabla_V$  est donc triviale sur le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module qu'ils engendrent, c'est-à-dire que si  $e_0, \dots, e_{d-1}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , alors ils satisfont le (1) de la proposition précédente en raison du théorème de comparaison:

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$$

et le (2) de la proposition précédente nous donne alors un sous- $\nabla$ -cristal unipotent de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$ .

Réciproquement si  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$  contient un sous- $\nabla$ -cristal unipotent, alors les  $e_0, \dots, e_{d-1}$  engendrent un  $F$ -espace vectoriel sur lequel  $\log(\gamma)$  agit trivialement ce qui fait que  $\Gamma_K$  agit à travers un quotient fini et donc que les  $e_i$  sont stables par  $\Gamma_{K_n}$  pour  $n$  assez grand et forment alors une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V_n)$  si  $V_n$  est la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$ .

On dira dans ce cas que la connexion est unipotente sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$ . De plus  $V$  est cristalline si et seulement si on peut choisir les  $f_i$  tels que  $\nabla_M(f_i) = 0$  et la connexion est alors triviale sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$ .  $\square$

**5.3. Les modules  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$ .** — Rappelons que Sen a montré [44] que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors l'ensemble des sous- $K_\infty$ -espaces vectoriels de dimension finie de  $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  stables par  $\Gamma_K$  admet un plus grand élément  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et que  $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V) = \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . De plus si  $\gamma \in \Gamma_K$  est suffisamment proche de 1, alors la série qui définit  $\log(\gamma)$  converge en tant que série d'opérateurs  $\mathbf{Q}_p$ -linéaires de  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et l'opérateur  $\Theta_V = \frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))}$  est un opérateur  $K_\infty$ -linéaire qui ne dépend pas de  $\gamma$ .

D'autre part Fontaine a montré dans [27] que l'ensemble des sous- $K_\infty[[t]]$ -modules libres de type fini de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  stables par  $\Gamma_K$  contient un plus grand élément; nous le noterons  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  dans cet article et on a  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{K_\infty[[t]]} \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . De plus si  $\gamma \in \Gamma_K$  est suffisamment proche de 1, alors la série qui définit  $\log(\gamma)$  converge en tant que

série d'opérateurs  $\mathbf{Q}_p$ -linéaires de  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  et l'opérateur  $\nabla_V = \log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  est un opérateur qui ne dépend pas de  $\gamma$  et qui vérifie  $\nabla_V(ax) = a\nabla_V(x) + \nabla(a)x$  ce qui montre que  $\nabla_V$  est une connexion sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ ; on l'étend à  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V) = K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty[[t]]} \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .

On peut retrouver  $(\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V), \Theta_V)$  à partir de  $(\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V), \nabla_V)$  via l'application  $\theta : \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$  comme nous le verrons ci-dessous. Rappelons [9] que l'application  $\iota_n = \varphi^{-n}$  envoie  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}$  dans  $K_n[[t]] \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et envoie donc  $\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)$  dans un sous  $K_n[[t]]$ -module de  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .

**Proposition 5.7.** — *L'application de  $K_\infty((t)) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}} \mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)$  dans  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$  déduite de  $\iota_n$  est un isomorphisme de  $K_\infty((t))$ -modules avec connexion, si  $n$  est assez grand.*

*Démonstration.* — On prend  $n \geq n_0$  tel que  $\iota_n(\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}) \subset K_n[[t]]$ . Il est clair qu'alors

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n})} \iota_n(\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V))$$

est un sous  $K_\infty[[t]]$ -module libre de type fini de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  stable par  $\Gamma_K$ .

Montrons que c'est  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  pour  $n \gg 0$ . On a une application  $\theta : \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est un  $K_\infty$ -espace vectoriel de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . On en déduit une application

$$\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$$

dont le noyau est  $\varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)$  par le lemme 5.1 ce qui fait que  $\theta \circ \iota_n$  réalise une injection d'un  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}/\varphi^{n-1}(q)$  module de rang  $d$  dans  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et son image est un  $K_n$ -espace vectoriel  $V_n$  de dimension  $d$  stable par  $\Gamma_K$ . Comme  $V$  est surconvergente, l'application  $\mathbf{C}_p \otimes_{K_n} V_n \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  est un isomorphisme si  $n \gg 0$ , et donc l'application naturelle de  $K_\infty \otimes_{K_n} V_n$  dans  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est injective; son image est de dimension maximale  $d$ , et est donc égale à  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ . Cela implique que le déterminant de l'injection

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n})} \iota_n(\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)) \hookrightarrow \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$$

n'est pas divisible par  $t$  et donc (comme  $K_\infty[[t]]$  est un anneau local d'idéal maximal  $(t)$ ) par le lemme de Nakayama que l'injection ci-dessus est en fait un isomorphisme.  $\square$

**Corollaire 5.8.** — *Par extension des scalaires on en déduit que l'application*

$$K_\infty((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$$

*déduite de  $\iota_n$  est aussi un isomorphisme de  $K_\infty((t))$ -modules avec connexion, si  $n$  est assez grand.*

Grâce à ces calculs on peut retrouver  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  à partir de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ ; la proposition suivante se trouve dans [27, prop. 3.25].

**Proposition 5.9.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors le noyau de la connexion  $\nabla_V$  opérant sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$  est  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . En particulier,  $V$  est de de Rham si et seulement si  $\nabla_V$  est la connexion triviale.*

*Démonstration.* — L'action de  $\nabla_V$  sur  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est triviale et de plus si  $r \gg 0$ , alors  $t^r K_\infty[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est un sous- $K_\infty[[t]]$ -module de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  libre de type fini et stable par  $\Gamma_K$  ce qui montre que  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est bien inclus dans le noyau de  $\nabla_V$  agissant sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$ .

La théorie générale des modules à connexion montre que le noyau de  $\nabla_V$  sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$  est un  $K_\infty$ -espace vectoriel de dimension finie au plus  $\dim_{K_\infty((t))}(\mathbf{D}_{\text{dif}}(V))$ ; il est aussi stable par  $\Gamma_K$  et provient donc par extension des scalaires d'un  $K_n$ -espace vectoriel stable par  $\Gamma_K$  pour  $n \gg 0$ . L'action de  $\Gamma_K$  sur ce  $K_n$ -espace vectoriel est discrète car l'algèbre de Lie de  $\Gamma_K$  agit trivialement, puisque  $\nabla_V = 0$  (cf [46, chap. V]), et donc quitte à augmenter  $n$  l'action de  $\Gamma_{K_n}$  est triviale et cet espace est donc inclus dans  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V_n) = K_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  où  $V_n$  est la restriction à  $G_{K_n}$  de  $V$ , ce qui fait que le noyau de la connexion agissant sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$  est inclus dans  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . On a donc bien que  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est le noyau de  $\nabla_V$  sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$ .  $\square$

**5.4. Représentations de de Rham.** — Soit  $\partial_V = t^{-1}\nabla_V$ . L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant, et sa réciproque, la proposition 5.18:

**Théorème 5.10.** — *Soit  $V$  une représentation de de Rham de  $G_K$ . On suppose que les poids de Hodge-Tate de  $V$  sont négatifs. Alors il existe un unique sous  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module libre de rang  $d$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  stable par  $\partial_V$ ,  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ . Il vérifie de plus les propriétés suivantes:*

- (1)  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est stable par  $\varphi$  et par  $\Gamma_K$ ;
- (2) si  $s$  est assez grand, alors il existe  $N_s \subset \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , libre de rang  $d$ , stable par  $\partial_V$  et  $\Gamma_K$ , tel que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = N_s \otimes \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ .

On va montrer que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = N_s \otimes \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , où  $N_s$  l'ensemble des  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , tels que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $\iota_n(x) \in K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . Le module  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  que l'on construit ainsi est l'analogue du module  $N$  construit par N. Wach [54] dans le cas d'une représentation absolument cristalline, ce qui explique la notation.

La démonstration de ce résultat va nécessiter plusieurs étapes intermédiaires, consacrées à la construction d'éléments de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ . Pour l'instant,  $V$  est une représentation  $p$ -adique quelconque. On commence par le cas de la représentation triviale:

**Lemme 5.11.** — *Soient  $s \in \mathbf{R}$ , et  $n \in \mathbf{N}$ , tels que  $n \geq n(s) \geq n(K)$ , et  $w \in \mathbf{N}$ . Si  $f(t) \in K_n[[t]]$ , alors il existe  $\mu \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  tel que  $\iota_n(\mu) - f(t) \in t^w K_n[[t]]$ .*

*Démonstration.* — On cherche à montrer que  $\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$  est dense dans  $K_n[[t]]$  pour la topologie  $t$ -adique. Comme  $t \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ , il suffit de montrer que l'application naturelle  $\iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} \rightarrow K_n = K_n[[t]]/(t)$  est surjective. Or, cette application coïncide avec  $\theta \circ \iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} \rightarrow K_n$ , qui est surjective par le lemme 4.9.  $\square$

**Lemme 5.12.** — Soit  $t_n = p^n t / \varphi^{n-1}(q)$ . On a

$$\theta \circ \iota_m(t_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m; \\ \varepsilon^{(1)} - 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Si  $m = n$ , alors

$$\theta \circ \iota_m(t_n) = \theta\left(t \frac{\pi_1}{\pi}\right) = \theta\left(\pi_1 \cdot \frac{t}{\pi}\right) = \varepsilon^{(1)} - 1.$$

Sinon, si  $m < n$

$$\theta \circ \iota_m(t_n) = \theta\left(\varphi^{n-m-1}\left(\pi \frac{t}{\varphi(\pi)}\right)\right) = 0$$

et si  $m > n$

$$\theta \circ \iota_m(t_n) = \theta\left(p^{n-m} \frac{t}{\pi} \frac{\pi_1}{\pi_1} \frac{\pi_1}{\pi_{m-n}} \pi_{m-n+1}\right) = 0,$$

puisque  $\theta\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right) = 0$ .  $\square$

Soit  $\{e_i\}$  une base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ . On suppose dans la suite que  $s$  est un réel tel que  $e_i \in \mathbf{D}^{\dagger,s}(V)$ , et que la matrice de  $\varphi$  dans cette base a ses coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . Enfin, on suppose aussi que  $\partial(\pi_K)$  est inversible dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . Bien entendu, toutes ces conditions sont vérifiées si  $s$  est assez grand.

**Lemme 5.13.** — Si  $x \in \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  et  $w \in \mathbf{N}$ , alors il existe  $n_0 = n_0(x, w)$ , et  $x_{n_0} \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$  tels que:  $\iota_{n_0}(x_{n_0}) - x \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .

*Démonstration.* — On a vu en 5.7 que si  $n$  est assez grand, alors

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n})} \iota_n(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V)) = \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V).$$

Si  $n$  vérifie de plus  $n \geq n(s)$ , alors comme on a supposé que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , on a  $K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})} \iota_n(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)) = \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .

On peut donc écrire  $x = \sum_{i=1}^d f_i(t) \otimes \iota_n(e_i)$  avec  $f_i(t) \in K_\infty[[t]]$ . Soit  $n_0 = n_0(x, w) \geq n$ , tel que pour tout  $i$ ,  $f_i(t) \in K_{n_0}[t] + t^w K_\infty[[t]]$ . Soit  $P_{n_0-n} = (p_{ij}) \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^{n_0-n-1}s})$  la matrice de  $\varphi^{n_0-n}$  dans la base  $e_i$  (si  $P = P_1$  est la matrice de  $\varphi$ , on a

$$P_{n_0-n} = \varphi^{n_0-n-1}(P) \cdots \varphi(P)P,$$

et si  $P \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ , alors  $P_{n_0-n} \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^{n_0-n-1}s})$ ). On a

$$x = \sum_{i=1}^d f_i(t) \otimes \iota_{n_0}(\varphi^{n_0-n}(e_i)) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d f_j(t) \iota_{n_0}(p_{ij}) \otimes \iota_{n_0}(e_i) = \sum_{i=1}^d g_i(t) \otimes \iota_{n_0}(e_i)$$

où  $g_i(t) \in K_{n_0}[t] + t^w K_\infty[[t]]$ , comme on le vérifie rapidement.

Par le lemme 5.11, il existe  $\mu_i \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ , tels que  $\iota_{n_0}(\mu_i) - g_i(t) \in t^w K_\infty[[t]]$ . On peut alors poser  $x_{n_0} = \sum \mu_i e_i$ .  $\square$

On conserve les notations du lemme précédent.

**Proposition 5.14.** — *Si  $x \in \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , alors pour tout  $n \geq n_0$ , il existe  $x_n \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$  tel que  $\iota_n(x_n) - x \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $x_{n_0}$  l'élément construit dans le lemme précédent. Il satisfait donc:  $\iota_{n_0}(x_{n_0}) - x \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ . Notamment,  $\iota_n(\varphi^{n-n_0}(x_{n_0})) - x \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ . Soit  $x'_n = \varphi^{n-n_0}(x_{n_0})$ , alors  $x'_n \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,p^{n-n_0}s}(V)$ , et donc  $x'_n = \sum \mu'_n e_i$  avec  $\mu'_n \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^{n-n_0}s}$  et  $e_i \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ . Le lemme 5.11 fournit des  $\mu_n \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  tels que  $\iota_n(\mu_n) - \iota_n(\mu'_n) \in t^w K_\infty[[t]]$ . On pose alors  $x_n = \sum \mu_n e_i$ .  $\square$

On suppose maintenant que la représentation  $V$  est de de Rham, et que ses poids de Hodge-Tate sont négatifs, ce qui fait qu'il existe  $w \in \mathbf{N}$  tel que

$$t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V) \subset K_\infty[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \subset \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$$

Ensuite, il existe  $n_1$  tel que, si  $n \geq n_1$ , alors  $\iota_n(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)) \subset K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . Soient  $r_1, \dots, r_d$  une base du  $K$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ , et  $n_0 = \sup\{\{n_0(r_i, w)\}_i, n_1\}$ .

**Proposition 5.15.** — *Soit  $N_s$  l'ensemble des  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , tels que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $\iota_n(x) \in K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . Alors  $N_s$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang  $d$ , et  $\nabla_V(N_s) \subset tN_s$ .*

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que  $N_s$  contient  $t^w \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , en particulier il est non-vidé, et il contient un sous  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang  $d$ . Ensuite, il est fermé pour la topologie de Fréchet de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , car  $\iota_n$  est continu pour tout  $n \geq n_0$ . Le théorème 4.10 montre alors que  $N_s$  est libre de rang  $d$ . Il en existe donc une base  $f_1, \dots, f_d$ . Pour  $n \geq n_0$ , la famille  $\iota_n(f_i)$  forme une base de  $K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ : en effet, il suffit de vérifier que  $\iota_n(N_s) = K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ , c'est à dire de montrer que pour tout  $i$ ,  $r_i \in \iota_n(N_s)$ . La proposition 5.14, appliquée à  $r_i$ , fournit  $s_{i,n} \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , tel que  $\iota_n(s_{i,n}) - r_i \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ . Soit  $t_{i,n} = s_{i,n} \left( \frac{p^n t}{\varphi^{n-1}(q)} \right)^w$ . Le lemme 5.12 montre qu'il existe  $u_{i,n} \in K_n[[t]]$ , tel que  $\iota_n(t_{i,n}) - ((\varepsilon^{(1)} - 1)^w + t u_{i,n}) r_i \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , et que si  $m \neq n$ , alors  $\iota_m(t_{i,n}) \in t^w \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ . On en déduit que  $t_{i,n} \in N_s$ , et donc que  $r_i \in \iota_n(N_s)$ .

Ensuite, il est clair que  $\nabla_V(N_s) \subset N_s$ , car  $\nabla_V$  commute à  $\iota_n$ , et  $K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est stable par  $\nabla_V$ . Soit  $D = (d_{ij})$  la matrice de la connexion  $\nabla_V$  dans la base  $\{f_i\}$ . Le fait que  $\nabla_V(K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)) \subset tK_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ , montre que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\iota_n(D) \in M_d(tK_n[[t]])$ , et donc par le lemme 2.17,  $D \in M_d(\varphi^{n-1}(q) \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ . Ceci étant

valable pour tout  $n \geq n_0$ , le lemme 4.6 montre que  $D \in M_d(t\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ , et donc que  $\nabla_V(N_s) \subset tN_s$ .  $\square$

Montrons maintenant qu'un sous-module de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , dont le rang est maximal, et qui est stable par  $\partial_V$ , est unique.

**Lemme 5.16.** — *Soient  $V$  une représentation de de Rham, dont les poids de Hodge-Tate sont négatifs, et  $M_s$  un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ -module libre de rang  $d$ , inclus dans  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ . Si  $\partial_V(M_s) \subset M_s$ , alors il existe  $r \geq 0$  (qui ne dépend que de  $V$ ), tel que  $\det_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}}(M_s) = t^r \det_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}}(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V))$ .*

*Démonstration.* — La représentation  $\det(V)$  est de de Rham, et donc [25] de la forme  $\chi^{-r}\omega$  ( $r \geq 0$ , c'est l'opposé de la somme des poids de Hodge-Tate de  $V$ ), où la restriction de  $\omega$  à  $I_K$  (l'inertie de  $G_K$ ) est finie. Notamment, il existe une base  $e$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(\det(V))$ , telle que l'action de  $\Gamma_K$  sur  $e$  est donnée par  $\chi^{-r}\omega'$ , où  $\omega'$  est d'ordre fini. On a donc  $\gamma(e) = \chi^{-r}(\gamma)e$ , si  $\gamma$  est assez proche de 1. Il existe  $\lambda \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ , tel que  $\det(M_s) = \lambda \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}e$ , et c'est un sous-module de  $\det(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)) = \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(\det(V))$  de rang 1, stable par  $\partial_V$ . On doit avoir:  $\partial_V(\lambda e) = \alpha \lambda e$ , avec  $\alpha \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  et donc  $\alpha \lambda e = \partial(\lambda)e + \lambda \partial_V(e)$ . Comme  $\partial_V(e) = -rt^{-1}e$ , cela montre que  $t$  divise  $\lambda$ , si  $r \geq 1$ . Une récurrence facile, sur  $r$ , montre qu'il existe  $\mu \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ , tel que  $\lambda = t^r \mu$ . On doit alors avoir  $\partial(\mu) = \beta \mu$ , avec  $\beta \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . Identifions cet anneau avec l'anneau des séries en  $T$ , holomorphes sur la couronne  $\{z \in \mathbf{C}_p, \alpha(K, r) \leq |z|_p < 1\}$ . Comme on a supposé que  $\partial(\pi_K)$  est inversible dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ , si  $\mu(x) = 0$ , alors  $(d\mu/dT)(x) = 0$ , et par récurrence  $(d^k \mu/dT^k)(x) = 0$  pour tout  $k$ . Si  $\mu$  s'annule quelque part, c'est donc que  $\mu = 0$ . On en conclut que  $\mu$  est inversible et donc que  $\det(M_s) = t^r \det(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V))$ .  $\square$

**Corollaire 5.17.** — *Si  $N_s^1$  et  $N_s^2$  sont deux sous-modules libres de rang  $d$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , stables par  $\partial_V$ , alors  $N_s^1 = N_s^2$ .*

*Démonstration.* — Le module  $N_s^1 + N_s^2$  vérifie les mêmes hypothèses, et  $N_s^1 \subset N_s^1 + N_s^2$ . Le lemme 5.16 montre que  $\det(N_s^1) = \det(N_s^1 + N_s^2)$ , et donc que  $N_s^1 = N_s^1 + N_s^2 = N_s^2$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 5.10.* — Le lemme précédent montre que si  $s_1 \leq s_2$ , alors l'inclusion  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s_2} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s_1}} N_{s_1} \subset N_{s_2}$  est en fait un isomorphisme. Posons  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} N_s$ : on vient de voir que cette définition ne dépend pas du choix de  $s$ . De plus,  $\varphi(N_s)$  est un sous-module libre de rang  $d$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,ps}(V)$ , stable par  $\partial_V$ , et par unicité on a donc  $\varphi(N_s) = N_{ps}$ . Par suite:

$$\varphi(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)) = \varphi(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} N_s) \subset \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,ps}} N_{ps} = \mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$$



et  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est donc stable par  $\varphi$ . Il est clair que  $N_s$ , et donc  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ , est stable par  $\Gamma_K$ ; par construction il est stable par  $\partial_V$ . Enfin il n'est pas difficile de voir que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  détermine  $N_s$ , qui est unique, et donc  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  lui-même est unique.  $\square$

Montrons maintenant la réciproque du théorème 5.10:

**Proposition 5.18.** — *Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ . On suppose qu'il existe  $N_s \subset \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V)$ , libre de rang  $d$  et stable par  $\partial_V$ . Alors  $V$  est de de Rham, et ses poids de Hodge-Tate sont négatifs.*

*Démonstration.* — Si  $n$  est assez grand, alors  $M_n = K_n[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})} \iota_n(N_s)$  est un sous  $K_n[[t]]$ -module de  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , et  $M = K_\infty[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} M_n$  est un sous  $K_\infty[[t]]$ -module de  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , de rang  $\leq d$ . De plus, comme

$$\text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} N_s = \text{Frac}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,s}(V),$$

$M$  est un  $K_\infty[[t]]$ -module libre de rang  $d$ . Il est stable par  $\partial_V$ , soit  $C$  la matrice de  $\partial_V$  dans une base de  $M$ . Alors l'équation différentielle  $\frac{d}{dt}A + CA = 0$  a une solution  $A \in \text{GL}(d, K_\infty[[t]])$ , qui détermine une famille libre  $\{r_i\}$  de  $M$ , telle que  $\partial_V(r_i) = 0$ . La proposition 5.9 montre que  $V$  est de de Rham, et comme  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = \ker(\nabla_V) \subset \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , c'est que ses poids de Hodge-Tate sont négatifs.  $\square$

### 5.5. Représentations de de Rham et équations différentielles $p$ -adiques. —

L'objet de ce paragraphe est de rassembler les résultats des paragraphes précédents, pour une représentation de de Rham, et d'en déduire le résultat principal de cet article (le théorème 5.20). Ensuite, on en déduit comme corollaire d'un théorème d'André (le théorème 5.19), la "conjecture de monodromie  $p$ -adique" de Fontaine.

Avant d'énoncer ces théorèmes, faisons quelques brefs rappels sur les équations différentielles  $p$ -adiques, afin de fixer les notations et d'énoncer les résultats de [2].

Soit  $\mathcal{R}_F = \mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger$  l'anneau de Robba à coefficients dans  $F$ . Cet anneau est muni d'un opérateur de Frobenius  $\varphi$  et d'une dérivation  $\partial$ , qui proviennent tous les deux d'opérateurs définis sur  $\mathbf{A}_F^\dagger$ . De plus,  $\mathbf{A}_F^\dagger$  est un anneau de séries formelles en  $\pi$ , et  $\varphi(\pi) = \pi^p \pmod{p}$ . Parmi les extensions finies de l'anneau de Robba, on s'intéresse à celles qui proviennent d'une extension finie non-ramifiée de  $\mathbf{B}_F^\dagger$ , c'est-à-dire à celles de la forme  $\mathcal{R}_K = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ . Elles sont canoniquement munies du Frobenius de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , et de la dérivation qui étend  $\partial$ . Via la théorie du corps de normes, on voit que ces extensions sont celles qui proviennent d'une extension finie séparable de  $k((\pi))$ .

Un  $\varphi$ -module  $M$  sur  $\mathcal{R}_K$  est un  $\mathcal{R}_K$ -module libre de rang fini, muni d'une application  $\varphi : M \rightarrow M$  semi-linéaire, telle que  $\varphi^*(M) = M$  (c'est-à-dire que le  $\mathcal{R}_K$ -module engendré par  $\varphi(M)$  est égal à  $M$ ). Une équation différentielle  $p$ -adique est un  $\mathcal{R}_K$ -module de

présentation finie muni d'une connexion  $\nabla_M : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{R}_K} \Omega_{\mathcal{R}_K}^1$ , ou, ce qui revient au même car  $\Omega_{\mathcal{R}_K}^1 \simeq \mathcal{R}_K \frac{d\pi_K}{\pi_K}$ , d'une application  $\partial_M : M \rightarrow M$ , qui étend la dérivation  $\partial : \mathcal{R}_K \rightarrow \mathcal{R}_K$  donnée sur  $\mathcal{R}_F$  par  $\partial f(\pi) = (1 + \pi)df/d\pi$ , et qui satisfait la règle de Leibniz. Une équation différentielle  $p$ -adique  $M$  est dite être munie d'une structure de Frobenius, si  $M$  est un  $\varphi$ -module et si le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla_M} & M \otimes_{\mathcal{R}_K} \Omega_{\mathcal{R}_K}^1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \otimes d\varphi \\ M & \xrightarrow{\nabla_M} & M \otimes_{\mathcal{R}_K} \Omega_{\mathcal{R}_K}^1 \end{array}$$

Étant donné que sur  $\mathcal{R}_F$ , on a

$$dx = \frac{\pi \partial x}{1 + \pi} \frac{d\pi}{\pi},$$

cela revient à demander que  $\partial_M \circ \varphi = p\varphi \circ \partial_M$ .

Les équations différentielles  $p$ -adiques, munies ou non d'une structure de Frobenius, ont été étudiées en détail par Christol et Mebkhout; nous renvoyons à [14] pour un survol des résultats et de quelques applications. En utilisant ces résultats, André a réussi à démontrer [2] le théorème 5.19 ci-dessous, lui aussi connu sous le nom de “conjecture de monodromie  $p$ -adique” (généralisation de la conjecture de Crew [22]). Signalons que Kedlaya a plus récemment obtenu une démonstration de ce même résultat dans [34], par des méthodes très différentes (plus proches de l'esprit du présent article); Mebkhout a aussi démontré ce résultat dans [37]. Enfin, des résultats partiels avaient été obtenus par Christol et Mebkhout ([11] le cas des pentes  $p$ -adiques nulles) et par Tsuzuki (voir [53] et le paragraphe suivant; c'est le cas des pentes de Frobenius nulles).

**Théorème 5.19.** — *Tout module différentiel  $M$  de présentation finie sur  $\mathcal{R}_K$  admettant une structure de Frobenius possède une base de solutions dans  $\mathcal{R}'[\log \pi]$  où  $\mathcal{R}'$  est l'extension finie étale de  $\mathcal{R}_K$  issue d'une extension finie séparable convenable de  $k_K((\pi_K))$ , c'est-à-dire que  $M$  possède une base de solutions dans  $\mathcal{R}_L[\log \pi]$ , pour une extension finie  $L$  de  $K$ .*

Revenons maintenant aux représentations de de Rham. On peut rassembler les résultats des paragraphes précédents dans le théorème suivant:

**Théorème 5.20.** — *Il existe un foncteur  $V \mapsto \mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ , de la catégorie des représentations  $p$ -adiques de de Rham de  $G_K$ , dans la catégorie des  $\mathcal{R}_K$ -modules libres à connexion (les équations différentielles  $p$ -adiques) munis d'une structure de Frobenius. Ce foncteur associe à une représentation de dimension  $d$  une équation différentielle de rang  $d$ .*

*De plus, les deux catégories ci-dessus sont tannakiennes et  $\mathbf{N}_{\text{dR}}$  est un  $\otimes$ -foncteur exact et fidèle; cela signifie en particulier que:*

(1) Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux représentations de de Rham, alors

$$\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2) = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V_2);$$

(2) si  $V$  est de de Rham, alors on a un isomorphisme entre  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V^*)$  et  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)^*$ ;

(3) si l'on a une suite exacte courte de représentations de de Rham:

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0,$$

alors on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V') \rightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) \rightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V'') \rightarrow 0.$$

Enfin,  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$  est unipotent si et seulement s'il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$  est semi-stable, et  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$  est quasi-unipotent si et seulement si  $V$  est potentiellement semi-stable.

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{R}_K(i)$  l'équation différentielle  $p$ -adique triviale, munie d'une structure de Frobenius donnée par  $\varphi_i(x) = p^{-i}\varphi(x)$ , où  $\varphi$  est le Frobenius usuel. On vérifie que si  $i \leq 0$ , alors  $\mathcal{R}_K(i) \simeq \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(i))$ .

Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors il existe  $r \in \mathbf{Z}$  tel que les poids de Hodge-Tate de  $V(r)$  sont négatifs. Par le théorème 5.10, il existe alors un sous-module  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \subset \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V(r))$ , qui est une équation différentielle  $p$ -adique munie d'une structure de Frobenius. On pose alors  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K(-r)$ ; il est clair que cette définition ne dépend pas du choix de l'entier  $r$ . Reste à vérifier que  $\varphi^*(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ . On se ramène au cas où les poids de  $V$  sont négatifs, dans ce cas  $\varphi^*(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$  est un sous-module libre de rang  $d$  de  $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$  qui est stable par  $\partial_V$ : par le théorème 5.10, un tel objet est nécessairement égal à  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ .

La functorialité de  $V \mapsto \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$  est une conséquence de la construction de  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}$  (proposition 5.15), et de la functorialité de  $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(\cdot)$  et de  $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\cdot)$ . Il est clair que  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(\cdot)$  est un  $\otimes$ -foncteur exact à gauche. Il est exact à droite car, si l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ , alors l'image de  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$  dans  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V'')$  est un sous-module libre de rang fini égal à  $d$ , stable par  $\partial_{V''}$ , et est donc égale à  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V'')$  par unicité. Enfin, ce foncteur est fidèle car  $V \mapsto \mathbf{D}^\dagger(V)$  est pleinement fidèle, et  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)[1/t]$ .

Pour montrer la dernière assertion, on peut supposer que les poids de Hodge-Tate de  $V$  sont négatifs. Il suffit de montrer que  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$  est unipotent si et seulement si il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$  est semi-stable (la deuxième partie en résulte sans mal). C'est alors une conséquence de la proposition 5.6, dans ce cas on a d'ailleurs  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\mathrm{log},K}^\dagger)^{N=0}$ .  $\square$

**Remarque 5.21.** — Une conséquence du théorème d'André (théorème 5.19 ci-dessus) est que si  $k$  est algébriquement clos,  $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}$  est essentiellement surjectif. Si l'on fixe une

équation différentielle  $p$ -adique  $M$  munie d'une structure de Frobenius, celle-ci est quasi-unipotente. Le noyau de la connexion (après extension des scalaires à  $\mathcal{R}_L[\log(\pi)]$ ) est un  $(\varphi, N)$ -module (muni d'une action de  $\text{Gal}(L/K)$ ). Un tel objet peut toujours être muni d'une filtration admissible (voir par exemple [21, cor 6.3]), et on récupère ainsi une représentation  $V$ , telle que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = M$ .

En revanche,  $\mathbf{N}_{\text{dR}}$  n'est pas pleinement fidèle. Tout d'abord, prendre la connexion tue un quotient fini de  $G_K$ ; plus sérieusement, si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux représentations semi-stables, telles que les  $(\varphi, N)$ -modules sous-jacents à  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V_i)$  sont isomorphes, alors  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V_1) = \mathbf{N}_{\text{dR}}(V_2)$ : on “perd” la filtration admissible, ce qui est équivalent à “perdre” le réseau étale  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  de  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)[1/t]$ .

Un autre corollaire des théorèmes 5.19 et 5.20 est la “conjecture de monodromie  $p$ -adique”. Cette conjecture, formulée par Fontaine [25, 6.2], est l'analogie pour les représentations  $p$ -adiques (du groupe de Galois d'un corps  $p$ -adique) du théorème de monodromie  $\ell$ -adique de Grothendieck.

**Corollaire 5.22.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de de Rham, alors  $V$  est potentiellement semi-stable.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du fait que  $V$  est potentiellement semi-stable si et seulement si  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  est quasi-unipotent, et du théorème d'André qui assure que c'est toujours le cas.  $\square$

**5.6. Représentations  $\mathbf{C}_p$ -admissibles.** — Pour illustrer les méthodes que nous avons développées, nous donnons dans ce paragraphe une nouvelle démonstration d'un théorème de Sen sur les représentations  $\mathbf{C}_p$ -admissibles: ce sont celles dont la restriction à l'inertie est potentiellement triviale.

On remarquera que le corollaire 5.22 implique directement le théorème de Sen: si  $V$  est une représentation  $\mathbf{C}_p$ -admissible, alors elle est de de Rham, et elle est donc potentiellement semi-stable. Quitte à restreindre, elle est semi-stable, et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  est alors muni d'un Frobenius de pente nulle, ce qui fait que si l'on passe de  $k$  à  $\bar{k}$ , le Frobenius est trivialisable sur  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ : la restriction de  $V$  à  $I_K$  est donc potentiellement triviale.

L'objet de ce paragraphe est de montrer la similarité entre le théorème de Sen, et un théorème de Tsuzuki (le théorème 5.25 ci-dessous, qui est le cas “des pentes de Frobenius nulles” du théorème d'André). Il s'agit donc d'une troisième démonstration, qui illustre l'utilisation des méthodes différentielles. Tout d'abord, la théorie de Sen permet de caractériser facilement les représentations  $\mathbf{C}_p$ -admissibles en termes de l'opérateur  $\Theta_V$ :

**Proposition 5.23.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible si et seulement si  $\Theta_V = 0$ .*

*Démonstration.* — Si  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible, alors on a  $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \widehat{K}_\infty \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , il contient le  $K_\infty$ -espace vectoriel  $K_\infty \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , qui est stable par  $\Gamma_K$  et de dimension  $d$ : c'est donc  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ . L'action de  $\nabla_V$  est bien triviale sur cet espace.

Réciproquement, si  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est muni de la connexion triviale, alors l'action de  $\Gamma_K$  est discrète sur  $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , et par Hilbert 90,  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible.  $\square$

La proposition suivante est due à Sen [44] et est un cas particulier de résultats assez généraux sur la caractérisation de l'algèbre de Lie de l'image de  $I_K$  pour une représentation  $p$ -adique en terme de l'opérateur  $\Theta_V$ :

**Proposition 5.24.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique  $\mathbf{C}_p$ -admissible de  $G_K$ , alors la restriction de  $V$  à  $I_K$  est potentiellement triviale.*

Le but de ce paragraphe est de donner une démonstration de cette proposition qui repose sur la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques. Comme on ne s'intéresse qu'à la restriction de  $V$  à  $I_K$ , on suppose dans tout ce paragraphe que  $k$  est algébriquement clos. Soient

$$\delta_{\pi_K} = \frac{\pi_K}{\partial \pi_K} \partial \quad \text{et} \quad \mu = p\varphi \left( \frac{\partial \pi_K}{\pi_K} \right) \frac{\pi_K}{\partial \pi_K},$$

ce qui fait que  $\delta_{\pi_K}(f(\pi_K)) = g(\pi_K)$  où  $g(X) = X \cdot df/dX$ . Nous aurons besoin du résultat suivant de Tsuzuki [53, 5.1.1]:

**Théorème 5.25.** — *Si  $k$  est algébriquement clos, et si on se donne deux matrices  $A \in \text{GL}(d, \mathbf{B}_K^\dagger)$  et  $C \in \text{M}(d, \mathbf{B}_K^\dagger)$ , telles que  $\delta_{\pi_K} A + AC = \mu\varphi(C)A$ , telles que le  $(\varphi, \partial)$ -module correspondant  $M$  est étale, alors il existe une extension finie  $L/K$ , et une matrice  $Y \in \text{GL}(d, \mathbf{B}_L^\dagger)$ , telle que  $\delta_{\pi_K} Y + YC = 0$  et  $Y = \varphi(Y)A$ .*

*En d'autres termes, les  $F$ -isocristaux de pente nulle sont potentiellement triviaux.*

On utilise ce théorème pour montrer le résultat suivant:

**Lemme 5.26.** — *Soit  $\partial : \mathbf{B}_K^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_K^\dagger$  défini par  $\partial(x) = (1 + \pi) \frac{dx}{d\pi}$ . Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  et  $\partial_V : \mathbf{D}^\dagger(V) \rightarrow \mathbf{D}^\dagger(V)$  est un opérateur différentiel au-dessus de  $(\mathbf{B}_K^\dagger, \partial)$  tel que  $\partial_V \circ \varphi = p\varphi \circ \partial_V$ . Alors le sous-groupe d'inertie de  $H_K$  agit à travers un quotient fini sur  $V$ .*

*Démonstration.* — Soient  $A$  la matrice de  $\varphi$  et  $C = \frac{\pi_K}{\partial(\pi_K)} \text{Mat}(\partial_V)$ . La relation de commutation entre  $\varphi$  et  $\partial_V$  se traduit par  $\delta_{\pi_K} A + AC = \mu\varphi(C)A$ . On peut donc appliquer le théorème de Tsuzuki, et en déduire qu'il existe  $L/K$  finie telle que  $\mathbf{B}_L^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  est trivial: la matrice  $Y$  nous donne une base  $\{y_i\}_i$  de  $\mathbf{B}_L^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ , telle que  $\varphi(y_i) = y_i$  ce

qui fait que la restriction de  $V$  à  $H_L$  est triviale et donc que la restriction de  $V$  (comme représentation de  $G_K$ ) à l'inertie de  $H_K$  est potentiellement triviale.  $\square$

**Lemme 5.27.** — *Si la connexion  $\nabla_V$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  vérifie  $\nabla_V(\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)) \subset t\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , alors l'opérateur  $\partial_V = t^{-1}\nabla_V$  vérifie  $\partial_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset \mathbf{D}^\dagger(V)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$ , telle que la matrice de  $\varphi$  vérifie  $Q = \text{Mat}(\varphi) \in \text{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ . C'est aussi une base de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ . Soit  $D = \text{Mat}(\partial_V) \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger)$ . On remarquera que  $\partial Q \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$  puisque  $\partial$  préserve  $\mathbf{B}_K^\dagger$ . Le fait que  $\nabla_V$  et  $\varphi$  commutent montre que  $p\varphi(D)Q = \partial Q + QD$ . Soit  $H = D + Q^{-1}\partial Q$ . L'équation précédente s'écrit alors

$$H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = -pQ^{-1}\varphi(Q^{-1}\partial(Q))Q$$

et  $-pQ^{-1}\varphi(Q^{-1}\partial(Q))Q \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger)$ . Le résultat que l'on cherche à établir est que  $H$  et donc  $D$  a ses coefficients dans  $\mathbf{B}_K^\dagger$ . Il suffit donc de montrer le fait suivant: si  $H \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger)$  vérifie  $H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = R \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ , alors en fait  $H \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ , ce que nous faisons maintenant. Soient  $|\cdot|_I$  les normes correspondant aux valuations  $V_I$ ; on les étend à  $\text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$  en décidant que  $|M|_I = \sup |m_{ij}|_I$ . Un élément  $x$  de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est dans  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  si et seulement si la suite des  $|x|_I$  (avec  $I \subset [r; +\infty[$ ) est bornée, et il en est donc de même pour les matrices à coefficients dans ces anneaux. Comme  $Q \in \text{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ , on a pour toute matrice  $M$ ,  $|Q^{-1}M|_I = |MQ|_I = |M|_I$ . Fixons  $r$  tel que  $Q$  et  $Q^{-1} \in \text{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$ , et  $R \in \text{M}_d(\mathbf{B}^{\dagger,r}, K)$ . Soit  $I_h = [p^hr; p^{h+1}r]$ . Dans notre cas  $H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = R$  et il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $I$ , on ait:  $|R|_I \leq C$ . Comme on a  $H = R + pQ^{-1}\varphi(H)Q$ , alors pour  $h \geq 1$ :

$$|H|_{I_h} \leq \sup(C, p^{-1}|H|_{I_{h-1}}) \leq \dots \leq \sup(C, p^{-h}|H|_{I_0})$$

ce qui fait que  $|H|_{I_h} \leq \sup(C, |H|_{I_0})$ , pour tout  $h$ , et donc que  $H \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ .  $\square$

**Lemme 5.28.** — *La connexion  $\Theta_V$  sur  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est triviale si et seulement si  $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .*

*Démonstration.* — Si  $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , alors comme  $(\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V), \Theta_V)$  est l'image par  $\theta \circ \iota_n$  de  $(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V), \nabla_V)$ , c'est que  $\Theta_V = 0$ .

Réciproquement si  $\Theta_V = 0$ , alors pour tout  $n \gg 0$  on a

$$\nabla_V(\mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V)) \subset \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r_n}(V)$$

par le lemme 5.1, et le lemme 5.4 permet de conclure.  $\square$

*Démonstration de la proposition 5.24.* — Comme on s'intéresse à la restriction de  $V$  à l'inertie, on peut supposer que le corps résiduel  $k$  de  $K$  est algébriquement clos, ce que l'on fait maintenant. On a vu qu'une représentation  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible si et seulement

si le module  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  qui lui est associé par la théorie de Sen est muni de la connexion triviale et on a montré que cette connexion est l'image par  $\theta$  de celle qui existe sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ . Le lemme 5.28 montre que dans ce cas  $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .

Le lemme 5.27 montre alors que  $t^{-1}\nabla_V$  est une connexion surconvergente sur  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ . Le lemme 5.26 montre ensuite qu'il existe une extension finie  $L/K$  telle que l'action de  $H_L$  sur  $V$  est triviale sur  $V$ . Comme  $\nabla_V = t\partial_V = 0$ , l'action de  $\Gamma_L$  est finie, ce qui fait qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $G_{L_n}$  agit trivialement sur  $V$ , et donc que la restriction de  $V$  à  $I_K$  est potentiellement triviale.  $\square$

**Remarque 5.29.** — Une représentation  $\mathbf{C}_p$ -admissible  $V$  est de de Rham, et on a  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  dans ce cas particulier.

**Remarque 5.30.** — En fait, le théorème de Sen implique (du moins dans le cas où le corps des coefficients de l'équation différentielle est non-ramifié) le théorème de Tsuzuki (et lui est donc équivalent dans ce cas). Indiquons brièvement de quoi il s'agit: si  $N$  est un isocrystal de pente nulle, on peut "exponentier" la connexion pour construire une matrice que l'on utilise pour faire agir un sous-groupe ouvert de  $\Gamma_K$ . Le fait que  $\varphi$  est de pente nulle assure que cette matrice est surconvergente. On a donc construit un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale, c'est-à-dire une représentation  $p$ -adique  $V$ . Il n'est pas dur de montrer que  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible, et d'en conclure, via le théorème de Sen, que  $V$ , et donc  $N$ , devient trivial après une extension finie.

## 6. Extensions de représentations semi-stables

Dans ce chapitre, on utilise le théorème de monodromie  $p$ -adique, pour montrer que si  $E$  est une représentation de de Rham qui est une extension de deux représentations semi-stables, alors  $E$  est semi-stable. On va montrer que:

- (1) Toute représentation ordinaire de  $G_K$  est semi-stable;
- (2) une extension de deux représentations semi-stables qui est de de Rham est elle-même semi-stable;
- (3) si  $V$  est une représentation semi-stable dont les poids de Hodge-Tate sont tous  $\geq 2$ , alors  $\exp_V : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow H^1(K, V)$  est un isomorphisme.

Ces trois résultats étaient connus dans le cas d'un corps résiduel fini, où on peut les déduire de calculs de dimension de groupes de cohomologie galoisienne (ce qui n'est plus possible si le corps résiduel n'est pas fini). Le (1) avait été démontré dans ce cas là par Perrin-Riou [39, 40, 41] comme corollaire des calculs de Bloch et Kato [5], le (2) par Hyodo [32, 38], et le (3) par Bloch et Kato.

**Remarque 6.1.** — Dans une version antérieure de cet article, on utilisait le calcul de la cohomologie galoisienne via les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules pour démontrer ces résultats.

**6.1. Extensions de représentations semi-stables.** — L'objet de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant:

**Théorème 6.2.** — *Si  $E$  est une représentation de de Rham, qui est une extension de  $W$  par  $V$ , où  $V$  et  $W$  sont semi-stables, alors  $E$  est semi-stable.*

et son corollaire:

**Corollaire 6.3.** — *Toute représentation ordinaire de  $G_K$  est semi-stable.*

Commençons par montrer le théorème 6.2. Tout d'abord, une extension de représentations semi-stables qui est de de Rham est potentiellement semi-stable (c'est une conséquence directe du corollaire 5.22, mais on peut se passer de ce dernier résultat, et raisonner plus simplement comme suit: soit  $E$  l'extension en question. Comme  $\mathbf{N}_{\text{dR}}$  est un foncteur exact,  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(E)$  est extension de deux isocristaux unipotents, et le corollaire [13, 6.0-20] montre alors que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(E)$  lui-même est unipotent). Ceci étant fait, il suffit de montrer le lemme<sup>(3)</sup> suivant:

**Lemme 6.4.** — *Si  $E$  est une représentation potentiellement semi-stable de  $G_K$ , qui est une extension de  $W$  par  $V$ , où  $V$  et  $W$  sont deux représentations semi-stables de  $G_K$ , alors  $E$  est semi-stable.*

*Démonstration.* — Soit  $L$  une extension finie de  $K$ , telle que la restriction de  $E$  à  $G_L$  est semi-stable. Soit  $\mathbf{D}_{\text{st}}^L(\cdot) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \cdot)^{G_L}$ . On a une suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}^L(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}^L(E) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}^L(W) \rightarrow 0,$$

et en prenant les invariants par  $\text{Gal}(L/K)$ , on en déduit:

$$0 \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}(E) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}(W) \rightarrow H^1(\text{Gal}(L/K), \mathbf{D}_{\text{st}}^L(V)).$$

Pour des raisons de dimension, il suffit de montrer que

$$H^1(\text{Gal}(L/K), \mathbf{D}_{\text{st}}^L(V)) = 0,$$

ce qui résulte du fait que  $\mathbf{D}_{\text{st}}^L(V)$  est un  $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel, et donc en particulier que  $\# \text{Gal}(L/K)$  y est inversible.  $\square$

Pour montrer le corollaire 6.3, on va tout d'abord montrer le lemme suivant; si  $V$  est une représentation de de Rham,  $H_g^1(K, V)$  est l'ensemble des classes d'extensions qui sont de de Rham.

<sup>(3)</sup>Je remercie le referee de m'avoir signalé ce lemme et sa démonstration.



**Lemme 6.5.** — *Si  $V$  est une représentation de de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont tous  $\geq 1$ , alors  $H^1(K, V) = H_g^1(K, V)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $E$  une extension de  $\mathbf{Q}_p$  par  $V$ : il suffit de montrer que  $E$  est de de Rham. L'hypothèse sur les poids de Hodge-Tate de  $V$  implique que  $H^1(K, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = 0$  (ceci suit de la décomposition de Hodge-Tate de  $V \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\bigoplus \mathbf{C}_p(i))$ , du théorème de Tate:  $H^1(K, \mathbf{C}_p(j)) = 0$  si  $j \neq 0$ , et des suites exactes  $0 \rightarrow t^{i+1} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow t^i \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p(i) \rightarrow 0$ , que l'on utilise pour  $i \geq 0$ ).

On a donc un morceau de suite exacte  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} E)^{G_K} \rightarrow (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{G_K} \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = 0$ , ce qui fait que  $1 \in (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{G_K} = K$  se relève en un élément de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} E)^{G_K}$ , qui n'est pas dans  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . On en déduit immédiatement que la dimension de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} E)^{G_K}$  est la bonne, et donc que  $E$  est de de Rham.  $\square$

*Démonstration du corollaire 6.3.* — Rappelons [39, 1.1] qu'une représentation  $V$  est ordinaire, s'il existe une filtration  $\text{Fil}^i V$  de  $V$ , décroissante exhaustive et séparée, par des sous-espaces  $\text{Fil}^i V$  stables par  $G_K$ , et telle que le groupe d'inertie  $I_K$  agit sur  $\text{Fil}^i V / \text{Fil}^{i+1} V$  par  $\chi^i$ .

Une récurrence immédiate sur la longueur de la filtration montre qu'une représentation ordinaire est de de Rham, et comme elle est extension successive de représentations semi-stables (par hypothèse de récurrence), elle est elle-même semi-stable.  $\square$

**6.2. L'exponentielle de Bloch-Kato.** — Dans ce paragraphe,  $V$  est une représentation semi-stable. Rappelons que les anneaux  $\mathbf{B}_{\text{max}}$  et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  sont reliés par la suite exacte fondamentale (cf [17, III.5] et [24]):

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}} / \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0$$

En tensorisant avec  $V$  et en prenant les invariants par  $G_K$  on obtient un début de suite exacte longue:

$$0 \rightarrow V^{G_K} \rightarrow \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1} \rightarrow ((\mathbf{B}_{\text{dR}} / \mathbf{B}_{\text{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \rightarrow H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$

Soit  $H_e^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))$ . On déduit de la suite exacte ci-dessus une application de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  dans  $H_e^1(K, V)$  appelée exponentielle de Bloch-Kato, et notée  $\exp_V$ . D'autre part comme  $V$  est de de Rham on a

$$((\mathbf{B}_{\text{dR}} / \mathbf{B}_{\text{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) / \text{Fil}^0 \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$$

et [5, lemma 3.8.1] l'image de  $\exp_V$  est  $H_e^1(K, V)$  tout entier. Dans le cas où  $k$  est fini des calculs de dimension montrent que si  $r \gg 0$ , alors  $H_e^1(K, V(r)) = H^1(K, V(r))$  et donc que  $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(r)) \rightarrow H^1(K, V(r))$  est un isomorphisme (on remarquera que si  $r \gg 0$ , alors  $\text{Fil}^0 \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = \{0\}$ ). Le but de ce paragraphe est de montrer, sans condition sur

$k$ , que si tous les poids de Hodge-Tate de  $V$  sont  $\geq 2$ , alors  $\exp_V : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow H^1(K, V)$  est un isomorphisme.

**Lemme 6.6.** — *Si  $V$  est une représentation semi-stable telle que  $1 - \varphi : \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  est surjectif et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$ , alors  $H_g^1(K, V) = H_e^1(K, V)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $c \in H_g^1(K, V)$  et  $E$  l'extension de  $\mathbf{Q}_p$  par  $V$  qui correspond à  $c$ . Le théorème 6.2 montre qu'il existe  $x \in \mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  tel que  $c(g) = (g - 1)x$ . Comme  $c(g) \in V$  on a  $(\varphi - 1)c(g) = 0$  et donc  $\varphi(x) - x \in (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . Il existe donc  $y \in \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  tel que  $\varphi(y) - y = \varphi(x) - x$  ce qui revient à  $\varphi(x - y) = x - y$  et quitte à remplacer  $x$  par  $x - y$  on peut donc supposer que  $x \in \mathbf{B}_{\text{st}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . Comme  $N$  commute à  $G_K$  on a  $N(c(g)) = 0 = (g - 1)(N(x))$  et donc  $N(x) \in \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ . De plus comme  $x \in \mathbf{B}_{\text{st}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  on doit avoir  $N(x) \in \mathbf{D}_{\text{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$  et donc  $x \in \mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  ce qui montre que  $c(g) \in H_e^1(K, V)$ .  $\square$

**Lemme 6.7.** — *Si  $V$  a tous ses poids de Hodge-Tate  $\geq 2$ , alors  $V$  satisfait les conditions du lemme précédent.*

*Démonstration.* — Rappelons que le Frobenius  $\varphi$  sur  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  est bijectif. De plus, si  $W$  est une représentation semi-stable dont les poids de Hodge-Tate sont positifs, alors il existe un réseau  $M_W$  de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(W)$  tel que  $M_W \subset \varphi(M_W)$  (c'est le dual de l'assertion que si  $X$  est semi-stable positive, il existe un réseau de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(X)$  stable par  $\varphi$ ). En tordant, on voit donc qu'il existe un réseau  $M$  de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , tel que  $\varphi^{-1}(M) \subset p^2M$ . Il est alors évident que  $1 - \varphi = -\varphi(1 - \varphi^{-1})$  est surjectif, et que  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$ .  $\square$

**Théorème 6.8.** — *Si  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_K$ , dont les poids de Hodge-Tate sont  $\geq 2$ , alors l'exponentielle de Bloch-Kato  $\exp_V : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow H^1(K, V)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Les deux lemmes précédents, et le lemme 6.5, montrent que l'on a

$$H^1(K, V) = H_g^1(K, V) = H_e^1(K, V)$$

et  $\exp_V$  est donc surjective. D'autre part, on a  $\text{Fil}^0 \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = \{0\}$ , ce qui montre que  $\exp_V$  est injective. C'est donc un isomorphisme.  $\square$

### Diagramme des anneaux de périodes

Le diagramme ci-dessous récapitule les relations entre les différents anneaux de périodes. Les flèches qui se terminent par  $\longrightarrow$  sont surjectives, la flèche en

pointillés  $\dashrightarrow$  est une limite inductive de morphismes définis sur des sous-anneaux  $(\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r_n} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+)$ , et toutes les autres sont injectives.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ & \longrightarrow & \mathbf{B}_{\text{st}}^+ \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ & \longrightarrow & \mathbf{B}_{\text{max}}^+ \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \tilde{\mathbf{B}} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{B}}^+ & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{C}_p \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \tilde{\mathbf{A}} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{A}}^+ & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{\mathbf{E}} & \longleftarrow & \tilde{\mathbf{E}}^+ & \xrightarrow{\theta} & \overline{k} & & \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & \mathbf{B}_{\text{dR}}^+
 \end{array}$$

Tous les anneaux qui ont des tildes ( $\sim$ ) ont aussi des versions sans tilde: on passe de cette dernière à la version avec tilde en rendant Frobenius inversible, et en complétant. Par exemple,  $\tilde{\mathbf{E}}$  est le complété de la perfection de  $\mathbf{E}$ .

Les trois anneaux de la colonne de gauche (du moins leurs versions sans tildes) sont reliés à la théorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules. Les trois anneaux de la colonne de droite sont reliés à la théorie de Hodge  $p$ -adique. Pour faire le lien entre ces deux théories, on passe d'un côté à un autre via tous les anneaux intermédiaires. La situation idéale est quand on peut se placer dans la colonne du milieu (par exemple, de haut en bas: les représentations semi-stables, cristallines, ou de hauteur finie).

Récapitulons les différents anneaux de séries formelles qui interviennent; soit  $C[r; 1[$  la couronne  $\{z \in \mathbf{C}_p, p^{-1/r} \leq |z|_p < 1\}$ . On a alors:

$$\mathbf{E}_F^+ = k[[T]]$$

$$\mathbf{A}_F^+ = \mathcal{O}_F[[T]]$$

$$\mathbf{B}_F^+ = F \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F[[T]]$$

$$\mathbf{E}_F = k((T))$$

$$\mathbf{A}_F = \mathcal{O}_F[\widehat{[[T]][T^{-1}}]$$

$$\mathbf{B}_F = F \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F[\widehat{[[T]][T^{-1}}]$$

$\mathbf{A}_F^{\dagger,r} = \{\text{séries de Laurent } f(T), \text{ qui convergent sur } C[r; 1[,$   
et y sont bornées par 1}

$\mathbf{B}_F^{\dagger,r} = \{\text{séries de Laurent } f(T), \text{ qui convergent sur } C[r; 1[,$   
et y sont bornées}

$\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} = \{\text{séries de Laurent } f(T), \text{ qui convergent sur } C[r; 1[\}$

$\mathbf{B}_{\log,F}^{\dagger,r} = \mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}[\log(T)]$

$\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+ = \{f(T) \in F[[T]], f(T) \text{ converge sur le disque ouvert } D[0; 1[\}$

$\mathbf{B}_{\log,F}^+ = \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+[\log(T)]$

### Index des notations

$[\cdot], 9$	$\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}, 13$
$\mathbf{A}, 11$	$\mathbf{B}, 11$
$\mathbf{A}^\dagger, 12$	$\mathbf{B}^\dagger, 12$
$\mathbf{A}^{\dagger,r}, 12$	$\mathbf{B}_{\log}^\dagger, 33$
$\mathbf{A}_K^{\dagger,r}, 12$	$\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger, 26$
$\mathbf{A}_F, 11$	$\mathbf{B}^{\dagger,r}, 12$
$\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, 11$	$\mathbf{B}_{\text{rig}}^\dagger, 32$
$\alpha(K, r), 24$	$\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}, 24$
$\tilde{\mathbf{A}}_K^\dagger, 12$	$\mathbf{B}_K^{\dagger,r}, 12$
$\tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}, 12$	$\mathbf{B}_{\text{dR}}, 10$
$\tilde{\mathbf{A}}, 11$	$\mathbf{B}_{\text{dR}}^+, 10$
$\tilde{\mathbf{A}}^\dagger, 12$	$\mathbf{B}_F, 11$
$\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}, 12$	$\mathbf{B}_{\text{max}}, 10$
$\tilde{\mathbf{A}}^+, 9$	

$\mathbf{B}_{\max}^+$ , 10	$F$ , 8
$\mathbf{B}_{\text{st}}$ , 11	$\overline{F}$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$ , 12	$\Gamma_K$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$ , 12	$G_K$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}$ , 11	$H_K$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^\dagger$ , 22	$I_K$ , 48
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,r}$ , 22	$\iota_0$ , 17
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ , 11	$\iota_K$ , 9
$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ , 12	$\iota_n$ , 12, 22
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ , 19	$J_n$ , 17
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^\dagger$ , 23	$K$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$ , 19	$k$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}_I$ , 15	$K_\infty$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}^+$ , 9	$K_n$ , 8
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ , 11	$\log$ , 21
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ , 10	$\log(\pi)$ , 22
$\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$ , 13	$\log[\overline{\pi}]$ , 11
$\chi$ , 8	$M(i)$ , 27
$\mathbf{C}_p$ , 8	$N$ , 11, 22
$\mathbf{D}(V)$ , 11	$\nabla$ , 34
$d$ , 10	$\nabla_V$ , 41, 44
$\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ , 11	$\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ , 45
$\mathbf{D}^\dagger(V)$ , 12	$n(\gamma)$ , 34
$\mathbf{D}_{\log}^\dagger(V)$ , 27	$n(K)$ , 12
$\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , 27	$n(r)$ , 11
$\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , 43	$N_s$ , 47
$\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ , 10	$\omega$ , 9
$\delta_{\pi_K}$ , 53	$\varphi$ , 10
$\partial$ , 35	$\pi, \pi_n$ , 9
$\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ , 43	$\overline{\pi}_K$ , 10
$\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , 11	$\pi_K$ , 12
$\mathbf{D}_{\text{st}}^+(V)$ , 28	$\tilde{p}$ , 9
$\mathbf{E}$ , 9	$q$ , 9
$\mathbf{E}_F$ , 9	$R_k$ , 26
$\mathbf{E}_K, \mathbf{E}_K^+$ , 9	$r_n$ , 11
$e_K$ , 10	$r_{n(K)}$ , 12
$\mathbf{E}^+$ , 9	$\mathcal{R}_F$ , 49
$\varepsilon$ , 9	$r(V)$ , 12
$\widetilde{\mathbf{E}}$ , 9	$t$ , 10
$\widetilde{\mathbf{E}}^+$ , 9	$\theta$ , 9
$\exp_V$ , 57	$\Theta_V$ , 43
	$v_{\mathbf{E}}$ , 9
	$V_I$ , 15
	$W_I$ , 16

## Bibliographie

- [1] André Y.: *Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel  $p$ -adiques*. À paraître dans Ann. Inst. Fourier.
- [2] André Y.: *Filtrations de Hasse-Arf et monodromie  $p$ -adique*. Prépublication no 303 de l'Institut Mathématique de Jussieu, À paraître dans *Inventiones Mathematicae*.
- [3] Benois D.: *On Iwasawa theory of crystalline representations*. Duke Math. J. 104 (2000) 211–267.

- [4] Berthelot P.: *Lettre datée du 29 Mars 2001*.
- [5] Bloch S., Kato K.: *L-functions and Tamagawa numbers of motives*. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [6] Bourbaki N.: *Algèbre commutative*. Hermann, Paris 1961 187 pp.
- [7] Cherbonnier F.: *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*. Thèse de l’Université d’Orsay, 1996.
- [8] Cherbonnier F., Colmez P.: *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*. Invent. Math. 133 (1998), 581–611.
- [9] Cherbonnier F., Colmez P.: *Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d’un corps local*. J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 241–268.
- [10] Christol G.: *About a Tsuzuki theorem*.  $p$ -adic functional analysis (Ioannina, 2000), 63–74, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 222, Dekker, New York, 2001.
- [11] Christol G., Mebkhout Z.: *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles  $p$ -adiques. II*. Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 2, 345–410.
- [12] Christol G., Mebkhout Z.: *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles  $p$ -adiques. III*. Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 385–457.
- [13] Christol G., Mebkhout Z.: *Sur le théorème de l’indice des équations différentielles  $p$ -adiques. IV*. Invent. Math. 143 (2001), no. 3, 629–672.
- [14] Christol G., Mebkhout G.: *Équations différentielles  $p$ -adiques et coefficients  $p$ -adiques sur les courbes*. À paraître dans Astérisque.
- [15] Christol G., Robba P.: *Équations différentielles  $p$ -adiques. Applications aux sommes exponentielles*. Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1994.
- [16] Colmez P.: *Sur un résultat de Shankar Sen*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 318 (1994), no. 11, 983–985.
- [17] Colmez P.: *Théorie d’Iwasawa des représentations de de Rham d’un corps local*. Ann. of Math. 148 (1998), 485–571.
- [18] Colmez P.: *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie*. J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.
- [19] Colmez P.: *Fonctions  $L$   $p$ -adiques*. Séminaire Bourbaki, 1998/99, Astérisque 266 (2000) Exp. 851.
- [20] Colmez P.: *Espaces de Banach de dimension finie*. Prépublication no 263 de l’Institut Mathématique de Jussieu.
- [21] Colmez P., Fontaine J-M.: *Constructions des représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Invent. Math. 140 (2000) 1–43.
- [22] Crew R.: *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 31 (1998) 717–763.
- [23] Emerton M., Kisin M.: *Extensions of crystalline representations*. Preprint (1999).
- [24] Fontaine J-M.: *Le corps des périodes  $p$ -adiques*. Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 59–111.
- [25] Fontaine J-M.: *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Périodes  $p$ -adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 113–184.
- [26] Fontaine J-M.: *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux I*. The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [27] Fontaine J-M.: *Arithmétique des représentations galoisiennes  $p$ -adiques*. Prépublication de l’Université d’Orsay, 2000-24. À paraître dans Astérisque.
- [28] Fontaine J-M., Wintenberger J-P.: *Le “corps des normes” de certaines extensions algébriques de corps locaux*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no. 6, A367–A370.

- [29] Fresnel J., van der Put M.: *Géométrie analytique rigide et applications*. Progress in Mathematics, 18. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. xii+215 pp.
- [30] Helmer O.: *The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition*. Bull. Amer. Math. Soc. 49, (1943). 225–236.
- [31] Herr L.: *Sur la cohomologie galoisienne des corps  $p$ -adiques*. Bull. Soc. Math. France 126 (1998) 563–600.
- [32] Hyodo O.:  $H_g^1 = H_{st}^1$ . Non publié.
- [33] Kato K.: *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil  $L$ -functions via  $\mathbf{B}_{dR}$* . Arithmetic algebraic geometry, Lecture Notes in Mathematics 1553, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 50–63.
- [34] Kedlaya K.: *A  $p$ -adic local monodromy theorem*. Preprint disponible sur xxx.arxiv.org: math.AG/0110124.
- [35] Kripke B.: *Finitely generated coherent analytic sheaves*. Proc. Amer. Math. Soc. 21 1969 530–534.
- [36] Lazard M.: *Les zéros des fonctions analytiques d’une variable sur un corps valué complet*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.
- [37] Mebkhout Z.: *Analogie  $p$ -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie  $p$ -adique*. À paraître dans Inventiones Mathematicae.
- [38] Nekovář J.: *On  $p$ -adic height pairings*. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [39] Perrin-Riou B.: *Représentations  $p$ -adiques ordinaires*. Périodes  $p$ -adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 185–220.
- [40] Perrin-Riou B.: *Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local*. Invent. Math. 115 (1994) 81–161.
- [41] Perrin-Riou B.: *Théorie d’Iwasawa et loi explicite de réciprocité*. Doc. Math. 4 (1999), 219–273 (electronic).
- [42] Perrin-Riou B.: *Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 84 (2001), vi+111 pp.
- [43] Sen S.: *Ramification in  $p$ -adic Lie extensions*. Invent. Math. 17 (1972) 44–50.
- [44] Sen S.: *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules*. Ann. of Math. 97 (1973) 160–170.
- [45] Sen S.: *Continuous cohomology and  $p$ -adic Galois representations*. Invent. Math. 62 (1980/81) 89–116.
- [46] Serre J-P.: *Lie Algebras and Lie Groups*. Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1500. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [47] Serre J-P.: *Abelian  $\ell$ -adic representations and elliptic curves*. With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute. Second edition. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. xxiv+184 pp.
- [48] Serre J-P.: *Corps locaux*. Deuxième édition. Publications de l’Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. 245 pp.
- [49] Tate J.:  *$p$ -divisible groups*. Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) 158–183 Springer, Berlin.
- [50] Tolkien J.: *The Lord of the Rings*. Houghton Mifflin Co.
- [51] Tsuji T.:  *$p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*. Invent. Math. 137 (1999), 233–411.
- [52] Tsuzuki N.: *Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent  $F$ -isocrystals*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), 379–412.

- [53] Tsuzuki N.: *Finite local monodromy of overconvergent unit-root  $F$ -isocrystals on a curve*. Amer. J. Math. 120 (1998) 1165–1190.
- [54] Wach N.: *Représentations  $p$ -adiques potentiellement cristallines*. Bull. Soc. Math. France 124 (1996), 375–400.
- [55] Wach N.: *Représentations cristallines de torsion*. Compositio Math. 108 (1997) 185–240.
- [56] Wintenberger J-P.: *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; applications*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.

---

*Mai 2002*

LAURENT BERGER