
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHS DE 6H, ENS 2008

par

Laurent Berger

Remarque : il s'agit d'un corrigé rapide et non d'un modèle de ce que les étudiants doivent avoir écrit. En ce qui concerne le barème, le total est de 200 points.

1. Premiers calculs (31 pts)

1.1. 2 pts. — S'il existe $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$, et $w = v/\|v\|$, alors $\lambda = \langle w|f(w) \rangle \in \mathcal{H}(f)$.

1.2. 2 pts. — Cela suit du fait que $\langle x|(\lambda f + \mu \text{Id})(x) \rangle = \lambda \langle x|f(x) \rangle + \mu$.

1.3. 5 pts. — Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, alors $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\langle x|f(x) \rangle = |x_1|^2$ et donc $\mathcal{H}(f) = \{|x_1|^2 \text{ avec } |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\} = [0; 1]$.

1.4. 6 pts. — Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, alors $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\langle x|f(x) \rangle = \bar{x}_1 x_2$. En écrivant $x_j = r_j e^{i\theta_j}$, on trouve que $\mathcal{H}(f) = \{r_1 r_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \text{ avec } r_1, r_2 \geq 0 \text{ et } r_1^2 + r_2^2 = 1\}$. Comme $r_1 r_2 \leq (r_1^2 + r_2^2)/2$, $r_1 r_2$ prend toutes les valeurs entre 0 et 1/2 et donc $\mathcal{H}(f)$ est bien l'ensemble $\{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1/2\}$.

1.5. 8 pts. — L'application $z \mapsto \langle z|f(z) \rangle$ est continue de $E \rightarrow \mathbf{C}$ et comme E est de dimension finie, la sphère unité de E est compacte. L'image d'un compact par une application continue étant compact, on trouve que $\mathcal{H}(f)$ est compact.

1.6. 8 pts. — Remarquons que $\|f(x)\| \leq \|x\|$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors que $|\langle x|f(x) \rangle| \leq 1$ et on a égalité si et seulement si x et $f(x)$ sont colinéaires, $f(x) = \omega x$, ce qui entraîne $x_n = \omega^{n-1} x_1$ et donc $|\omega| < 1$ si $x \neq 0$. Dans tous les cas, $\mathcal{H}(f) \subset \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$.

Réciproquement, si $|\omega| < 1$ et $x = (1, \omega, \omega^2, \dots)$, alors x est vecteur propre de f pour la valeur propre ω et donc $\omega \in \mathcal{H}(f)$ ce qui fait qu'on a bien $\mathcal{H}(f) = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$.

2. Réduction de certains endomorphismes (32 pts)

2.1. 6 pts. — Un calcul direct donne :

$$\|f^*(v) - \bar{\lambda}v\|^2 = \langle f f^*(v) | v \rangle - \lambda \langle v | f^*(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle f^*(v) | v \rangle + \|\bar{\lambda}v\|^2 = \|f(v) - \lambda v\|^2 = 0$$

2.2. 6 pts. — L'espace $\mathbf{C} \cdot v$ est un espace propre de f^* et on sait que l'orthogonal d'un espace propre de f^* est stable par f .

2.3. 6 pts. — Comme \mathbf{C} est algébriquement clos, f admet un vecteur propre pour une valeur propre λ_1 . L'orthogonal de ce vecteur propre est stable par f ce qui permet de conclure par récurrence sur $\dim(E)$.

2.4. 6 pts. — La matrice de f^* dans une base orthonormée est ${}^t\overline{\text{Mat}(f)}$. En se plaçant dans une base de diagonalisation de f , on trouve ce qu'il faut.

2.5. 8 pts. — Comme \mathbf{C} est algébriquement clos, f admet une base e_1, \dots, e_d dans laquelle $\text{Mat}(f)$ est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Le procédé de Gram-Schmidt permet de remplacer la base e_1, \dots, e_d par une base orthonormée g_1, \dots, g_d telle que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(g_1, \dots, g_i)$ et on a alors $f(g_i) \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_i)$.

Ensuite, si $\text{Mat}(f)$ est diagonale dans une base orthonormée, alors f est manifestement normale. Réciproquement, si f est normale, et si on suppose que $M = \text{Mat}(f)$ est triangulaire supérieure dans une base orthonormée, alors :

$$({}^t\overline{M}M)_{i,i} = \sum_{j \leq i} |a_{j,i}|^2 = (M{}^t\overline{M})_{i,i} = |a_{i,i}|^2$$

ce qui fait que $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et donc que $\text{Mat}(f)$ est diagonale.

3. Le Hausdorffien en dimension 2 (38 pts)

3.1. 6 pts. — On se place dans une base orthonormée de E dans laquelle $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, alors $\langle x | f(x) \rangle = \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2$ et donc $\mathcal{H}(f) = \{t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2, 0 \leq t \leq 1\}$, c'est-à-dire le segment d'extrémités λ_1 et λ_2 .

3.2. 10 pts. — On trouve que $\mathcal{H}(f) = \{a\bar{x}_1 x_2 + b x_1 \bar{x}_2, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}$, c'est-à-dire en utilisant les indications de la question :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= \{a_0 r_1 r_2 e^{i(\alpha - \phi - (\alpha - \beta)/2 + \theta + \phi)} + b_0 r_1 r_2 e^{i(\beta - \theta - \phi + \phi + (\alpha - \beta)/2)}\} \\ &= \{r_1 r_2 e^{i(\alpha + \beta)/2} (a_0 e^{i\theta} + b_0 e^{-i\theta})\} \\ &= \{r e^{i(\alpha + \beta)/2} ((a_0 + b_0) \cos(\theta) + i(a_0 - b_0) \sin(\theta))\} \end{aligned}$$

où $0 \leq r \leq 1/2$. On trouve donc que $\mathcal{H}(f)$ est l'image par une rotation d'angle $(\alpha + \beta)/2$ du disque elliptique centré en 0 et d'axes parallèles aux axes de coordonnées, ces axes étant de longueurs $a_0 + b_0$ et $|a_0 - b_0|$.

3.3. 10 pts. — Si les deux valeurs propres de f sont égales, alors elles sont nulles et la question 2.5 nous donne une base orthonormée de E dans laquelle $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si f est normal, alors il existe une base orthonormée v, w de E dans laquelle $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ et dans la base $(v+w)/\sqrt{2}, (v-w)/\sqrt{2}$, on a $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, si f n'est pas normale et que ses valeurs propres sont distinctes, alors on est dans le troisième cas et avec les notations de l'induction, on a $\langle u|f(u) \rangle = \lambda(\alpha \overline{\langle v|w \rangle} - \alpha \langle v|w \rangle)$ et il suffit donc de choisir α tel que $\alpha \langle v|w \rangle \in \mathbf{R}$ pour que $\langle u|f(u) \rangle = 0$. Quitte à diviser u par sa norme, il est de norme 1 et si l'on écrit la matrice de f dans une base orthonormée u, y , alors $\langle u|f(u) \rangle = 0$ et $\text{Tr}(f) = 0$ impliquent que la diagonale de $\text{Mat}(f)$ est nulle.

3.4. 6 pts. — Ecrivons $f = (f - (\text{Tr}(f)/2)\text{Id}) + (\text{Tr}(f)/2)\text{Id}$. L'endomorphisme $f - (\text{Tr}(f)/2)\text{Id}$ est de trace nulle et on peut lui appliquer la question 3.3 et donc ensuite la question 3.2. Par la question 1.2, on trouve que $\mathcal{H}(f)$ est un disque elliptique centré en $\text{Tr}(f)/2$.

Ce disque elliptique est dégénéré si et seulement si $|a| = |b|$ et un calcul direct montre que dans ce cas, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ commute à son adjointe ce qui fait que $f = (f - (\text{Tr}(f)/2)\text{Id})$ et donc f est normal. Si f est normal, alors $\mathcal{H}(f)$ est un segment par la question 3.1.

Enfin $\mathcal{H}(f)$ est un vrai disque si et seulement si les deux axes ont même longueur, c'est-à-dire si $a = 0$ ou $b = 0$, ce qui se produit si et seulement si les valeurs propres de f sont égales.

3.5. 6 pts. — L'assertion n'étant pas affectée par une translation et une rotation, on suppose que $\text{Tr}(f) = 0$ et que $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels positifs (par similitude unitaire) avec $a \geq b$. Dans ce cas, $\mathcal{H}(f)$ est centré en 0 et ses axes sont parallèles aux axes de coordonnées, de longueurs $a + b$ et $a - b$. Par ailleurs, les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ sont $\pm\sqrt{ab}$, qui sont aussi les foyers de l'ellipse centrée en 0 dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées, de longueurs $a + b$ et $a - b$.

4. Hausdorffien et convexité (55 pts)

4.1. 5 pts. — Si $x \in F$, alors $\langle x|\pi_F \circ f(x) \rangle = \langle x|f(x) \rangle$ et donc $\langle x|\pi_F \circ f(x) \rangle \in \mathcal{H}(f)$.

4.2. 6 pts. — En utilisant les notations de l'indication, on a $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F) \subset \mathcal{H}(f)$ et comme $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$ est un disque elliptique qui contient z_1 et z_2 , le segment $[z_1; z_2]$ est inclus dans $\mathcal{H}(f)$.

4.3. 6 pts. — Les questions 4.1 et 4.2 montrent que $\text{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \mathcal{H}(f_2)) \subset \mathcal{H}(f)$. Réciproquement, si $z = \langle x|f(x) \rangle \in \mathcal{H}(f)$ avec $x = (x_1, x_2)$ et $y_i = x_i/\|x_i\|$, alors :

$$\begin{aligned} \langle x|f(x) \rangle &= \langle x_1|f_1(x_1) \rangle + \langle x_2|f_2(x_2) \rangle \\ &= \|x_1\|^2 \langle y_1|f_1(y_1) \rangle + \|x_2\|^2 \langle y_2|f_2(y_2) \rangle \in \text{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \mathcal{H}(f_2)). \end{aligned}$$

En particulier, si f est normal, alors $\mathcal{H}(f) = \text{Conv}(\cup_{i=1}^d \mathcal{H}(\lambda_i))$ où λ_i est la multiplication par λ_i sur \mathbf{C} ce qui fait que $\mathcal{H}(\lambda_i) = \lambda_i$ et donc que $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f . Enfin, la question 1.4 montre que ceci n'est pas vrai en général.

4.4. 6 pts. — On suppose que les sommets de \mathcal{C} sont numérotés s_1, s_2, \dots, s_m dans l'ordre de parcours. En particulier, la droite $s_i s_{i+1}$ est tangente à \mathcal{C} . Supposons que $s = s_2$. Comme \mathcal{E} est inclus dans \mathcal{C} , les droites $s_1 s_2$ et $s_2 s_3$ sont tangentes à \mathcal{E} et donc coïncident. Ceci montre que s_2 est combinaison convexe de s_1 et s_3 , contradiction.

4.5. 8 pts. — Par la question 4.1, on a $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F) \subset \mathcal{H}(f)$ et la question 4.4 implique alors que le disque elliptique $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$ est dégénéré. Par la question 3.4, cela implique que $\pi_F \circ f|_F$ est normal et que λ en est une valeur propre. Si v, w est une base orthonormée de F telle que $\pi_F \circ f(v) = \lambda v$ et $\pi_F \circ f(w) = \mu w$, alors $x = \alpha v + \beta w$ et $\langle x|\pi_F \circ f(x) \rangle = |\alpha|^2 \lambda + |\beta|^2 \mu$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ce qui fait que si $\lambda \neq \mu$, alors $x = v$ et dans tous les cas, x est un vecteur propre de $\pi_F \circ f$.

Ceci montre que quel que soit F de dimension 2 contenant x , on a $\pi_F \circ f(x) = \lambda x$. En prenant $F = \text{Vect}(x, f(x))$, on trouve que $f(x)$ est colinéaire avec x et donc que $f(x) = \lambda x$.

4.6. 6 pts. — La matrice a deux blocs : un bloc 3×3 normal dont les valeurs propres sont $1, j, j^2$, et dont le Hausdorffien est donc un triangle équilatéral, et un bloc 2×2 nilpotent dont le Hausdorffien est un disque centré en 0 et de rayon $\varepsilon/2$. Le Hausdorffien de f est l'enveloppe convexe de ces deux ensembles, et si $\varepsilon \leq 1$, alors le disque est contenu dans le triangle et on trouve donc le triangle seul, qui est bien l'enveloppe convexe des valeurs propres de f , bien que f n'est pas normal puisque le deuxième bloc est nilpotent.

4.7. 12 pts. — Comme $\dim(E) \leq 4$, si $\mathcal{H}(f)$ est un convexe polygonal, alors c'est un point ou un segment ou un triangle ou un quadrilatère. Soient λ et μ deux valeurs propres de f , x et y deux vecteurs propres de norme 1 associés et $F = \text{Vect}(x, y)$. On a $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F) \subset \mathcal{H}(f)$ et si $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$ est un disque elliptique non dégénéré, alors $\mathcal{H}(f)$

doit être un triangle ou un quadrilatère et les deux foyers de l'ellipse correspondent à deux valeurs propres de f en plus des trois ou quatre sommets de $\mathcal{H}(f)$, ce qui est absurde. On en conclut que si $\lambda \neq \mu$, alors $x \perp y$ et que si $\lambda = \mu$, alors $f|_F = \lambda \text{Id}$ et donc que f est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire normal.

4.8. 6 pts. — Comme $0 = \text{Tr}(f)/\dim(E)$ est combinaison convexe des valeurs propres de f , on a $0 \in \mathcal{H}(f)$ et il existe donc un vecteur x de norme 1 tel que $\langle x|f(x) \rangle = 0$. Si l'on pose $F = (\mathbf{C}x)^\perp$, alors la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $\mathbf{C}x \oplus F$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & \text{Mat}(\pi_F \circ f|_F) \end{pmatrix},$$

et donc $\text{Tr}(\pi_F \circ f|_F) = 0$. Par récurrence, il existe une base orthonormée de F dans laquelle la diagonale de $\text{Mat}(\pi_F \circ f|_F)$ est nulle et cela nous donne en complétant une base orthonormée de E dans laquelle la diagonale de $\text{Mat}(f)$ est nulle.

5. L'inégalité de von Neumann (44 pts)

5.1. 5 pts. — Si f est diagonalisable en base orthonormée, et si les coordonnées de $x \in E$ dans cette base sont x_1, \dots, x_d , alors $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^d |\lambda_i|^2 |x_i|^2$ et donc $\|f\| = \sup_i |\lambda_i|$ ce qui implique le premier point. Si f est diagonalisable en base orthonormée, alors $P(f)$ est diagonalisable dans la même base et les valeurs propres de $P(f)$ sont les $P(\lambda_i)$. On a donc $\|f\| = \sup_i |P(\lambda_i)|$ ce qui implique l'inégalité de von Neumann dans ce cas.

5.2. 6 pts. — L'endomorphisme f^*f est hermitien et positif car si x en est un vecteur propre, alors $\langle x|f^*f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0$. Si $f^*f(x_i) = \lambda_i^2 x_i$ dans une base orthonormée x_1, \dots, x_d avec $\lambda_i > 0$, on définit alors h par $h(x_i) = \lambda_i x_i$ ce qui fait que h est hermitien positif et que $f^*f = h^2$. Si l'on pose $u = fh^{-1}$, alors $u^*u = h^{-1}f^*fh^{-1} = \text{Id}$ et donc u est unitaire. Enfin, h est uniquement déterminé par les conditions h hermitien positif et $h^2 = f^*f$ puisqu'il est uniquement déterminé sur chacun des $\ker(f^*f - \lambda^2 \text{Id})$.

5.3. 5 pts. — L'ensemble des endomorphismes unitaires est compact car il est fermé (défini par $uu^* = \text{Id}$) et borné (si u est unitaire, alors $\|u\| \leq 1$). Pour tout ε tel que $-\varepsilon$ n'est pas une valeur propre de f , on peut écrire $f + \varepsilon \cdot \text{Id} = u_\varepsilon h_\varepsilon$ et si la suite $\varepsilon_i \rightarrow 0$ est telle que $u_{\varepsilon_i} \rightarrow u$, alors $u_{\varepsilon_i}^{-1}(f + \varepsilon_i \cdot \text{Id}) \rightarrow h$ et on a $f = uh$. Enfin, l'ensemble des endomorphismes hermitiens positifs est fermé car il est défini par $h^* = h$ et $\langle x|h(x) \rangle \geq 0$ pour tout x , ce qui fait que h est lui-même hermitien positif.

5.4. 5 pts. — On a $\|uh(x)\| = \|h(x)\|$ et donc $\|h\| = \sup_j |\mu_j|$ ce qui fait que $f = uh$ est une contraction si et seulement si $|\mu_j| \leq 1$ pour tout j .

5.5. 5 pts. — Par linéarité, il suffit de traiter le cas $Q(X) = X^n$. Dans ce cas, on a $(X + re^{i\theta})^n = X^n + \sum_{1 \leq k \leq n} a_k X^{n-k} e^{ik\theta}$ et comme $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_0^n d\theta = z_0^n$ et $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 0$ si $k \geq 1$, on trouve bien que $Q(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$.

5.6. 6 pts. — Si $Q(X) \in \mathbf{C}[X]$, alors on a :

$$\begin{aligned} |Q(z_0)|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |Q(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1^2 d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Pour d polynômes, il suffit de faire la somme.

Soit ensuite z_0 tel que $|z_0| \leq 1$ et $|Q_1(z_0)|^2 + \dots + |Q_d(z_0)|^2$ atteint le sup sur le disque unité. Si $|z_0| < 1$, soit $r = 1 - |z_0|$. La quantité $|Q_1(z_0 + re^{i\theta})|^2 + \dots + |Q_d(z_0 + re^{i\theta})|^2$ est $\leq |Q_1(z_0)|^2 + \dots + |Q_d(z_0)|^2$ et si son intégrale est $\geq |Q_1(z_0)|^2 + \dots + |Q_d(z_0)|^2$, c'est qu'on avait égalité partout. En particulier, étant donné le choix de r , il existe un point du cercle unité où le sup est atteint.

Enfin, pour les polynômes en plusieurs variables, si le sup est atteint en un point $z \in \mathbf{C}^n$ et que l'un des z_j vérifie $|z_j| < 1$, alors en fixant les $n - 1$ autres variables, on voit que le sup est aussi atteint pour un z_j tel que $|z_j| = 1$, les autres variables étant inchangées. Ceci permet de ramener z sur le bord variable par variable.

5.7. 6 pts. — Les coefficients de la matrice $P(f_\mu)$ sont des combinaisons \mathbf{C} -linéaires de polynômes en les μ_j , tout le reste étant fixé ce qui donne bien l'existence des Q_j .

En appliquant la question 5.6, on trouve que, tout étant fixé sauf les μ_j , le sup de $\|P(f_\mu)(z)\|$ pour $|\mu_j| \leq 1$ est atteint quand $|\mu_j| = 1$ pour tout j .

5.8. 6 pts. — Les questions 5.3 et 5.4 montrent que si l'on se donne une contraction $f \in \text{End}(E)$, alors il existe u et w et μ comme ci-dessus, avec $|\mu_j| \leq 1$, tels que $f = f_\mu$. On en déduit que $\|P(f)(x)\| \leq \|P(g)(x)\|$ où g est un $f_{\mu'}$ avec $|\mu'_j| = 1$ pour tout j . Mais un tel g est unitaire, et donc $\|P(g)(x)\| \leq \sup_{|\lambda| \leq 1} |P(\lambda)| \|x\|$ par la question 5.1 et donc $\|P(f)(x)\| \leq \sup_{|\lambda| \leq 1} |P(\lambda)| \cdot \|x\|$ ce qui termine la démonstration de l'inégalité de von Neumann.