CORRIGÉ MATHS D ULM 2018

par

Laurent Berger & Sandra Rozensztajn

Commentaires sur le problème

Weierstrass a montré en 1885 que si $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est limite uniforme de polynômes. L'essentiel du problème est inspiré par la question : quelles fonctions continues sur $[a, b]$ sont limites uniformes de polynômes à coefficients entiers? Le premier résultat dans cette direction est dû à Pál, qui a montré en 1914 que si $0 < a < 1$, alors une fonction continue $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement si $f(0) \in \mathbf{Z}$. La même année, Kakeya a traité le cas de l'intervalle $[-1, 1]$ (voir la question 4.12) et des intervalles de longueur ≥ 4 (question 3.6). Après d'autres résultats partiels dus à divers auteurs, le résultat général (qui fait l'objet des questions 4.11 et 7.7) a été démontré par Hewitt et Zuckerman en 1959 dans [**HZ59**]. Nous renvoyons à [**HZ59**], à l'article de survol [**Fer06**] et à la monographie [**Fer80**] (en particulier les notes historiques et remarques) par Le Baron O. Ferguson pour plus de références, ainsi qu'à [**Ber00**] dont le problème est en grande partie inspiré.

1. Existence et unicité d'une meilleure approximation

Remarque : cette partie est directement inspirée du II.4.12 de [**GT96**].

1.1. La définition de m implique qu'il existe $p \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\|f - p\|_I \leq 1 + m$, et C est donc non vide. Si $g \in C$, alors $\|g\|_I \leq 1 + m + \|f\|_I$ et C est donc borné. Enfin, C est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[0, 1 + m]$ par l'application continue $p \mapsto \|f - p\|_I$. Ainsi l'ensemble C est une partie fermée et bornée du $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{R}_n[X]$, et est donc compact.

1.2. La fonction $p \mapsto \|f-p\|_I$ est continue sur le compact C, et y atteint donc un minimum en un point p, qui vérifie alors $\|f-p\|_I = m$ étant données les définitions de C et de m. Si $m=0$, alors $f=p$ sur I.

1.3. Ceci résulte du théorème d'interpolation de Lagrange; le polynôme q est alors de degré au plus $k-1$, et $k-1 \leq n$.

1.4. Comme $f(x_i) = q(x_i)$ et comme f et q sont des fonctions continues, pour tout i il existe δ_i tel que $|f(x) - q(x)| < \varepsilon$ si $|x - x_i| < \delta_i$. On prend alors $\delta = \min_i \delta_i$.

1.5. Si $x \in U_\delta$, alors $|f(x) - p_t(x)| = |(1-t)(f-p)(x) + t(f-q)(x)| \leq (1-t)m + t|(f-q)(x)| \leq (1-t)m + t\varepsilon$. Si $x \notin U_\delta$, alors $|f(x) - p_t(x)| \leq |f(x) - p(x)| + t|p(x) - q(x)| \leq t\ell + \sup_{y \in I \setminus U_\delta} |f(y) - p(y)|$.

1.6. La fonction $y \mapsto f(y) - p(y)$ est continue sur $I \setminus U_\delta$ qui est compact, et elle y admet donc un maximum m'. On a $m' < m$, comme U_δ contient tous les x_i. Prenons $\varepsilon < m/2$ et $0 < t < 1$ tel que $t\ell + m' < m$. Si $x \in U_\delta$, alors $|f(x) - p_t(x)| \leq (1-t)m + tm/2 = m(1-t/2)$ et si $x \notin U_\delta$, alors $|f(x) - p_t(x)| \leq t\ell + m'$. On voit donc que $\|f - p_t\|_I < m$, contradiction. L'équation $|f(x) - p(x)| = m$ admet donc au moins $n+2$ solutions distinctes dans I.

1.7. Soit $p = (p_1 + p_2)/2$. On observe que $\|f-p\|_I = m$. L'équation $|f(x) - p(x)| = m$ admet au moins $n+2$ solutions distinctes dans I par la question précédente. Si x est une telle solution, alors l'inégalité $|(f-p_1)(x)/2 + (f-p_2)(x)/2| \leq |(f-p_1)(x)/2| + |(f-p_2)(x)/2|$ est une égalité et donc $(f-p_1)(x)/2 = (f-p_2)(x)/2 = \pm m$. Ceci implique que $p_1(x) = p_2(x)$. Les deux polynômes p_1 et p_2 sont de degrés au plus n et coïncident en au moins $n+2$ points, ils sont donc égaux.

2. Capacité d'un compact

2.1. Soit f la fonction $f(x) = x^n$. Le même raisonnement qu'en 1.1 montre que la fonction $g \mapsto \|f-g\|_K$, de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{R}$, admet un minimum en un point $g \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. On peut alors poser $p = f - g$, qui est un polynôme unitaire de degré n. Si $K = [a,b]$, alors g (et donc p) est unique par le résultat principal de la partie précédente.

2.2. Supposons que $\ell \in \mathbf{R}$. Quitte à remplacer ℓ_n par $\ell_n - \ell$, on peut supposer que $\ell = 0$ et donc que $\ell_n \geq 0$ pour tout n. Si $a, q \geq 1$, alors $\ell_{qa} \leq \ell_{(q-1)a} \cdot (q-1)/q + \ell_a/q$ et donc par récurrence sur a, on trouve $\ell_{qa} \leq \ell_a$. Si $0 \leq r \leq a-1$, on a $\ell_{qa+r} \leq \ell_{qa} \cdot qa/(qa+r) + \ell_r \cdot r/(qa+r) \leq \ell_a + \ell_r/q$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe a tel que $\ell_a < \varepsilon/2$. Soit

$M = \max_{0\leq r\leq a-1} \ell_r$ et q_0 tel que $M/q_0 < \varepsilon/2$. On a alors $\ell_{qa+r} < \varepsilon/2 + M/q < \varepsilon$ pour $q \geq q_0$ et donc $\ell_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq q_0 a$ en écrivant $n = qa + r$.

Le raisonnement pour $\ell = -\infty$ est similaire.

2.3. Si $t_n = \|q_n\|_K$ et $t_m = \|q_m\|_K$, alors $q_n q_m$ est un polynôme unitaire de degré $m+n$ et donc $t_{m+n} \leq t_m t_n$. Le résultat suit alors de la question précédente en posant $\ell_n = \log(t_n)/n$ (notons que $t_n > 0$ car K est de cardinal infini ce qui fait que si q est un polynôme tel que $\|q\|_K = 0$, alors $q = 0$).

2.4. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$ et $P = \prod_{k=1}^{n+1} \prod_{i<j,\ i,j\neq k} |x_i - x_j|$. On a $P \leq w_n^{n+1}$ (pour chaque k, le produit intérieur vaut au plus w_n). Par ailleurs, dans le produit qui définit P, le terme $|x_i - x_j|$ apparaît $n-1$ fois. On a donc $\sup_{x_1,\ldots,x_{n+1}\in K} P = w_{n+1}^{n-1}$. Ceci montre que $w_{n+1}^{n-1} \leq w_n^{n+1}$ et donc que $w_{n+1}^{2/((n+1)n)} \leq w_n^{2/(n(n-1))}$.

2.5. La fonction $x_1, \ldots, x_n \mapsto \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|$ de K^n dans $\mathbf{R}$ est continue sur le compact K^n et y admet donc un maximum, ce qui montre l'existence de $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $w_n = \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|$. Prenons p comme suggéré. De même, il existe $x_{n+1} \in K$ tel que $|p(x_{n+1})| = \|p\|_K$. On a alors $t_n \leq \|p\|_K = |p(x_{n+1})| = \prod_{1\leq i<j\leq n+1} |x_i - x_j|/w_n \leq w_{n+1}/w_n$.

2.6. Quel que soit p unitaire de degré n, le déterminant de la matrice est, par opérations élémentaires sur les colonnes, le même que pour $p(X) = X^n$. Ce déterminant est alors de Vandermonde et vaut $\prod_{1\leq i<j\leq n+1}(x_j - x_i)$. On en déduit l'égalité demandée en choisissant les x_i de sorte que $w_{n+1} = \prod_{1\leq i<j\leq n+1} |x_i - x_j|$.

L'inégalité suit en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, et en observant que $|p(x_i)| \leq t_n$ et que chaque sous-déterminant $n\times n$ est aussi de Vandermonde et est borné par w_n.

2.7. C'est le théorème de Cesàro, dont la démonstration est classique.

2.8. Par la question 2.5, on a $t_1 \leq w_2/w_1$ et $t_2^{1/2} \leq w_3^{1/2}/w_2^{1/2}$, ..., $t_n^{1/n} \leq w_{n+1}^{1/n}/w_n^{1/n}$ et donc $t_1 t_2^{1/2} \cdots t_n^{1/n} \leq w_2^{1/2\cdot 1} w_3^{1/3\cdot 2} \cdots w_n^{1/n(n-1)} \cdot w_{n+1}^{1/n}$. La question précédente implique que si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers une limite u, alors la suite $\{(u_1 \cdots u_n)^{1/n}\}_{n\geq 1}$ tend aussi vers u. On a

$$\left(t_1 t_2^{1/2} \cdots t_n^{1/n}\right)^{1/n} \leq \left(1 \cdot w_2^{1/2\cdot 1} w_3^{1/3\cdot 2} \cdots w_n^{1/n(n-1)}\right)^{1/n} \cdot w_{n+1}^{1/n^2}.$$

Ceci implique que $d_1(K) \leq d_2(K)^{1/2} \cdot d_2(K)^{1/2} = d_2(K)$.

Par ailleurs, on a $w_{n+1} \leq (n+1)w_n t_n$ par la question 2.6 et ceci implique par le même genre de raisonnement que $d_2(K) \leq d_1(K)$.

3. Polynômes de Tchebychev

3.1. Le polynôme est unique car $\cos(\theta)$ parcourt l'intervalle $[-1;1]$ et deux polynômes qui coïncident sur $[-1;1]$ sont égaux.

Montrons l'existence; on a $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ et donc $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \cos(\theta)^{n-2k}(-1)^k \sin(\theta)^{2k}\binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \cos(\theta)^{n-2k}(\cos(\theta)^2 - 1)^k\binom{n}{2k}$. On peut donc prendre $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} X^{n-2k}(X^2-1)^k\binom{n}{2k}$.

Ce polynôme est de degré au plus n et le coefficient de X^n est $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} > 0$. Le polynôme T_n est donc de degré n.

3.2. Le coefficient de X^n est $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k}$. On a $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = (1+1)^n$ et $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$ ce qui fait que $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k} = 2^{n-1}$. Le polynôme $2^{1-n}T_n$ est donc unitaire.

Si $x \in [-1,1]$, alors on peut écrire $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0,\pi]$ d'une et une seule manière. On en déduit que $\|T_n\|_{[-1,1]} = 1$, et que si $x \in [-1,1]$, alors $T_n(x) = \pm 1$ précisément quand x est de la forme $\cos(k\pi/n)$ avec $0 \leq k \leq n$. La restriction du polynôme $2^{1-n}T_n$ à l'intervalle $[-1,1]$ admet donc $n+1$ extrema dans cet intervalle.

3.3. Si $x \in [-1,1]$, alors $T_n(x) = \pm 1$ quand x est de la forme $\cos(k\pi/n)$ avec $0 \leq k \leq n$. On en déduit que si $\|f-q\|_I < 2^{1-n}$, alors $2^{1-n}T_n(x) - (f-q)(x)$ est strictement positif quand $x = \cos(\theta)$ avec $\theta = 0, 2\pi/n, \ldots$ et strictement négatif quand $x = \cos(\theta)$ avec $\theta = \pi/n, 3\pi/n, \ldots$ Ceci implique que $2^{1-n}T_n - (f-q)$ change de signe au moins n fois dans $[-1,1]$, et admet donc au moins n racines distinctes dans $[-1,1]$.

Comme $2^{1-n}T_n$ et $f-q$ sont unitaires de degré n, le polynôme $2^{1-n}T_n - (f-q)$ est de degré au plus $n-1$. S'il a au moins n racines, c'est qu'il est nul. Comme $\|2^{1-n}T_n\|_I = 2^{1-n}$, on a une contradiction. Donc $\|f-q\|_I \geq 2^{1-n}$.

On déduit de ceci que $\|T_n^I\|_I \geq 2^{1-n}$. Comme par ailleurs, $\|2^{1-n}T_n\|_I = 2^{1-n}$, on en déduit que $\|T_n^I\|_I = 2^{1-n}$, et par unicité de T_n^I, on a $T_n^I = 2^{1-n}T_n$.

3.4. L'application $x \mapsto 2x/(b-a) - (b+a)/(b-a)$ donne une bijection entre les intervalles $[a,b]$ et $[-1,1]$. Si $Q(X)$ est unitaire de degré n, alors $((b-a)/2)^n Q(2X/(b-a) - (b+a)/(b-a))$ l'est aussi. On en déduit que

$$T_n^{[a,b]}(X) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n T_n^{[-1,1]}\left(\frac{2X}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\right) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2X}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}\right).$$

Ceci implique $\|T_n^{[a,b]}\|_{[a,b]} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ et $d_1([a,b]) = \lim_{n\to+\infty} 2^{1/n}(b-a)/4 = (b-a)/4$.

3.5. Si $p(X) = p_0 + \cdots + p_n X^n$ avec $p_n \neq 0$, alors p/p_n est unitaire de degré n. On a donc $\|p/p_n\|_I \geq 2((b-a)/4)^n \geq 2$ ce qui fait que $\|p\|_I \geq 2|p_n| \geq 2$.

3.6. Si on a $\|f - p_n\|_I \to 0$, alors il existe n_0 tel que $\|p_n - p_m\|_I \leq 1/2$ si $m, n \geq n_0$. Par la question précédente (et comme un polynôme constant non nul à coefficients entiers est de norme au moins 1), on a $p_n = p_m$ pour $m, n \geq n_0$ et donc $f = p_{n_0}$.

4. L'approximation par des polynômes à coefficients entiers

4.1. Si l'on avait $\|p\|_I \geq 1$ pour tout polynôme unitaire, alors on aurait $t_n \geq 1$ pour tout n et donc $(b-a)/4 = d_1([a,b]) = \lim_{n\to+\infty} t_n^{1/n} \geq 1$.

4.2. Montrons ceci par récurrence sur le degré de s. Si $\deg(s) \leq d-1$, il suffit de prendre $n = 0$ et $b_0(X) = s(X)$. Sinon, par division euclidienne de $s(X)$ par $r(X)$, on peut écrire $s(X) = b_0(X) + r(X)t(X)$ avec $\deg(t) = \deg(s) - d$. Si on écrit $t(X) = c_0(X) + \cdots + c_m(X)r(X)^m$, on peut alors prendre $n = m+1$ et $b_i(X) = c_{i-1}(X)$ pour $i \geq 1$.

4.3. Montrons par récurrence sur n le résultat suivant: si q est un polynôme de degré n, il peut s'écrire $q = r + z + t$, où chacun des polynômes r, z, t est de degré $\leq n$, r est de la forme $\sum_{0\leq i\leq d-1,\, \ell\geq \ell_0} b_{i,\ell} X^i p(X)^\ell$ avec les $b_{i,\ell}$ dans $[0,1]$ (la condition sur le degré de r revient alors à demander que $b_{i,\ell} = 0$ pour $d\ell + i > n$), z est à coefficients entiers, et t est de degré au plus $m-1$ et à coefficients dans $[0,1]$. Lorsque $n < m$, il suffit de décomposer les coefficients de q en leur partie entière et leur partie fractionnelle, et de prendre $r = 0$. Si $n \geq m$, écrivons $n = d\ell + i$ avec $0 \leq i \leq d-1$ et $\ell \geq \ell_0$, et soit a_n le coefficient dominant de q. On peut alors écrire $a_n X^n = (a_n - \lfloor a_n \rfloor) X^i p(X)^\ell + \lfloor a_n \rfloor X^n - (a_n - \lfloor a_n \rfloor)(X^i p(X)^\ell - X^n)$. On écrit $q - a_n X^n - (a_n - \lfloor a_n \rfloor)(X^i p(X)^\ell - X^n) = r + z + t$ en appliquant l'hypothèse de récurrence, et on obtient la décomposition $q = ((a_n - \lfloor a_n \rfloor) X^i p(X)^\ell + r) + (\lfloor a_n \rfloor X^n + z) + t$.

Pour obtenir le résultat demandé, on applique ceci à $q = p(X)^k - X^{kd}$, et on pose $r_k = r$, $z_k = z + X^{kd}$, $p_k = t$.

4.4. On a $\|z_{k'} - z_k\|_I \leq \|r_{k'} - r_k\|_I + \|p^{k'} - p^k\|_I + \|p_{k'} - p_k\|_I$.

Comme $\|p\|_I < 1$, on a $\|r_k\|_I \leq (1 + \|X\|_I + \cdots + \|X^{d-1}\|_I)(\|p\|_I^{\ell_0} + \|p\|_I^{\ell_0+1} + \cdots) \leq (1 + \|X\|_I + \cdots + \|X^{d-1}\|_I) \cdot \|p\|_I^{\ell_0}/(1 - \|p\|_I)$. Il existe donc ℓ_0 tel que $\|r_k\|_I < 1/6$ et donc $\|r_{k'} - r_k\|_I < 1/3$. Ensuite, il existe k_0 tel que $\|p^k\|_I < 1/6$ si $k \geq k_0$ et donc $\|p^{k'} - p^k\|_I < 1/3$ si $k, k' \geq k_0$. Enfin comme p_k est de degré au plus $m-1$ et à coefficients dans $[0,1]$, le principe des tiroirs implique qu'il existe $k' > k \geq k_0$ tels que les coefficients de $p_{k'}$ et p_k sont suffisamment proches pour que $\|p_{k'} - p_k\|_I < 1/3$.

On en déduit que $q = z_{k'} - z_k$ est un polynôme unitaire non constant à coefficients entiers vérifiant $\|q\|_I < 1$.

4.5. Dans le premier cas, le polynôme $p(X) = X$ est à coefficients entiers et vérifie $\|p\|_I < 1$. On a donc $J(I) \subset \{0\}$. Réciproquement, si p est à coefficients entiers et vérifie $\|p\|_I < 1$, alors $p(0) \in \mathbf{Z}$ et $|p(0)| < 1$, ce qui fait que $p(0) = 0$. On a donc $J(I) = \{0\}$.

Dans le deuxième cas, le polynôme $p(X) = X^2(1 - X^2)$ est à coefficients entiers et vérifie $\|p\|_I = 1/4 < 1$. On a donc $J(I) \subset \{-1, 0, 1\}$. Réciproquement, si p est à coefficients entiers et vérifie $\|p\|_I < 1$, alors $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$ comme ci-dessus et donc $J(I) = \{-1, 0, 1\}$.

4.6. Si on a $\|f - p_n\|_I \to 0$, alors il existe n_0 tel que $\|p_n - p_m\|_I \leq 1/2$ si $m, n \geq n_0$. Si $x \in J(I)$, alors $(p_n - p_m)(x) = 0$ et donc $p_n(x) = p_m(x)$ pour $m, n \geq n_0$. On a donc $f(x) = p_{n_0}(x)$ pour tout $x \in J(I)$.

4.7. Par la question 4.4, on a un polynôme q qui est unitaire non constant à coefficients entiers et qui vérifie $\|q\|_I < 1$. L'ensemble $J(I)$ est un sous-ensemble des racines de q. Si on a égalité, c'est terminé. Sinon, soit m le nombre de racines de q qui ne sont pas dans $J(I)$. Soit $q_m = q$ et x tel que $q_m(x) = 0$ et $x \notin J(I)$. Il existe donc un polynôme p_x à coefficients entiers tel que $\|p_x\|_I < 1$ et $p_x(x) \neq 0$. Si $n \geq 1$, alors le polynôme $q_m^{2n} + p_x^2$ est à coefficients entiers, vérifie $\|q^{2n} + p_x^2\|_I < 1$ pour $n \gg 0$, et est unitaire pour $n \gg 0$. Fixons un tel n et posons $q_{m-1} = q_m^{2n} + p_x^2$. L'ensemble des racines de q_{m-1} est inclus dans celui des racines de q_m privé de x. Ceci permet de construire le polynôme $q = q_0$ par récurrence descendante sur m.

4.8. Si $b(X)$ est un polynôme, soit $\lfloor b \rfloor(X)$ le polynôme dont les coefficients sont les parties entières des coefficients de b et $\{b\}(X) = b(X) - \lfloor b \rfloor(X)$. Écrivons $p(X) = b_0(X) + b_1(X)q(X) + \cdots + b_m(X)q(X)^m$ comme dans la question 4.2. Si $\tilde{p}(X) = (\lfloor b_0 \rfloor(X) + \lfloor b_1 \rfloor(X)q(X) + \cdots + \lfloor b_m \rfloor(X)q(X)^m)$, alors $\tilde{p}(X)$ est à coefficients entiers et $p(X) = \tilde{p}(X) + \{b_0\}(X) + \{b_1\}(X)q(X) + \cdots + \{b_m\}(X)q(X)^m$. Par ailleurs, si $n = \deg(q)$, alors $\|\{b_0\}(X) + \{b_1\}(X)q(X) + \cdots + \{b_m\}(X)q(X)^m\|_I \leq (1 + \|X\|_I + \cdots + \|X^{n-1}\|_I)(1 + \|q\|_I + \|q^2\|_I + \cdots) = (1 + \|X\|_I + \cdots + \|X^{n-1}\|_I)/(1 - \|q\|_I)$ et on peut donc prendre $M = (1 + \|X\|_I + \cdots + \|X^{n-1}\|_I)/(1 - \|q\|_I)$.

4.9. Remarquons que f/q^k n'est pas définie aux zéros de q mais s'y prolonge par 0 en une fonction continue. Si $k \geq 1$, alors par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme r_k tel que $\|f/q^k - r_k\|_I < 1$. Dans les notations de la question précédente, on a $\|f/q^k - \tilde{r}_k\|_I < 1 + M$ et donc $\|f - q^k\tilde{r}_k\|_I < (1+M)\|q\|_I^k$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe k tel que $(1+M)\|q\|_I^k < \varepsilon$. Le polynôme $p = q^k\tilde{r}_k$ est alors à coefficients entiers, et $\|f - p\|_I < \varepsilon$.

4.10. Étant donnée la question précédente, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε telle que $\|f - f_\varepsilon\|_I < \varepsilon$ et telle que pour tout $x \in I$ vérifiant $q(x) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f_\varepsilon(y) = 0$ si $y \in I$ et $|x - y| < \delta$. Le polynôme q admet un nombre fini de racines $x_1, \ldots, x_n$ dans I. Pour tout i, il existe δ_i tel que si $x \in I$ et $|x - x_i| \leq 2\delta_i$, alors $|f(x)| \leq \varepsilon/3$. Quitte à rapetisser δ_i on peut de plus supposer que les intervalles $[x_i - 2\delta_i, x_i + 2\delta_i]$ sont disjoints. Soit u la fonction affine par morceaux définie par $u(x) = 0$ si $x \in [x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$, $u(x) = 1$ si $|x - x_i| \geq 2\delta_i$ pour tout i, et $u(x) = t$ si $|x - x_i| = \delta_i(1+t)$ avec $t \in [0,1]$ (faire un dessin!). On a $|(f - uf)(x)| = 0$ si $|x - x_i| \geq 2\delta_i$ pour tout i et $|(f - uf)(x)| \leq 2\varepsilon/3$ sinon et donc $f_\varepsilon = uf$ convient.

4.11. Le fait que si f est une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers, alors il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $f(x) = p(x)$ pour tout $x \in J(I)$ a été montré à la question 4.6. Réciproquement, soient f et p vérifiant ces conditions. La fonction $f - p$ est nulle en tout $x \in J(I)$, c'est-à-dire nulle en tous les zéros de q. On peut donc lui appliquer la question précédente. Si $f - p = \lim_{n\to+\infty} p_n$ alors $f = \lim_{n\to+\infty} p_n + p$.

4.12. On a vu à la question 4.5 que $J([-1,1]) = \{-1,0,1\}$. Une fonction $f \in C^0([-1,1], \mathbf{R})$ est donc une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement s'il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $p(x) = f(x)$ pour tout $x \in \{-1,0,1\}$. Si un tel polynôme existe, alors $f(-1) \in \mathbf{Z}$, $f(0) \in \mathbf{Z}$, $f(1) \in \mathbf{Z}$ et $f(-1)$ et $f(1)$ sont de même parité car $p(1) \equiv p(-1) \bmod 2$. Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, alors on peut prendre

$$p(X) = X^2\left(\frac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\right) + X\left(\frac{f(1)-f(-1)}{2}\right) + f(0).$$

5. Polynômes symétriques

5.1. Si ni l'une ni l'autre de "soit $\underline{i}$ est plus petit que $\underline{j}$, soit $\underline{j}$ est plus petit que $\underline{i}$" n'est vérifiée, alors $i_k = j_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et donc $\underline{i} = \underline{j}$.

5.2. Si $\underline{j}$ est plus petit que $\underline{i}$, alors $\sum_k j_k \leq \sum_k i_k$ et l'ensemble des n-uplets $(j_1, \ldots, j_n)$ d'entiers positifs dont la somme est bornée par $\sum_k i_k$ est déjà un ensemble fini.

5.3. Soit $(i_1, \ldots, i_n)$ le degré de p. Si $i_1 < i_k$ alors, comme p est symétrique, il contiendrait aussi un monôme dont le degré est $(i_1, \ldots, i_n)$ avec i_1 et i_k échangés, et ce degré serait plus grand que $(i_1, \ldots, i_n)$. Ceci montre que $i_1 = \max_j(i_j)$, puis le résultat par récurrence.

5.4. Le polynôme $S_1 = T_1 + \cdots + T_n$ est de degré $(1, 0, \ldots, 0)$. Le polynôme $S_2 = \sum_{i<j} T_i T_j$ est de degré $(1, 1, 0, \ldots, 0)$, etc, jusqu'à S_n qui est de degré $(1, \ldots, 1)$. Le polynôme $S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n}$ est donc de degré $(i_1, \ldots, i_n)$, ce qui fait que les monômes de plus grand degré de p et de $\mathrm{dom}(p) \cdot S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n}$ ont le même degré et le même coefficient. On en déduit le résultat.

5.5. Par récurrence sur le degré de p, en utilisant la question précédente et la question 5.2.

6. Entiers algébriques

6.1. Il est clair que tout élément de $\mathbf{Z}$ est un entier algébrique. Réciproquement, soit $x \in \mathbf{Q}$ qui est un entier algébrique. Écrivons $x = a/b$ avec a et b premiers entre eux, et $p(X) = p_0 + \cdots + p_{n-1}X^{n-1} + X^n$. On a $p_0 b^n + \cdots + p_{n-1}a^{n-1}b + a^n = 0$. Si ℓ est un nombre premier qui divise b, il divise alors a^n et donc a, ce qui n'est pas possible. On en déduit que $b = \pm 1$ et donc que $x \in \mathbf{Z}$.

6.2. Comme $c(na) = c(a)n$ si $n \in \mathbf{Z}$, il suffit de montrer que si $c(a) = c(b) = 1$, alors $c(ab) = 1$. Soit ℓ un nombre premier. Soit i et j tels que ℓ ne divise pas a_i mais divise $a_{i+1}, \ldots, a_n$ et ℓ ne divise pas b_j mais divise $b_{j+1}, \ldots, b_m$. Le coefficient de X^{i+j} dans ab est alors la somme de $a_i b_j$ et de multiples de ℓ. Ceci montre que ℓ ne divise pas $c(ab)$, et donc que $c(ab) = 1$.

6.3. Soit $p(X) \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme unitaire de plus petit degré tel que $p(x) = 0$. Si p est réductible dans $\mathbf{Q}[X]$, alors $p = qr$ avec $q, r \in \mathbf{Q}[X]$ unitaires, de degré strictement inférieur à celui de p. Il existe $q_0, r_0 \in \mathbf{Z}$ tels que $q_0 q, r_0 r \in \mathbf{Z}[X]$ et $c(q_0 q) = c(r_0 r) = 1$. On a alors $c(q_0 q)c(r_0 r) = c(q_0 r_0 p) = q_0 r_0$ et donc $q, r \in \mathbf{Z}[X]$. Comme x annule q ou r et que le degré de p est minimal, ceci n'est pas possible et donc p est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. On peut donc prendre $p_x = p$.

Si p_x avait des racines multiples, alors le pgcd de p_x et p'_x serait un polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ qui annule x et divise p_x, et p_x serait alors réductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

6.4. Le pgcd de r et p_x dans $\mathbf{Q}[X]$ est non trivial et divise p_x dans $\mathbf{Q}[X]$. Comme p_x est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$, ce pgcd vaut p_x et donc p_x divise r dans $\mathbf{Q}[X]$.

6.5. Soit $r(X) = p_x(X - T_1) \cdots p_x(X - T_m) = \sum_k c_k(T_1, \dots, T_m)X^k$. Les $c_k(T_1, \dots, T_m)$ sont des polynômes symétriques en $T_1, \dots, T_m$ et peuvent donc s'écrire sous la forme $q_k(S_1, \dots, S_m)$ par la question 5.5. Le nombre complexe $(-1)^i S_i(y_1, \dots, y_m)$ est le coefficient de X^{n-i} dans $p_y(X)$ et appartient donc à $\mathbf{Z}$. On en déduit que $c_k(y_1, \dots, y_m)$ appartient aussi à $\mathbf{Z}$ et donc que $p_x(X - y_1) \cdots p_x(X - y_m)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Comme il annule $x + y$, $x + y$ est un entier algébrique.

6.6. Même raisonnement en considérant $(y_1 \cdots y_m)^{\deg(p_x)} p_x(X/y_1) \cdots p_x(X/y_m)$ (si $y \neq 0$; si $y = 0$, le résultat demandé est trivial).

6.7. Le polynôme $q(T_1) \cdots q(T_n)$ est symétrique et s'écrit donc sous la forme $r(S_1, \dots, S_n)$ avec r à coefficients entiers par la question 5.5. Les $(-1)^i S_i(x_1, \dots, x_n)$ sont les coefficients de X^{n-i} dans $p_x(X)$ et appartiennent donc à $\mathbf{Z}$. On en déduit que $q(x_1) \cdots q(x_n) \in \mathbf{Z}$.

Comme $|q(x_i)| < 1$ pour tout i, on a $|q(x_1) \cdots q(x_n)| < 1$ et comme $q(x_1) \cdots q(x_n)$ est un entier, on a $q(x_1) \cdots q(x_n) = 0$. Il existe donc i tel que $q(x_i) = 0$ ce qui fait que $q(x) = 0$ par la question 6.4.

Si $x \in F(I)$, on a donc $q(x) = 0$ pour tout polynôme q à coefficients entiers tel que $\|q\|_I < 1$. Par définition de $J(I)$, on a $x \in J(I)$ et donc $F(I) \subset J(I)$.

6.8. On voit que $0, \pm 1, \pm\sqrt{2}$ appartiennent à $F([-3/2, 3/2])$. Comme ce sont les racines de $X(X^2 - 1)(X^2 - 2)$, et comme $F(I) \subset J(I)$ par la question précédente, on voit que si l'on peut montrer que $\|X(X^2 - 1)(X^2 - 2)\|_{[-3/2,3/2]} < 1$, alors $J(I) = I \cap \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}\}$.

Le fait que $\|X(X^2 - 1)(X^2 - 2)\|_{[-3/2,3/2]} < 1$ résulte d'une étude de fonction.

7. Le noyau de Fekete

7.1. Soit d le diamètre de P (la plus grande distance entre deux points de P) et M un entier positif. Soit $C_M = \{x \in \mathbf{Z}^n \text{ tels que } 0 \leq x_i \leq M - 1 \text{ pour tout } i\}$, de sorte que le “cube” C_M contient M^n points. Si $h + P$ et $h' + P$ sont disjoints pour tous $h \neq h' \in \mathbf{Z}^n$, alors $\sum_{h \in C_M} h + P$ est de volume $M^n \operatorname{vol}(P)$. Par ailleurs, cet ensemble est contenu dans $[-d, M + d]^n$ dont le volume est $(M + 2d)^n$. On a donc $M^n \operatorname{vol}(P) \leq (M + 2d)^n$ et donc

$\mathrm{vol}(P) \leq (1+2d/M)^n$. En laissant M tendre vers $+\infty$, on trouve que $\mathrm{vol}(P) \leq 1$. Si $\mathrm{vol}(P) > 1$, c'est donc qu'il existe $w \neq w' \in P$ tels que $w - w' \in \mathbf{Z}^n$.

7.2. Le déterminant de M est le déterminant de Vandermonde construit sur $x_1, \ldots, x_{n-1}, 1$ et donc M est inversible. Soit $P_r = \frac{1}{2} f^{-1}(B(r))$. C'est un pavé, de volume $\mathrm{vol}(P_r) = r \,\mathrm{vol}(P_1)$, ce qui fait que $\mathrm{vol}(P_r) > 1$ si $r \gg 0$. Par la question précédente, il existe alors $w \neq w' \in P_r$ tels que $h = w - w' \in \mathbf{Z}^n$. On a alors $h \in P_r - P_r = f^{-1}(B(r))$.

7.3. On a $f(h) \in B(r)$ et comme $M \cdot {}^t(h_1, \ldots, h_n) = {}^t(s(x_1), \ldots, s(x_{n-1}), s(1))$, on a $|s(x_i)| \leq 1/2$ si $1 \leq i \leq n-1$. Si $s(x_i) = 0$, alors p_x divise s par la question 6.4. Le polynôme s est de degré au plus $n-1$, ce qui donne une contradiction.

7.4. Soit $k \geq 1$. Par le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe $\ell_k \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\ell_k(x_i) = y_i/s(x_i)^k$. Par la question 4.8 (et dans les notations de celle-ci), on a $|\tilde{\ell}_k(x_i) - y_i/s(x_i)^k| \leq M$ et donc $|\tilde{\ell}_k(x_i)s(x_i)^k - y_i| \leq M|s(x_i)^k| \leq 2^{-k}M < \varepsilon$ si k est assez grand pour que $2^{-k}M < \varepsilon$. On peut alors prendre $p = \tilde{\ell}_k s^k$.

7.5. Regroupons les x par classes de conjugaison et écrivons $S = S_1 \cup \ldots S_k$ avec $S_j = \{x_1^{(j)}, \ldots, x_{n_j}^{(j)}\}$ pour $1 \leq j \leq k$. Observons que pour tout j, n_j est strictement inférieur au nombre de conjugués de $x_1^{(j)}$ par hypothèse. Notons $y_i^{(j)}$ les y correspondants et $p^{(j)}$ le polynôme minimal commun des $x_i^{(j)}$. Soit $r^{(j)} = \prod_{i \neq j} p^{(i)}$ et $\varepsilon^{(j)} = \min_i \varepsilon/|r^{(j)}(x_i^{(j)})|$. Par la question précédente, il existe $q^{(j)} \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $|q^{(j)}(x_i^{(j)}) - y_i^{(j)}/r^{(j)}(x_i^{(j)})| < \varepsilon^{(j)}$ pour tout $1 \leq i \leq n_j$. Posons $p = \sum_j q^{(j)} r^{(j)}$. C'est un polynôme à coefficients entiers et $p(x_i^{(j)}) = q^{(j)}(x_i^{(j)}) r^{(j)}(x_i^{(j)})$ de sorte que $|p(x_i^{(j)}) - y_i^{(j)}| < \varepsilon^{(j)} |r^{(j)}(x_i^{(j)})| \leq \varepsilon$.

7.6. Soit r le produit des p_x pour x parcourant $F(I)$. Observons que $r(x) \neq 0$ si $x \in S$. Par la question précédente, il existe $p \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $|p(x) - f(x)/r(x)| < \min_{y \in S} \varepsilon/r(y)$ pour tout $x \in S$. On a donc $|pr(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour $x \in S$. Par ailleurs, $pr(x) = f(x) = 0$ si $x \in F(I)$. Par le même raisonnement qu'à la question 4.10, il existe f_ε continue telle que f_ε est nulle et plate autour de tout x tel que $q(x) = 0$, et $\|f - f_\varepsilon\|_I < \varepsilon$. Il existe alors (par la même question) un polynôme p_ε à coefficients entiers tel que $\|p_\varepsilon - f_\varepsilon\|_I < \varepsilon$. On a donc $\|f - p_\varepsilon\|_I < 2\varepsilon$. Ceci implique le résultat.

7.7. Une fonction continue f est limite de polynômes à coefficients entiers si et seulement s'il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $f(x) = p(x)$ pour tout $x \in J(I)$ (par la question 4.11) et si et seulement s'il existe un polynôme p à coefficients entiers tel que $f(x) = p(x)$ pour tout $x \in F(I)$ (par la question précédente). Si $x \in J(I) \setminus F(I)$, une fonction continue nulle en $F(I)$ et valant $1/2$ en x vérifie le deuxième critère mais pas le premier (par les questions 6.1, 6.5 et 6.6), ce qui est une contradiction.

Références

[Ber00] Laurent Berger, *L'approximation par des polynômes à coefficients entiers*, Gaz. Math. (2000), no. 84, 35–40.

[Fer80] Le Baron O. Ferguson, *Approximation by polynomials with integral coefficients*, Mathematical Surveys, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.

[Fer06] Le Baron O. Ferguson, *What can be approximated by polynomials with integer coefficients*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), no. 5, 403–414.

[GT96] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Ellipses, 1996.

[HZ59] Edwin Hewitt and Herbert S. Zuckerman, *Approximation by polynomials with integral coefficients, a reformulation of the Stone-Weierstrass theorem*, Duke Math. J. **26** (1959), 305–324.

Laurent Berger, UMPA de l'ENS de Lyon, UMR 5669 du CNRS
Url : perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/

Sandra Rozensztajn, UMPA de l'ENS de Lyon, UMR 5669 du CNRS
Url : perso.ens-lyon.fr/sandra.rozensztajn/