SUR LA RÉDUCTION DES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES DE DIMENSION 2 EN POIDS MOYENS

par

Laurent Berger & Christophe Breuil

Résumé. — On calcule la réduction modulo p des représentations cristallines de dimension 2 dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k-1$ avec $k \in \{p+2, \cdots, 2p-1\}$.

Abstract. — We compute the reduction modulo p of 2-dimensional crystalline representations whose Hodge-Tate weights are 0 and $k-1$ with $k \in \{p+2, \cdots, 2p-1\}$.

Table des matières

Introduction 1
1. Rappels et notations 3
  1.1. Représentations p-adiques et (φ, Γ)-modules 3
  1.2. Modules de Wach 3
  1.3. L'opérateur ψ et le module $D^\sharp(V)$ 4
2. Calcul de la réduction : le cas $\mathrm{val}(a_p) = 1$ 4
  2.1. Construction du module de Wach 4
  2.2. Calcul de la réduction 6
3. Calcul de la réduction : le cas $0 < \mathrm{val}(a_p) < 1$ 9
  3.1. Une représentation du Borel supérieur 10
  3.2. Représentations modulaires et supersingulières 10
  3.3. Application aux représentations V_{k,a_p} 11
Références 14

Introduction

Soit p un nombre premier et L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, dont on note $\mathcal{O}_L$, $\mathfrak{m}_L$ et k_L l'anneau des entiers, l'idéal maximal, et le corps résiduel. Si k est un entier $\geqslant 2$ et

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F.

$a_p \in \mathfrak{m}_L$ on définit le φ-module filtré D_{k,a_p} par $D_{k,a_p} = Le \oplus Lf$ où :

$$\begin{cases} \varphi(e) = p^{k-1} f \\ \varphi(f) = -e + a_p f \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^i D_{k,a_p} = \begin{cases} D_{k,a_p} & \text{si } i \leqslant 0, \\ Le & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0 & \text{si } i \geqslant k. \end{cases}$$

Ce φ-module filtré est admissible, et on sait (par le théorème principal de [**CF00**]) qu'il existe alors une représentation cristalline V_{k,a_p} de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ telle que $D_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p}^*) = D_{k,a_p}$ (on passe au dual pour que les notations soient compatibles avec celles de [**Bre03b**] et [**BLZ04**] ; remarquons tout de même que l'on a $V_{k,a_p}^* = V_{k,a_p}(1-k)$). Toute représentation cristalline absolument irréductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est la tordue par un caractère cristallin d'une V_{k,a_p} avec $k \geqslant 2$.

Si T_{k,a_p} est un $\mathcal{O}_L$-réseau de V_{k,a_p} stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors la semi-simplifiée de $k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} T_{k,a_p}$ ne dépend pas du choix du réseau et nous la notons $\overline{V}_{k,a_p}$. La question se pose alors de donner une formule pour $\overline{V}_{k,a_p}$ en termes de k et a_p. Dans [**Bre03b**], une formule conjecturale est donnée pour $\overline{V}_{k,a_p}$ quand $2p \geqslant k \geqslant 2$.

Quand $k \leqslant p$, cette conjecture suit immédiatement de la « théorie de Fontaine-Laffaille » (cf. [**FL82**]). Quand $k = p+1$ ou bien quand $2p-1 \geqslant k \geqslant p+2$ et $\mathrm{val}(a_p) > 1$ (la valuation « val » étant la valuation p-adique) ou bien encore quand $k = 2p$ et $\mathrm{val}(a_p) > 2$, la conjecture est démontrée dans [**BLZ04**]. L'objet de cet article est de démontrer la conjecture pour $2p-1 \geqslant k \geqslant p+2$ quand $0 < \mathrm{val}(a_p) \leqslant 1$ ce qui en complète la démonstration pour $k \leqslant 2p-1$. Notons ω le caractère cyclotomique modulo p et μ_λ le caractère non-ramifié de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui envoie Frob_p^{-1} sur λ. On a alors le théorème suivant qui vient compléter [**Bre03b**, proposition 6.2] et [**BLZ04**, theorem] :

Théorème. — *Pour $2p-1 \geqslant k \geqslant p+2$, la réduction modulo p des représentations V_{k,a_p} est donnée par les formules ci-dessous.*

1. *Pour $k = p+2$:*
   (a) *si $1 > \mathrm{val}(a_p) > 0$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^2)$.*
   (b) *si $\mathrm{val}(a_p) = 1$, et si λ est une racine du polynôme $\lambda^2 - \overline{a_p/p}\lambda + 1 = 0$, alors*
   $$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$
2. *Pour $2p-1 \geqslant k \geqslant p+3$:*
   (a) *si $1 > \mathrm{val}(a_p) > 0$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p})$.*
   (b) *si $\mathrm{val}(a_p) = 1$, et si $\lambda = \overline{a_p/p} \cdot (k-1)$, alors*
   $$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-2}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Ce théorème est la réunion des corollaires 2.2.4, 2.2.7 et 3.3.7. La démonstration est différente selon que $\mathrm{val}(a_p) = 1$ ou que $1 > \mathrm{val}(a_p) > 0$. Dans le premier cas, on se borne à étendre les calculs de [**BLZ04**] qui traitaient du cas $\mathrm{val}(a_p) > 1$. Dans le deuxième cas, on utilise les idées de [**Bre03a, Bre03b**] qui consistent à associer à V_{k,a_p} une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et à vérifier, grâce aux résultats de [**Col04**] et de [**BB04**], que cette association (la « correspondance de Langlands p-adique continue ») est compatible avec la réduction modulo p (dans tout cet article, on fait l'abus de langage qui consiste à parler de « réduction modulo p » quand on devrait plutôt parler de réduction modulo $\mathfrak{m}_L$).

1. Rappels et notations

Comme l'objet de cet article est de calculer la réduction modulo p de certaines représentations cristallines, nous supposons que le lecteur est familier avec la notion de représentation cristalline et de φ-module filtré. Nous faisons quelques rappels sur la théorie des (φ, Γ)-modules, qui est essentielle pour la suite, et sur quelques uns de ses prolongements. Pour des rappels beaucoup plus détaillés, nous renvoyons à [**Col04**, §4,5]

1.1. Représentations p-adiques et (φ, Γ)-modules. — Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ et $\varepsilon : \Gamma \to \mathbf{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} = \{\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i\}$ où $a_i \in \mathcal{O}_L$ et $a_{-i} \to 0$ quand $i \to \infty$. On munit cet anneau d'un frobenius $\mathcal{O}_L$-linéaire φ défini par $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$ et d'une action $\mathcal{O}_L$-linéaire de Γ donnée par $\gamma(X) = (1+X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1$ si $\gamma \in \Gamma$. Un (φ, Γ)-module étale est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module D de type fini muni d'un frobenius semi-linéaire φ et d'une action de Γ semi-linéaire continue et commutant à φ. Rappelons que Fontaine a construit dans [**Fon90**, A.3.4] un foncteur $T \mapsto D(T)$ qui à toute $\mathcal{O}_L$-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ associe un (φ, Γ)-module étale et que ce foncteur est une équivalence de catégories.

1.2. Modules de Wach. — Un module de Wach est un $\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module N muni d'un frobenius φ et d'une action de Γ semi-linéaire continue et commutant à φ, satisfaisant les conditions suivantes :

1. N est libre de rang fini sur $\mathcal{O}_L[\![X]\!]$;
2. le groupe Γ agit trivialement sur N/X ;
3. il existe $h \geqslant 0$ tel que $N/\varphi^*(N)$ est tué par q^h où $q = \varphi(X)/X$.

Le plus petit entier h vérifiant (3) ci-dessus est appelé la hauteur du module de Wach N.

Si T est une $\mathcal{O}_L$-représentation sans torsion telle que $V = L \otimes_{\mathcal{O}_L} T$ est cristalline à poids de Hodge-Tate $\leqslant 0$, alors l'un des principaux résultats de [**Ber02**] est qu'il existe un (unique) module de Wach $N(T)$ tel que $D(T) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathcal{O}_L[\![X]\!]} N(T)$. Posons alors $N(V) = L \otimes_{\mathcal{O}_L} N(T)$ et $\mathrm{Fil}^i N(V) = \{x \in N(V) \text{ tels que } \varphi(x) \in q^i N(V)\}$. Le L-espace vectoriel $N(V)/X$ hérite de la filtration induite et du frobenius φ, ce qui en fait un φ-module filtré. Le théorème III.4.4 de [**Ber02**] nous dit alors que $N(V)/X \simeq D_{\mathrm{cris}}(V)$. On en déduit facilement le fait suivant :

Lemme 1.2.1. — *Si N est un module de Wach et si V est une représentation cristalline telle que $D_{\mathrm{cris}}(V) = N/X$, alors le (φ, Γ)-module $D(V)$ associé à V est isomorphe à $\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_L[\![X]\!]} N$.*

1.3. L'opérateur ψ et le module $D^\sharp(V)$. — L'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est un $\varphi(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$-module libre de rang p, dont une base est donnée par $\{(1+X)^i\}_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$. Si $x \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on peut donc écrire $x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(x_i)$ et on définit un opérateur $\psi : \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ par la formule $\psi(x) = x_0$ si $x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(x_i)$.

Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors Colmez a défini dans [**Col04**, §4.5] un sous-$\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module $D^\sharp$ de D. Si $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathcal{O}_L[\![X]\!]} N$ où N est un module de Wach de hauteur h, alors $D^\sharp$ est caractérisé par les propriétés suivantes (cf. [**Col04**, §4] et [**BB04**, §3]) :

1. $D^\sharp \subset X^{-h-1} N$;
2. quels que soient $x \in D$ et $j \geqslant 0$, il existe $n(x,j) \geqslant 0$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^j D$ si $n \geqslant n(x,j)$;
3. l'opérateur ψ induit une surjection de $D^\sharp$ sur lui-même.

Le $\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module $D^\sharp$ est donc stable par ψ et aussi sous l'action de Γ. Nous l'utiliserons un peu plus loin, au paragraphe 3.1.

2. Calcul de la réduction : le cas $\mathrm{val}(a_p) = 1$

Dans ce chapitre, on construit les modules de Wach associés aux représentations V_{k,a_p}^* pour $2p-1 \geqslant k \geqslant p+2$ et $\mathrm{val}(a_p) = 1$ puis on utilise les formules explicites ainsi obtenues pour calculer $\overline{V}_{k,a_p}$.

2.1. Construction du module de Wach. — La construction des modules de Wach associés aux représentations V_{k,a_p}^* est la même que celle que l'on a donnée dans [**BLZ04**] (mais attention au fait que les notations sont légèrement différentes). Nous en rappelons ici les points essentiels. Pour $n \geqslant 1$, on pose $q_n = \varphi^{n-1}(\varphi(X)/X)$ ce qui fait en particulier que $q_1 = q = \varphi(X)/X$ et on définit deux séries λ_+ et λ_- par les formules :

$$\lambda_+ = \prod_{n \geqslant 0} \frac{\varphi^{2n+1}(q)}{p} = \frac{q_2}{p} \times \frac{q_4}{p} \times \frac{q_6}{p} \times \cdots \qquad \text{et} \qquad \lambda_- = \prod_{n \geqslant 0} \frac{\varphi^{2n}(q)}{p} = \frac{q_1}{p} \times \frac{q_3}{p} \times \frac{q_5}{p} \times \cdots$$

Puisque l'on suppose que $\mathrm{val}(a_p)=1$, la proposition suivante résulte du (4) de [**BLZ04**, proposition 3.1.1] :

Proposition 2.1.1. — *Si l'on écrit* $a_p(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1}=\sum_{i\geqslant 0}\alpha_i X^i$, *alors* $\mathrm{val}(\alpha_i)\geqslant 0$ *pour* $i\in\{0,\cdots,k-2\}$.

On pose alors $\alpha=\alpha_0+\alpha_1X+\cdots+\alpha_{k-2}X^{k-2}$ ainsi que $g_\pm=\lambda_\pm/\gamma(\lambda_\pm)$ et on définit une matrice $P\in\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ et, pour tout $\gamma\in\Gamma$, une matrice $G_\gamma^{(k-1)}\in\mathrm{Id}+X\cdot\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ par les formules :

$$P=\begin{pmatrix}0 & -1\\ q^{k-1} & \alpha\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad G_\gamma^{(k-1)}=\begin{pmatrix}g_+^{k-1} & 0\\ 0 & g_-^{k-1}\end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1.2. — *Si* $\gamma\in\Gamma$, *alors il existe une unique matrice* $G_\gamma\in\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ *telle que :*

1. $P\varphi(G_\gamma)=G_\gamma\gamma(P)$;
2. $G_\gamma\equiv G_\gamma^{(k-1)} \mod X^{k-1}\cdot\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord l'unicité de la matrice G_γ. Si G_γ et G'_γ sont deux matrices satisfaisant les conditions de la proposition et si l'on pose $H=G'_\gamma G_\gamma^{-1}$, alors un petit calcul montre que $HP=P\varphi(H)$ ce qui fait que si l'on écrit $H=\mathrm{Id}+H_\ell X^\ell+\cdots$ avec $H_\ell\in\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L)$ et $H_\ell\neq 0$ et que P_0 dénote le coeffcient constant de P, alors on a $H_\ell P_0=p^\ell P_0H_\ell$ ce qui implique que P_0 a deux valeurs propres dont le quotient est p^ℓ. Comme $\ell\geqslant k-1$ par la condition (2) de la proposition, ce n'est pas possible et $H=\mathrm{Id}$ et donc $G_\gamma=G'_\gamma$.

La démonstration de l'existence de G_γ est semblable à celle qui est donnée dans la preuve de [**BLZ04**, proposition 3.1.3], nous en rappelons ici les points essentiels. Un calcul direct montre qu'il existe $R^{(k-1)}\in\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ telle que :

$$G_\gamma^{(k-1)}-P\varphi(G_\gamma^{(k-1)})\gamma(P^{-1})=X^{k-1}R^{(k-1)}.$$

La fin de la démonstration consiste à montrer par récurrence sur $\ell\geqslant k$ qu'il existe deux matrices $R^{(\ell)}$ et $G_\gamma^{(\ell)}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_L[\![X]\!]$ telles que :

1. $G_\gamma^{(\ell)}\equiv G_\gamma^{(\ell-1)} \mod X^{\ell-1}$;
2. $G_\gamma^{(\ell)}-P\varphi(G_\gamma^{(\ell)})\gamma(P^{-1})=X^\ell R^{(\ell)}$.

Ceci se démontre par approximations successives, et il suffit alors de prendre $G_\gamma=\lim_{\ell\to+\infty}G_\gamma^{(\ell)}$. □

On définit alors un module de Wach $N_{k,a_p}=\mathcal{O}_L[\![X]\!]e\oplus\mathcal{O}_L[\![X]\!]f$ en décidant que les matrices de φ et de $\gamma\in\Gamma$ dans la base $\{e,f\}$ sont données par P et G_γ. Le (2) de la proposition 2.1.2 montre que $G_{\gamma\eta}=G_\gamma\gamma(G_\eta)$ et donc que cela définit bien une action semi-linéaire de Γ, et le (1) de la proposition implique que φ commute à cette action du groupe Γ.

Proposition 2.1.3. — *Le* (φ,Γ)*-module* $\mathscr{E}\otimes_{\mathcal{O}_L[\![X]\!]} N_{k,a_p}$ *est isomorphe à* $D(V_{k,a_p}^*)$.

Démonstration. — Par le lemme 1.2.1, il suffit de vérifier que le φ-module filtré $N_{k,a_p}/X$ est bien isomorphe à D_{k,a_p} ce que nous laissons en exercice au lecteur (c'est [**BLZ04**, proposition 3.2.4]). □

2.2. Calcul de la réduction. — L'objet de ce paragraphe est d'utiliser les formules explicites du paragraphe précédent pour calculer la réduction modulo p des représentations V_{k,a_p} quand $2p-1 \geqslant k \geqslant p+2$ et $\mathrm{val}(a_p)=1$.

Lemme 2.2.1. — *Si* $\beta = \overline{a_p/p}\cdot(k-1)$, *alors il existe* $u(X)\in 1+X\cdot k_L[\![X]\!]$ *tel que* $\overline{\alpha} = \beta\cdot u(X)\cdot X^{p-1}$.

Démonstration. — Rappelons que α a été défini comme la partie de degré $\leqslant k-2$ de la série :

$$a_p\cdot\left(\frac{(q_1/p)\cdot(q_3/p)\cdot(q_5/p)\cdots}{(q_2/p)\cdot(q_4/p)\cdots}\right)^{k-1} = a_p\cdot\left(\frac{q_1}{p}\right)^{k-1}\left(\frac{(q_3/p)\cdot(q_5/p)\cdots}{(q_2/p)\cdot(q_4/p)\cdots}\right)^{k-1}.$$

On sait que $q_1(0)=p$ et que $q_1\equiv X^{p-1} \mod p$ et donc que si $n\geqslant 1$, alors $q_n(0)=p$ et $q_n\equiv X^{p^{n-1}(p-1)} \mod p$ ce qui fait que la partie de degré $\leqslant k-2$ de la série $(q_n/p)^{\pm 1}$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ si $n\geqslant 2$. On en conclut qu'il existe une série $v(X)\in 1+X\cdot\mathbf{Z}_p[\![X]\!]$ telle que α est la partie de degré $\leqslant k-2$ de la série :

$$a_p\left(1+\frac{X^{p-1}}{p}\right)^{k-1} v(X) = a_p\left(1+(k-1)\frac{X^{p-1}}{p}\right)v(X) + O(X^{2(p-1)}).$$

Le lemme en résulte immédiatement, puisque $k-2<2(p-1)$. □

Nous allons maintenant passer au calcul proprement dit de la réduction modulo p.

Le cas $2p-1\geqslant k\geqslant p+3$. — Le cas $k=p+2$ se comporte de manière légèrement différente du cas $k\geqslant p+3$, et nous commençons par traiter ce dernier. Nous allons montrer que le (φ,Γ)-module $D(\overline{T}_{k,a_p}^*)$ contient un sous-objet de rang 1 que nous identifions. Dans ce paragraphe, on pose $\lambda=\beta=\overline{a_p/p}\cdot(k-1)$.

Lemme 2.2.2. — *Si* $k\geqslant p+3$, *alors il existe une unique série* $z\in 1+X\cdot k_L[\![X]\!]$ *telle que :*

$$z-u\varphi(z)+\frac{X^{k-p-2}}{\lambda^2}\varphi^2(z)=0$$

Démonstration. — Un calcul immédiat montre d'une part que l'application $z \mapsto u\varphi(z) - (X^{k-p-2}/\lambda^2)\varphi^2(z)$ préserve $1 + X \cdot k_L[\![X]\!]$ (c'est là qu'on utilise le fait que $k-p-2 \geqslant 1$) et d'autre part que si $r \geqslant 1$ est tel que X^r divise z, alors X^{pr} divise $u\varphi(z) - (X^{k-p-2}/\lambda^2)\varphi^2(z)$. Ceci implique que l'application $z \mapsto u\varphi(z) - (X^{k-p-2}/\lambda^2)\varphi^2(z)$ est contractante pour la topologie X-adique sur $1 + X \cdot k_L[\![X]\!]$ et donc qu'elle y admet un unique point fixe. □

On pose alors :

$$\delta = -\frac{\varphi(z)}{\lambda}\frac{e}{X^p} + z\frac{f}{X} \in D(\overline{T}^*_{k,a_p}) = k_L(\!(X)\!) \otimes_{k_L[\![X]\!]} N_{k,a_p}.$$

Proposition 2.2.3. — *La $k_L(\!(X)\!)$-droite engendrée par δ est un sous-(φ,Γ)-module de $D(\overline{T}^*_{k,a_p})$ qui correspond à la sous-représentation $\omega^{-1}\mu_\lambda \subset \overline{T}^*_{k,a_p}$.*

Démonstration. — Un calcul immédiat montre que $\varphi(\delta) = \lambda\delta$. Si $\gamma \in \Gamma$, alors rappelons que $\gamma(e) - g_+^{k-1}e$ et $\gamma(f) - g_-^{k-1}f$ appartiennent à $X^{k-1} \cdot k_L[\![X]\!]e \oplus X^{k-1} \cdot k_L[\![X]\!]f$ et donc que si $x, y \in k_L[\![X]\!]$, alors :

$$\gamma\left(x\frac{e}{X^p} + y\frac{f}{X}\right) = x'\frac{e}{X^p} + y'\frac{f}{X},$$

avec

$$x' \equiv \gamma(x)\frac{X^p}{\gamma(X^p)}g_+^{k-1} \equiv x\omega(\gamma)^{-1} \mod X$$

et

$$y' \equiv \gamma(y)\frac{X}{\gamma(X)}g_-^{k-1} \equiv y\omega(\gamma)^{-1} \mod X.$$

Si l'on pose $x = -\varphi(z)/\lambda$ et $y = z$, et que x' et y' sont définis comme ci-dessus, alors :

$$\varphi\left(x'\frac{e}{X^p} + y'\frac{f}{X}\right) = \varphi \circ \gamma(\delta) = \gamma \circ \varphi(\delta) = \gamma(\lambda\delta) = \lambda\left(x'\frac{e}{X^p} + y'\frac{f}{X}\right)$$

ce qui fait que $\omega(\gamma)y'$ satisfait les conditions du lemme 2.2.2 et donc que $y' = \omega(\gamma)^{-1}z$ et que $x' = -\omega(\gamma)^{-1}\varphi(z)/\lambda$ ce qui fait que $\gamma(\delta) = \omega(\gamma)^{-1}\delta$.

La droite $k_L(\!(X)\!)\delta$ est donc un (φ,Γ)-module de rang 1 avec $\varphi(\delta) = \lambda\delta$ et $\gamma(\delta) = \omega(\gamma)^{-1}\delta$; ce (φ,Γ)-module correspond au caractère $\omega^{-1}\mu_\lambda$. □

La proposition 2.2.3 montre que $\overline{T}^*_{k,a_p}$ contient comme sous-représentation le caractère $\omega^{-1}\mu_\lambda$ et donc que $\overline{V}_{k,a_p}$ (étant semi-simple) contient comme sous-représentation le caractère $\omega\mu_{\lambda^{-1}}$. Comme $\det \overline{V}_{k,a_p} = \omega^{k-1}$, on en déduit finalement que :

Corollaire 2.2.4. — *Si $2p-1 \geqslant k \geqslant p+3$ et $\mathrm{val}(a_p) = 1$ et $\lambda = \overline{a_p/p} \cdot (k-1)$, alors :*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-2}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Classe de l'extension pour $k = p+3$ et $\lambda = \pm 1$. — On conserve les notations du paragraphe précédent ; quand $k = p+3$ et $\lambda = \pm 1$, on a $\overline{V}_{k,a_p} = (\omega \oplus 1) \otimes \omega^{-2}\mu_\lambda$ et la question se pose alors de savoir si, avant semi-simplification, la réduction modulo p de V_{k,a_p} est peu ramifée ou très ramifiée. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2.5. — *Si $k = p+3$ et $\lambda = \pm 1$, alors :*

$$\overline{T}^*_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \omega^{-2}\mu_\lambda,$$

où $\star$ est non-trivial et peu ramifié.

Démonstration. — Nous ne donnons ici que les grandes lignes de la démonstration de ce théorème. Rappelons que si l'on pose comme ci-dessus :

$$\delta = -\frac{\varphi(z)}{\lambda}\frac{e}{X^p} + z\frac{f}{X},$$

alors $\varphi(\delta) = \lambda\delta$ et $\gamma(\delta) = \omega(\gamma)^{-1}\delta$. Un calcul montre que :

$$\varphi\left(\frac{e}{zX^{p+1}}\right) = \frac{1}{\varphi(z)zX}\left(z\frac{f}{X} - \frac{\varphi(z)}{\lambda}\frac{e}{X^p}\right) + \frac{1}{\lambda}\frac{e}{zX^{p+1}},$$

et donc que la matrice de φ dans la base $(\delta, e/zX^{p+1})$ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{z\varphi(z)}\frac{1}{X} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

De même, on vérifie que la matrice de γ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}(\gamma) = \begin{pmatrix} \omega(\gamma)^{-1} & X^2 v_\gamma(X) \\ 0 & \omega(\gamma)^{-2} \end{pmatrix},$$

où $v_\gamma(X) \in k_L[\![X]\!]$.

Après torsion par $\omega^2\mu_\lambda$, on obtient donc une extension du (φ,Γ)-module trivial par celui de $\mathbf{F}_p(1)$, extension donnée par la classe :

$$\mathrm{cl}\left(\frac{1}{X}(\lambda + \cdots), X^2(1+\cdots)\right) \in H^1\left(C_{\varphi,\gamma}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{F}_p(1))\right),$$

dans les notations de [**CC99**, §I.4]. Cette classe est non-triviale par les lemmes I.5.2 et I.5.5 de [**CC99**] car l'image de $-\psi(X^{-1}(\lambda + \cdots))$ est non-nulle dans $D(\mathbf{F}_p(1))/(\psi - 1)$. Pour terminer, il faut faire le calcul explicite de l'image de l'application de Kummer en termes de (φ,Γ)-modules, ce qui est fait en partie dans [**CC99**, §V.3] et en partie dans [**Ben00**, §2.1] ; on en conclut notamment que les extensions très ramifiées correspondent aux classes $\mathrm{cl}(x,y)$ telles que la série formelle y a un résidu non-nul en $X = 0$, ce qui n'est pas le cas ici. $\square$

Le cas $k = p + 2$. — Revenons au calcul de $\overline{V}_{k,a_p}$; dans le cas $k = p + 2$, l'analogue du lemme 2.2.2 du paragraphe précédent est faux (parce que $X^{k-p-2} = 1$) et il faut procéder un petit peu différement.

Remarquons que le $k_L[\![X]\!]$-module engendré par e/X^p et f/X est stable par φ et que la matrice Q de φ dans cette base vérifie $Q \in \mathrm{GL}_2(k_L[\![X]\!])$ (ce qui n'était pas le cas si $2p - 1 \geqslant k \geqslant p + 3$).

Lemme 2.2.6. — *Si $Q \in \mathrm{GL}_2(k_L[\![X]\!])$, alors il existe $M \in \mathrm{Id} + X \cdot \mathrm{M}_2(k_L[\![X]\!])$ telle que $M^{-1}Q\varphi(M) = Q(0)$.*

Démonstration. — Si on écrit $Q = \sum_{i \geqslant 0} Q_i X^i$ et $M = \sum_{i \geqslant 0} M_i X^i$ avec $M_0 = \mathrm{Id}$, alors on vérifie aisément que les M_i sont donnés par récurrence par la formule $M_i = (\sum_{j=0}^{\lfloor i/p \rfloor} Q_{i-pj} M_j) Q_0^{-1}$. □

Un calcul facile montre que :

$$Q(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Si λ est une racine dans k_L du polynôme $\lambda^2 - \beta\lambda + 1 = 0$ (on suppose que k_L contient cette racine, ce qui est possible quitte à agrandir L), alors le lemme 2.2.6 ci-dessus montre que le $k_L[\![X]\!]$-module engendré par e/X^p et f/X a une base e', f' dans laquelle on a $\varphi(e') = \lambda e'$ et $\varphi(f') = \lambda^{-1} f'$.

Le fait que si $\gamma \in \Gamma$, alors $\gamma(e) - g_+^{k-1} e$ et $\gamma(f) - g_-^{k-1} f$ appartiennent à $X^{k-1} \cdot k_L[\![X]\!] e \oplus X^{k-1} \cdot k_L[\![X]\!] f$ implique par ailleurs que la matrice de γ dans la base e', f' est scalaire et diagonale. Comme $\gamma(e/X^p) - \omega(\gamma)^{-1} e/X^p$ et $\gamma(f/X) - \omega(\gamma)^{-1} f/X$ appartiennent à $X \cdot k_L[\![X]\!](e/X^p) \oplus X \cdot k_L[\![X]\!](f/X)$, on voit que γ agit par $\omega(\gamma)^{-1}$, et donc finalement que $\overline{T}^*_{k,a_p} = \omega^{-1}\mu_\lambda \oplus \omega^{-1}\mu_{\lambda^{-1}}$ et donc que :

Corollaire 2.2.7. — *Si $k = p + 2$ et $\mathrm{val}(a_p) = 1$ et λ est une racine du polynôme $\lambda^2 - \overline{a_p/p}\lambda + 1 = 0$, alors :*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$

3. Calcul de la réduction : le cas $0 < \mathrm{val}(a_p) < 1$

Le calcul de $\overline{V}_{k,a_p}$ quand $0 < \mathrm{val}(a_p) < 1$ se fait par des méthodes complètement différentes de celles du paragraphe précédent. On utilise ici la « correspondance de Langlands p-adique continue ».

3.1. Une représentation du Borel supérieur. — Soient N_{k,a_p} le module de Wach du dual T^*_{k,a_p} d'un réseau T_{k,a_p} de V_{k,a_p}, $D^\sharp(T_{k,a_p})$ le sous-$\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module de $X^{-k}N_{k,a_p}$ défini au paragraphe 1.3 et $\varprojlim_\psi D^\sharp(T_{k,a_p})$ l'ensemble des suites $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ d'éléments $v_n \in D^\sharp(T_{k,a_p})$ telles que $\psi(v_{n+1}) = v_n$. On écrit $\varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p})$ pour $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_\psi D^\sharp(T_{k,a_p})$. On définit une action du sous-groupe de Borel supérieur $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$:

$$\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p) = \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$$

sur $\varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p})$ de la manière suivante. Tout élément $g \in \mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ peut s'écrire comme produit :

$$g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x \in \mathbf{Q}_p^\times$, $j \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $z \in \mathbf{Q}_p$. Si $v = \{v_n\}_{n\geqslant 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p})$, alors on pose pour $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot v\right)_n &= x_0^{k-2} v_n \text{ où } x = p^{\mathrm{val}(x)} x_0\,; \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot v\right)_n &= v_{n-j} = \psi^j(v_n); \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot v\right)_n &= \gamma_a(v_n) \text{ où } \gamma_a \in \Gamma \text{ est tel que } \varepsilon(\gamma_a) = a\,; \\
\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v\right)_n &= \psi^m((1+X)^{p^{n+m}z} v_{n+m}),\ n+m \geqslant -\mathrm{val}(z).
\end{aligned}$$

Si χ est un caractère cristallin de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on note $V_{k,a_p,\chi} = V_{k,a_p} \otimes \chi$. Dans [**Bre03b**], il est construit des représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur L notées $\Pi_{k,a_p,\chi}$ ainsi que des $\mathcal{O}_L$-réseaux $\Theta_{k,a_p,\chi} \subset \Pi_{k,a_p,\chi}$ stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ pour $k \leqslant 2p$. Soit $\Pi(V_{k,a_p,\chi})$ le complété p-adique de $\Pi_{k,a_p,\chi}$ par rapport à $\Theta_{k,a_p,\chi}$. La notation $\Pi(V_{k,a_p,\chi})$ est justifiée par le fait que dans [**BB04**] il est démontré, en utilisant l'idée principale de [**Col04**], que, lorsque le Frobenius sur D_{k,a_p} est semi-simple, alors on a un isomorphisme topologique $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-équivariant entre le Banach dual $\Pi(V_{k,a_p,\chi})^*$ (muni de sa topologie faible) et $\varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p,\chi})$.

D'autre part, les réductions $k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Theta_{k,a_p,\chi}$ ont été déterminées explicitement dans [**Bre03b**] : dans les cas qui nous intéressent ($p+2 \leqslant k \leqslant 2p$ et $0 < \mathrm{val}(a_p) < 1$) ce sont des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Ce sont ces formules explicites et le lien entre $\Pi(V_{k,a_p,\chi})$ et $\varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p,\chi})$ qui vont nous permettre de calculer $\overline{V}_{k,a_p}$.

3.2. Représentations modulaires et supersingulières. — Rappelons que dans [**Bre03a**], on donne la liste de ces représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, que nous allons rappeler pour la convenance du lecteur. Si $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$

est un caractère continu, on pose :

$$\pi(r,0,\chi) = \left[\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r k_L^2\right)/T\right] \otimes (\chi\circ\det),$$

où T est un certain opérateur de Hecke. Par [**Bre03a**, théorème 1.3], les entrelacements entre les $\pi(r,0,\chi)$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}\pi(r,0,\chi) &\simeq \pi(r,0,\chi\mu_{-1})\\ \pi(r,0,\chi) &\simeq \pi(p-1-r,0,\chi\omega^r)\\ \pi(r,0,\chi) &\simeq \pi(p-1-r,0,\chi\omega^r\mu_{-1}).\end{aligned}$$

On peut d'autre part faire une liste des représentations absolument irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur k_L. Si $r \in \{0,\cdots,p-1\}$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère continu, que l'on identifie à un caractère continu de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ via le corps de classes (normalisé pour que $p \in \mathbf{Q}_p^\times$ s'envoie sur Frob_p^{-1}), alors on pose :

$$\rho(r,\chi) = (\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}))\otimes\chi.$$

On obtient ainsi toutes les représentations absolument irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur k_L, et les entrelacements entre les $\rho(r,\chi)$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}\rho(r,\chi) &\simeq \rho(r,\chi\mu_{-1})\\ \rho(r,\chi) &\simeq \rho(p-1-r,\chi\omega^r)\\ \rho(r,\chi) &\simeq \rho(p-1-r,\chi\omega^r\mu_{-1}).\end{aligned}$$

On en déduit une bijection « naturelle » entre les deux classes de représentations.

3.3. Application aux représentations V_{k,a_p}. — On suppose que le Frobenius sur D_{k,a_p} est semi-simple. Commençons par voir que la donnée d'un réseau $\Pi^0_{k,a_p,\chi}$ de $\Pi(V_{k,a_p,\chi})$ (i.e. d'une boule unité stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de ce Banach) et donc de $\Pi(V_{k,a_p,\chi})^* \simeq \varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p,\chi})$ détermine un réseau $T_{k,a_p,\chi}$ de $V_{k,a_p,\chi}$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ tel que $(\Pi^0_{k,a_p,\chi})^* \simeq \varprojlim_\psi D^\sharp(T_{k,a_p,\chi})$:

Lemme 3.3.1. — *Si M est un $\mathcal{O}_L$-réseau de $\varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p,\chi})$ qui est stable par $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un $\mathcal{O}_L$-réseau $T_{k,a_p,\chi}$ de $V_{k,a_p,\chi}$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et tel que $M = \varprojlim_\psi D^\sharp(T_{k,a_p,\chi})$.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{pr}_0 : \varprojlim_\psi D^\sharp(V_{k,a_p,\chi}) \to D^\sharp(V_{k,a_p,\chi})$ la projection $\{v_n\} \mapsto v_0$ et $M_0 = \mathrm{pr}_0(M)$. Par le lemme 4.57 de [**Col04**], on a $M = \varprojlim_\psi M_0$ ce qui fait que M_0 est un $\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-réseau stable par ψ et Γ de $D^\sharp(V_{k,a_p,\chi})$ et donc que $\mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_L[\![X]\!]} M_0$ est un $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-réseau de $D(V_{k,a_p,\chi})$. Par fonctorialité des (φ,Γ)-modules, il existe un $\mathcal{O}_L$-réseau $T_{k,a_p,\chi}$ de $V_{k,a_p,\chi}$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ tel que $\mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_L[\![X]\!]} M_0 = D(T_{k,a_p,\chi})$ et donc tel que $M = \varprojlim_\psi D^\sharp(T_{k,a_p,\chi})$. □

Par [**Col04**, proposition 4.50] on a un isomorphisme topologique $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-equivariant :

$$k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\Pi^0_{k,a_p,\chi})^* \simeq \varprojlim_{\psi} D^\sharp(k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} T_{k,a_p,\chi}).$$

Remarque 3.3.2. — Par [**Bre03b**], $k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\Pi^0_{k,a_p,\chi})^*$ est un $k_L[\![\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]\!]$-module de type fini, donc muni d'une unique topologie séparée telle que l'action de $k_L[\![\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]\!]$ soit continue (déduite de la topologie d'anneau noethérien compact de $k_L[\![\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]\!]$). Par ailleurs, $k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Pi^0_{k,a_p,\chi}$ est limite inductive d'espaces vectoriels de dimension finie sur k_L (donc finis) fixes sous l'action de sous-groupes ouverts de plus en plus petits de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. On vérifie facilement que la topologie de $k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\Pi^0_{k,a_p,\chi})^*$ s'identifie alors à la topologie de la limite projective du dual algébrique $(k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Pi^0_{k,a_p,\chi})^*$. La topologie de $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} T_{k,a_p,\chi})$ est la topologie de la limite projective, chaque $D^\sharp(k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} T_{k,a_p,\chi})$ étant muni de la topologie X-adique.

On pose $\overline{\Pi}_{k,a_p,\chi} = k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} \Pi^0_{k,a_p,\chi}$. Si $2 \leqslant k \leqslant p$ et $V_{k,a_p,\chi}$ est telle que $\overline{V}_{k,a_p,\chi}$ est irréductible, alors $\overline{V}_{k,a_p,\chi}$ correspond bien à $\overline{\Pi}_{k,a_p,\chi}$ sous la bijection naturelle du paragraphe précédent et on obtient toutes les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de cette manière (voir [**Bre03b**]).

Lemme 3.3.3. — *Si U est une représentation irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur k_L, et si M est un sous-$\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module non-nul de $D^\sharp(U)$ stable par ψ et Γ, alors $M = D^\sharp(U)$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que pour tout polynôme $P \in k_L[X]$, on a $D(U)^{P(\varphi)=0} = 0$ parce que (cf. la preuve du (iii) de la remarque 5.5 de [**Col04**]) on a :

$$D(U)^{P(\varphi)=0} \subset (\overline{\mathbf{F}}_p \otimes_{\mathbf{F}_p} U)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty}))} \subset \overline{\mathbf{F}}_p \otimes_{\mathbf{F}_p} U^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}})} = 0.$$

Le lemme suit alors de la proposition 4.47 de [**Col04**] (ou plus exactement de sa démonstration, en remarquant que la démonstration n'utilise pas le fait que $\psi : M \to M$ est surjectif). $\square$

Proposition 3.3.4. — *Si U est une représentation irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 sur k_L, alors la représentation $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(U)$ de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{pr}_j : \varprojlim_{\psi} D^\sharp(U) \to D^\sharp(U)$ la projection $\{v_n\} \mapsto v_j$. Si M est un sous-espace fermé et stable par $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ de $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(U)$, on note M_j l'image de $\mathrm{pr}_j : M \to D^\sharp(U)$. On voit que M_j est un sous-$\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module non-nul de $D^\sharp(U)$ stable par ψ et Γ ce qui fait que, par le lemme 3.3.3, $M_j = D^\sharp(U)$. On en déduit que M est dense dans $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(U)$ et donc finalement que $M = \varprojlim_{\psi} D^\sharp(U)$ ce qui fait que $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(U)$ est bien topologiquement irréductible. $\square$

Proposition 3.3.5. — *Si* Π *est une représentation supersingulière de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *sur* k_L*, alors sa restriction à* $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ *est irréductible.*

Démonstration. — Par ce qui précède et par la remarque 3.3.2, le dual algébrique Π^* de Π avec sa topologie profinie est topologiquement et de façon $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante isomorphe à $\varprojlim_\psi D^\sharp(\overline{V}_{k,a_p,\chi})$ pour un $\overline{V}_{k,a_p,\chi}$ convenable avec $2 \leqslant k \leqslant p$. Par la proposition 3.3.4, Π^* est donc une représentation topologiquement irréductible de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$. On en déduit que Π est irréductible (un quotient strict de Π stable par $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ fournirait par dualité un sous-espace fermé strict de Π^* stable par $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$). □

Proposition 3.3.6. — *Si* U_1*,* U_2 *sont deux représentations irréductibles de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *de dimension* 2 *sur* k_L *et s'il existe une application* $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$*-équivariante continue et non-nulle* $f : \varprojlim_\psi D^\sharp(U_1) \to \varprojlim_\psi D^\sharp(U_2)$*, alors* $U_1 \simeq U_2$*.*

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.4.3 de [**BB04**]. Notons comme ci-dessus $\mathrm{pr}_0 : \varprojlim_\psi D^\sharp(U) \to D^\sharp(U)$ la projection $\{v_n\} \mapsto v_0$.

Commençons par montrer que si $v = \{v_n\} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(U_1)$, alors $\mathrm{pr}_0 \circ f(v)$ ne dépend que de $v_0 = \mathrm{pr}_0(v)$. Soit K_n l'ensemble des $v \in \varprojlim_\psi D^\sharp(U_1)$ dont les n premiers termes sont nuls, ce qui fait que pour $n \geqslant 1$, K_n est un sous-$\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module fermé et stable par ψ et Γ de $\varprojlim_\psi D^\sharp(U_1)$ et que $\psi(K_n) = K_{n+1}$. On en déduit que $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n)$ est un sous-$\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-module fermé et stable par ψ et Γ de $D^\sharp(U_2)$. Le lemme 3.3.3 implique alors que soit $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = 0$, soit $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = D^\sharp(U_2)$. Enfin, on voit que $\psi(\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n)) = \mathrm{pr}_0 \circ f(K_{n+1})$ et que $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = 0$ si $n \gg 0$ par continuité. Cela implique que $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc que si $v_0 = 0$, alors $\mathrm{pr}_0 \circ f(v) = 0$.

Pour tout $w \in D^\sharp(U_1)$, soit $\widetilde{w}$ un élément de $\varprojlim_\psi D^\sharp(U_1)$ tel que $\widetilde{w}_0 = w$. Les calculs précédents montrent que l'application $h : D^\sharp(U_1) \to D^\sharp(U_2)$ donnée par $h(w) = \mathrm{pr}_0 \circ f(\widetilde{w})$ est bien définie, et qu'elle est $\mathcal{O}_L[\![X]\!]$-linéaire et commute à ψ et à l'action de Γ. Par les propositions 4.7 et 4.55 de [**Col04**], elle s'étend en une application de (φ, Γ)-modules $h : D(U_1) \to D(U_2)$ et par fonctorialité, on en déduit qu'il existe une application non-nulle et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$-équivariante de U_1 dans U_2, ce qui fait que par le lemme de Schur, on a $U_1 \simeq U_2$. □

Corollaire 3.3.7. — *Si* $2p \geqslant k \geqslant p+2$ *et* $0 < \mathrm{val}(a_p) < 1$*, alors* $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p})$*.*

Démonstration. — Notons d'abord que, sous les conditions de l'énoncé, le Frobenius sur D_{k,a_p} est toujours semi-simple (vérification facile). La proposition 5.8 de [**Bre03a**] montre que :

$$\overline{\Pi}_{k,a_p} \simeq \pi(2p-k, 0, \omega^{k-1-p}) = \pi(k-p-1, 0, 1)$$

et la proposition 3.3.5 (ou plutôt sa preuve) entraîne que la restriction de $\overline{\Pi}^*_{k,a_p} \simeq \varprojlim_\psi D^\sharp(\overline{V}_{k,a_p})$ à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ est topologiquement irréductible. On en déduit que $\overline{V}_{k,a_p}$ est elle-même irréductible (s'il existait une sous-représentation stricte U de $\overline{V}_{k,a_p}$, on en déduirait l'existence d'un sous-espace fermé $\varprojlim_\psi D^\sharp(U)$ de $\varprojlim_\psi D^\sharp(\overline{V}_{k,a_p})$ stable sous $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$).

On a d'autre part un isomorphisme $\varprojlim_\psi D^\sharp(\rho(k-p-1,1)) \simeq \pi(k-p-1,0,1)^*$ (par la proposition 6.2 de [**Bre03b**] par exemple) et donc un isomorphisme topologique et $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-équivariant $\varprojlim_\psi D^\sharp(\rho(k-p-1,1)) \simeq \varprojlim_\psi D^\sharp(\overline{V}_{k,a_p})$ ce qui fait, par la proposition 3.3.6, que l'on a bien $\overline{V}_{k,a_p} \simeq \rho(k-p-1,1) = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p})$. □

Remarque 3.3.8. — Ce corollaire est un cas particulier de la conjecture selon laquelle lorsque l'on réduit modulo p, la correspondance $V_{k,a_p,\chi} \leftrightarrow \Pi_{k,a_p,\chi}$ est compatible avec la correspondance modulo p rappelée plus haut (et étendue aux cas réductibles).

Références

[Ben00] Benois, D : *On Iwasawa theory of crystalline representations*, Duke Math. J. 104 (2000), no. 2, 211–267.

[Ber02] Berger, L : *Limites de représentations cristallines*, Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1473–1498.

[BB04] Berger, L ; Breuil, C : *Représentations cristallines irréductibles de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, prépublication, octobre 2004.

[BLZ04] Berger, L ; Li, H ; Zhu, H : *Construction of some families of* 2*-dimensional crystalline representations*, Math. Ann. 329 (2004), no. 2, 365–377.

[Bre03a] Breuil, C : *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *I*, Compositio Math. 138 (2003), no. 2, 165–188.

[Bre03b] Breuil, C : *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *II*, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23–58.

[CC99] Cherbonnier, F ; Colmez, P : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), no. 1, 241–268.

[Col04] Colmez, P : *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension* 2, prépublication, 2004.

[CF00] Colmez, P ; Fontaine, J-M : *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inv. Math. 140, 2000, 1–43.

[Fon90] Fontaine, J-M : *Représentations p-adiques des corps locaux I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[FL82] Fontaine, J-M ; Laffaille G : *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 4, 547–608 (1983).

[Wa96] Wach, N : *Représentations p-adiques potentiellement cristallines*, Bull. Soc. Math. France 124, 1996, 375–400.

Juillet 2005

Laurent Berger
Christophe Breuil