NOMBRES DE TAMAGAWA DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

par

Laurent Berger

Résumé. — L'objet de ce texte est de montrer la conjecture $C_{EP,F}(V)$ pour certaines représentations semi-stables, et la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ pour certaines représentations cristallines. Les deux ingrédients principaux sont d'une part le calcul de nombres de Tamagawa en utilisant une variante des résultats de Fontaine-Laffaille et de Bloch-Kato, et d'autre part les résultats de continuité de l'exponentielle de Bloch-Kato montrés par Perrin-Riou.

Abstract. — The purpose of this article is to give a proof of the $C_{EP,F}(V)$ conjecture for some semi-stable representations and of the $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ conjecture for some crystalline representations. There are two major ingredients: first, the computation of Tamagawa numbers using a variation on results of Fontaine-Laffaille and of Bloch-Kato, and second some continuity results for Bloch-Kato's exponential which were proved by Perrin-Riou.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S, 14F30.
Mots clefs. — Nombres de Tamagawa, représentations p-adiques cristallines, exponentielle de Perrin-Riou, théorie de Fontaine-Laffaille, exponentielle de Bloch-Kato.

This research was partially conducted by the author for the Clay Mathematics Institute.

Introduction

Soit p un nombre premier $\neq 2$ et F une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. L'objet de ce texte est de montrer les conjectures $C_{EP,F}(V)$ de Fontaine et Perrin-Riou pour les représentations semi-stables V, dont tous les sous-quotients irréductibles W satisfont les propriétés suivantes:

(1) W est cristalline;
(2) la longueur de la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W)$ est $\leq p-1$;
(3) W satisfait au moins une des deux conditions ci-dessous:
   (a) les poids de Hodge-Tate de W sont dans $[-(p-2); p-1]$;
   (b) $\varphi : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(W) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(W)$ est semi-simple [(1)] en p^{-j} pour tout $j \in \mathbf{Z}$ (on dira dans la suite que W est φ-semi-simple).

Comme corollaire et ingrédient de la démontration, on montre la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ de Perrin-Riou pour les représentations cristallines V, dont tous les sous-quotients irréductibles W satisfont les propriétés suivantes:

(1) W est cristalline;
(2) la longueur de la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(W)$ est $\leq p-1$;
(3) W est φ-semi-simple.

Rappelons le contenu de la conjecture $C_{EP,F}(V)$. Si V est une représentation semi-stable de G_F, soient $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $t(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\operatorname{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ les invariants associés à V par la théorie de Fontaine, via les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Dans la suite, T dénotera un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V. Comme $t(V^*(1))^* \simeq \operatorname{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow t(V^*(1))^* \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow t(V) \longrightarrow 0$$

qui permet d'identifier $\det_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ à $\det_{\mathbf{Q}_p}t(V) \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}t(V^*(1))$, et une suite exacte (cf. II.1 (1))

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^0(F,V) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{1-\varphi,\lambda_V} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t(V) \xrightarrow{\exp_{F,V}} H^1(F,V) \xrightarrow{\exp^*_{F,V^*(1)}} \\ \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \oplus t(V^*(1))^* \xrightarrow{1-{}^t\varphi^{-1},{}^t\lambda_{V^*(1)}} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \longrightarrow H^2(F,V) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

provenant de la suite exacte fondamentale et de sa duale, qui définit des isomorphismes $\widetilde{e}_V : \Delta_F(V) \simeq \widetilde{\Delta}_{EP,F}(V)$, où

$$\Delta_F(V) = \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p}\operatorname{Ind}^F_{\mathbf{Q}_p} V,$$

et

$$\widetilde{\Delta}_{EP,F}(V) = \otimes_{0\leq i\leq 2}\det^{(-1)^i}_{\mathbf{Q}_p} H^i(F,V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p}\operatorname{Ind}^F_{\mathbf{Q}_p} V.$$

[(1)] Si E est un K-espace vectoriel, on dit que $f : E \to E$ est semi-simple en $\alpha \in K$ si $\ker(f-\alpha)\cap\operatorname{im}(f-\alpha) = 0$.

Soit
$$\Delta_{EP,F,\mathbf{Z}_p}(V)=\widetilde{e}_V^{-1}\left(\otimes_{0\leq i\leq 2}\det{}_{\mathbf{Q}_p}^{(-1)^i}H^i(F,T)\otimes\det{}_{\mathbf{Q}_p}\operatorname{Ind}_{\mathbf{Q}_p}^F T\right),$$
c'est un sous $\mathbf{Z}_p$-module de rang 1 de $\Delta_F(V)$, et la conjecture $C_{EP,F}(V)$ propose une formule qui permet de le calculer. Posons $h_j(V)=\dim_F(\operatorname{Fil}^j\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\operatorname{Fil}^{j+1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V))$, $t_H(V)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}j\cdot h_j(V)$, et
$$\Gamma^*(j)=\begin{cases}(j-1)! & \text{si } j\geq 1,\\ (-1)^j/(-j)! & \text{si } j\leq 0.\end{cases}$$
Si $\omega\in\Delta_F(V)$, soient $\widetilde{\xi}_V(\omega)\in\overline{\mathbf{Q}}_p$ le coefficient de $t^{-t_H(V)}$ dans l'image de ω par l'isomorphisme de comparaison $\Delta_F(V)\to t^{-t_H(V)}\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\eta_V(\omega)=|\widetilde{\xi}_V(\omega)|_p$ (si V est semi-stable, la définition de η_V est plus compliquée, mais nous n'utiliserons que le cas cristallin).

La conjecture $C_{EP,F}(V)$ de Fontaine et Perrin-Riou peut alors s'énoncer ainsi:

Conjecture 0.1 ($C_{EP,F}(V)$). — *Pour tout $\omega\in\Delta_F(V)$, on a*
$$\Delta_{EP,F,\mathbf{Z}_p}(V)=\mathbf{Z}_p\cdot\det\left(-\varphi\mid\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))\right)\prod_{j\in\mathbf{Z}}\Gamma^*(-j)^{-h_j(V)[F:\mathbf{Q}_p]}\eta_V(\omega)\omega.$$

Le résultat principal de cet article est que la conjecture ci-dessus est vraie pour une représentation cristalline irréductible, dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$, et qui est soit φ-semi-simple, soit à poids de Hodge-Tate dans $[-(p-2);p-1]$. Comme la conjecture $C_{EP,F}(V)$ est stable par suite exactes, on en déduit:

Théorème 0.2. — *La conjecture $C_{EP,F}(V)$ est vraie pour les représentations semi-stables V de G_F, telles que tous les sous-quotients irréductibles de V sont des représentations cristallines dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$, et qui sont soit φ-semi-simples, soit à poids de Hodge-Tate dans $[-(p-2);p-1]$.*

Comme ingrédient et corollaire de nos calculs, nous montrons aussi la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ de Perrin-Riou (on renvoie à III.2 pour des rappels sur les constructions de Perrin-Riou) pour les représentations cristallines irréductibles φ-semi-simples dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$. Comme la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est stable par suite exactes, on en déduit:

Théorème 0.3. — *La conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est vraie pour les représentations cristallines V de G_F, telles que tous les sous-quotients irréductibles de V sont des représentations cristallines φ-semi-simples dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$.*

Remarquons que l'on conjecture que les représentations qui "viennent de la géométrie" sont φ-semi-simples. Disons quelques mots sur la démonstration. Ces résultats sont déjà connus pour les représentations V qui n'ont qu'un poids de Hodge-Tate, et on suppose donc que V n'a pas de sous-quotient qui est une tordue d'une représentation non-ramifiée. On commence par calculer les nombres de Tamagawa de V, pour de telles représentations V satisfaisant de nombreuses restrictions sur leurs poids de Hodge-Tate. On en déduit certains cas de la conjecture $C_{EP,F}$. Ensuite, on utilise la construction de Perrin-Riou pour déterminer comment se comporte $C_{EP,F}(V)$ quand on twiste V. Ceci nous permet de démontrer simultanément $C_{EP,F}(V)$ et $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$.

I. Représentations cristallines

I.1. Rappels et notations

On se donne un nombre premier $p \neq 2$, et F est une extension finie non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. Soit $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{C}_p = \widehat{\overline{\mathbf{Q}}_p}$ sa complétion p-adique. On pose $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$. On pose aussi $F_n = F(\mu_{p^n})$ et F_∞ est défini comme étant la réunion des F_n. Soit H_F le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_F \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_F = G_F/H_F$ le groupe de Galois de F_∞/F qui s'identifie via le caractère cyclotomique à $\mathbf{Z}_p^*$.

Dans la suite, V sera une représentation p-adique de G_F. Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de périodes construits par Fontaine. Rappelons que $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ est une F-algèbre munie d'un Frobenius φ et que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est une F-algèbre munie d'une filtration. Les principales propriétés dont nous ferons usage sont le fait que l'on a une inclusion $\lambda : \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, et la "suite exacte fondamentale":

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{1-\varphi,\lambda} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0.$$

Si V est une représentation p-adique, on pose $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$, c'est un F-espace vectoriel de dimension $\leq d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ et on dit que V est cristalline s'il y a égalité. On définit de même $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et les représentations de de Rham. Le F-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un Frobenius φ, et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une filtration Fil (qui définit une filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ via l'inclusion $\lambda_V : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$). Les entiers $j \in \mathbf{Z}$ tels que $\mathrm{Fil}^{-j}\,\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \neq \mathrm{Fil}^{-j+1}\,\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ sont appelés les poids de Hodge-Tate de V.

On dira que V est φ-semi-simple si $\varphi : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est semi-simple en p^{-j} pour tout $j \in \mathbf{Z}$.

Dans tout cet article, a et b seront deux nombres entiers tels que $a \leq 0$, $1 \leq b$ et $b - a \leq p - 1$. On s'intéressera aux représentations cristallines dont les poids de Hodge-Tate sont dans $[a; b]$.

I.2. Construction de réseaux

Nous aurons besoin de rappeler et préciser certaines des constructions de [**1**]. Les résultats que nous obtenons sont de légères variantes de "Fontaine-Laffaille" (cf. [**4**]).

Pour $a \leq b \in \mathbf{Z}$, soit $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b]}$ la catégorie (abélienne) des $\mathcal{O}_F$-modules D libres de type fini, munis d'une filtration décroissante $\{\mathrm{Fil}^i D\}_i$ telle que $\mathrm{Fil}^{-b} D = D$ et $\mathrm{Fil}^{-a+1} D = 0$, et d'une application $\varphi : D \to D$ telle que $D = \sum_{i \in \mathbf{Z}} p^{-i}\varphi(\mathrm{Fil}^i D)$. On dira que D est fortement divisible. Soit $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b*]}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b]}$ constituée des objets D tels que $\varphi : D \to D$ est de pente $> -b$ (il est équivalent de demander que le φ-module sous-jacent à D n'a pas de partie de pente $-b$). De même, $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a*;b]}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b]}$ constituée des objets D tels que $\varphi : D \to D$ est de pente $< -a$ et $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a*;b*]} = \mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a*;b]} \cap \mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b*]}$.

Ensuite, on définit $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b]}$ comme étant la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules libres de type fini T qui sont des réseaux d'une représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$. Soit $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b*]}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b]}$ constituée des objets T tels que V n'a pas de sous-objet isomorphe à $V_0(b)$ avec V_0 non-ramifiée. De même, $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a*;b]}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b]}$ constituée des objets T tels que V n'a pas de quotient isomorphe à $V_0(a)$ avec V_0 non-ramifiée, et $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a*;b*]} = \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a*;b]} \cap \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b*]}$.

Si $\mathbf{A}_F^+ = \mathcal{O}_F[[\pi]]$, muni d'un Frobenius φ et d'une action de Γ_F semi-linéaires et définis par les formules

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 \quad \text{et} \quad \gamma(\pi) = (1+\pi)^{\chi(\gamma)} - 1,$$

rappelons que l'on a construit dans [**1**] un foncteur $T \mapsto N(T)$, de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b]}$ dans la catégorie des $\mathbf{A}_F^+$-modules libres de type fini, munis d'une action de Γ_F triviale sur $N(T)/\pi$ et d'une application $\varphi : \pi^b N(T) \to \pi^b N(T)$ telle que $\pi^b N(T)/\varphi^*(\pi^b N(T))$ est tué par q^{b-a} (ce foncteur est défini dans [**1**] pour les représentations $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ dont les poids de Hodge-Tate sont négatifs, et on l'étend par la formule $N(T) = \pi^{-h} N(T(h))$).

On a défini pour $i \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{Fil}^i N(T) = \{x \in N(T), \varphi(x) \in q^i N(T)\}$. Revenons au cas où $b - a \leq p-1$.

Lemme I.1. — *Le φ-module $D = N(T)/\pi$, muni de la filtration induite, est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b]}$.*

Démonstration. — C'est un résultat de Wach (cf [**7**, théorème 3]). Donnons-en une démonstration rédigée un peu différemment. Quitte à tordre, on se ramène au cas où $b = 0$. Il est trivial que $\varphi(\mathrm{Fil}^i D) \subset p^i D$, et il suffit donc de voir que la filtration est admissible ou, ce qui revient au même, que la filtration Fil_V induite par celle de $N(V)/\pi$ coïncide avec celle de $N(T)/\pi$. Nous allons donc montrer que $\mathrm{Fil}_V^i D \subset \mathrm{Fil}^i D$ (l'autre inclusion est triviale), pour $1 \leq i \leq p-1$ (si $i \geq p$, alors $\mathrm{Fil}_V^i D = 0$).

Si γ est un générateur de Γ_F, posons

$$T_i(\gamma) = (1-\chi(\gamma)^{-1}\gamma)(1-\chi(\gamma)^{-2}\gamma)\cdots(1-\chi(\gamma)^{-(i-1)}\gamma).$$

Si $\overline{x} \in N(T)$ est dans $\mathrm{Fil}^i_V N(T)$, c'est donc qu'il est l'image modulo π de $x \in N(V)$ tel que $\varphi(x) \in q^i N(V)$, et tel que l'on puisse écrire $x = x_0 + \pi y_1$ avec $x_0 \in N(T)$ et $y_1 \in N(V)$. On a $T_i(\gamma)x = T_i(\gamma)x_0 + \pi^i y_i$ avec $y_i \in N(V)$. Comme $T_i(\gamma)x \in \mathrm{Fil}^i N(V)$, et comme $\pi^i y_i \in \mathrm{Fil}^i N(V)$ trivialement, on a $T_i(\gamma)x_0 \in \mathrm{Fil}^i N(V) \cap N(T) = \mathrm{Fil}^i N(T)$, ce qui fait que $T_i(\gamma)\overline{x} \in \mathrm{Fil}^i D$. Si $i \leq p-1$, alors $T_i(\gamma)$ agit par une unité p-adique sur D et donc on a bien $x \in \mathrm{Fil}^i D$. □

Lemme I.2. — *Si $T \in \mathbf{Rep}^{[a;b]}_{\mathrm{cris}}$ est un réseau d'une représentation cristalline V et $D = N(T)/\pi$, alors le déterminant de l'isomorphisme de comparaison $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \simeq \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_F} D$ appartient à $t^{t_H(V)}\mathcal{O}^*_{\widehat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{nr}}_p}$.*

Démonstration. — Tout d'abord, par [**1**], le déterminant de l'inclusion $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}^+_F} N(T) \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ appartient à $\pi^{t_H(V)}(\mathbf{A}^+)^*$, et donc à $\pi^{t_H(V)}(\mathbf{A}^+_F)^*\mathcal{O}^*_{\widehat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{nr}}_p}$.

Ensuite, rappelons que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{A}^+_F} N(T))^{\Gamma_F}$, et donc que $D \subset \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ s'identifie à l'ensemble des $x \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{A}^+_F} N(T))^{\Gamma_F}$ tels que $x(0) \in N(T)/\pi$. Le déterminant de l'inclusion $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathcal{O}_F} D \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{A}^+_F} N(T)$ calculé dans des bases de D et $N(T)$ est donc égal à $(\log(1+\pi)/\pi)^{t_H(V)} d(\pi)$ où $d(\pi) \in (\mathbf{B}^+_F)^*$ et $d(0) \in \mathcal{O}^*_F$. On en déduit le résultat. □

Proposition I.3. — *Si $D \in \mathbf{MF}^{[a;b*]}_{\mathcal{O}_F}$, alors il existe $T \in \mathbf{Rep}^{[a;b]}_{\mathrm{cris}}$ tel que $N(T)/\pi \simeq D$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que si $\mu = (p/(q-\pi^{p-1})) \in \mathbf{A}^+_F$, alors μ est inversible dans $\mathbf{A}^+_F$, et pour tout $s \geq 0$, $\mu^s q^s = p^s \mod \pi^{p-1}$.

Quitte à tordre D, on se ramène au cas où $b = 0$ et donc $\mathrm{Fil}^0 D = D$. Si $0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_d \leq p-1$ sont les sauts de la filtration, alors dans une base de D adaptée à la filtration, la matrice de φ est égale à $P_0 A$ où $P_0 = \mathrm{Diag}(p^{r_1}, \cdots, p^{r_d})$ et $A \in \mathrm{GL}(d, \mathcal{O}_F)$. On pose $P = \mathrm{Diag}(q^{r_1}\mu^{r_1}, \cdots, q^{r_d}\mu^{r_d})A$ ce qui fait que P est une matrice à coefficients dans $\mathbf{A}^+_F$, égale modulo π^{p-1} à la matrice de φ sur D. De plus, si $\gamma \in \Gamma_F$, alors $\gamma(P^{-1})P \in \mathrm{Id} + \pi^{p-1}\mathrm{M}(d, \mathbf{A}^+_F)$. On écrira $\gamma(P^{-1})P = \mathrm{Id} + \pi^{p-1}Q$.

Pour terminer la preuve, il suffira de construire pour $\gamma \in \Gamma_F$ une matrice $H = H_\gamma \in \mathrm{M}(d, \mathbf{A}^+_F)$ telle que l'on puisse définir l'action de γ sur $N(T)$ par $G_\gamma = \mathrm{Id} + \pi^{p-1}H_\gamma$, c'est-à-dire telle que $\gamma(P)G_\gamma = \varphi(G_\gamma)P$. Cette équation est équivalente à:

$$H - q^{p-1}\gamma(P^{-1})\varphi(H)P = \frac{\gamma(P^{-1})P - \mathrm{Id}}{\pi^{p-1}} = Q.$$

Il suffira donc de montrer que l'application $X \mapsto X - q^{p-1}\gamma(P^{-1})\varphi(X)P$ de $\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$ dans lui-même est surjective. Il est clair que si $Y \in \pi\,\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$, alors la série

$$Y + q^{p-1}\gamma(P^{-1})\varphi(Y)P + q^{p-1}\gamma(P^{-1})\varphi(q^{p-1}\gamma(P^{-1}))\varphi^2(Y)\varphi(P)P + \cdots$$

converge vers $X \in \pi\,\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$ tel que $X - q^{p-1}\gamma(P^{-1})\varphi(X)P = Y$. Il suffit donc de montrer que l'application $X \mapsto X - p^{p-1}(P_0A)^{-1}\varphi(X)P_0A$ de $\mathrm{M}(d, \mathcal{O}_F)$ dans lui-même est surjective. Le fait que $\varphi : D \to D$ n'a pas de partie de pente 0 implique que $\prod_{i=0}^n \varphi^{n-i}(P_0A) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc que si $Y \in \mathrm{M}(d, \mathcal{O}_F)$, alors la série

$$Y + p^{p-1}(P_0A)^{-1}\varphi(Y)P_0A + p^{p-1}(P_0A)^{-1}\varphi(p^{p-1}(P_0A)^{-1})\varphi^2(Y)\varphi(P_0A)P_0A + \cdots$$

converge vers $X \in \mathrm{M}(d, \mathcal{O}_F)$ tel que $X - p^{p-1}(P_0A)^{-1}\varphi(X)P_0A = Y$. □

Remarque I.4. — La même démonstration montre que si $D \in \mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a*;b]}$, alors il existe $T \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b]}$ tel que $N(T)/\pi \simeq D$. En effet, dans la démonstration ci-dessus, si D n'a pas de partie de pente $p-1$, alors $\prod_{i=0}^n \varphi^i(p^{p-1}(P_0A)^{-1}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Corollaire I.5. — *Le foncteur $T \mapsto N(T)/\pi$ est une équivalence de catégories de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b*]}$ dans $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b*]}$ et de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a*;b]}$ dans $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a*;b]}$.*

Démonstration. — La proposition I.3 ci-dessus en construit un quasi-inverse. □

Définition I.6. — On écrira abusivement $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T) = N(T)/\pi$.

Corollaire I.7. — *Si $T \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b*]}$ est un réseau d'une représentation cristalline V, alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)/(1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b]}}(\mathrm{Id}_D, \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)) \simeq H^1_f(F, T).$$

Démonstration. — Rappelons que $0 \in [a;b]$ ce qui fait que l'objet trivial Id_D est dans $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b]}$ et que $b \geq 1$, ce qui fait que $\mathrm{Id}_D \in \mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b*]}$. Le fait que $T \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a;b*]}$ implique que $D(T)$ est aussi dans $\mathbf{MF}_{\mathcal{O}_F}^{[a;b*]}$. Le corollaire résulte alors de l'équivalence de catégories ci-dessus. □

II. Calculs de nombres de Tamagawa

II.1. L'exponentielle de Bloch-Kato

Rappelons que les anneaux de Fontaine $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés par la "suite exacte fondamentale":

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{1-\varphi,\lambda} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0,$$

et que si l'on tensorise par V et que l'on prend la suite exacte longue de cohomologie associée à $(\cdot)^{G_F}$, on trouve le début de la suite exacte de l'introduction:

$$0 \longrightarrow H^0(F,V) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{1-\varphi,\lambda_V} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t(V) \xrightarrow{\exp_{F,V}} H^1(F,V) \tag{1}$$

L'image de $\exp_{F,V}$ est

$$H^1_f(F,V) = \ker\left(H^1(F,V) \to H^1(F, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)\right),$$

et la deuxième moitié de la suite exacte de l'introduction s'obtient en dualisant, et en utilisant un théorème de Bloch et Kato qui dit que $H^1_f(F,V)$ et $H^1_f(F,V^*(1))$ sont orthogonaux.

Si V est une représentation cristalline, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \simeq H^1_f(F,V)$ et par [**2**, lemma 4.5]:

Proposition II.1. — *L'application que l'on déduit de* $1-\varphi$*:*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{1-\varphi} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \simeq H^1_f(F,V)$$

coïncide avec l'exponentielle de Bloch-Kato $\exp_{F,V} : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to H^1_f(F,V)$*.*

Ceci nous donne une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(F,V) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \\ \xrightarrow{1-\varphi} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2}$$

On a aussi une suite exacte bête:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \\ \xrightarrow{1-\varphi} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3}$$

II.2. Nombres de Tamagawa

On suppose toujours que $0,1 \in [a;b]$ et que $b-a \leq p-1$. Rappelons que par définition, si $\omega_{t(V)}$ est une base de $\det_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T))$, alors $\mathrm{Tam}^0_p(V)$ est le coefficient de $\omega^{-1}_{t(V)}$ dans l'image de $\det_{\mathbf{Z}_p} H^0(F,T) \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Z}_p} H^1_f(F,T)$ dans $\det^{-1}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T))$ par la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(F,V) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{1-\varphi,\lambda_V} \\ \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow H^1_f(F,V) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Si l'on combine le corollaire I.7, la proposition II.1, et les suites exactes 2 et 3, on trouve que:

Proposition II.2. — *Si* $T \in \mathbf{Rep}^{[a;b*]}_{\mathrm{cris}}$ *est un réseau d'une représentation cristalline* V*, alors* $\mathrm{Tam}^0_p(V) \in \mathbf{Z}^*_p$*.*

Rappelons la proposition [**6**, C.2.6] qui fait le lien entre les nombres de Tamagawa et la conjecture $C_{EP,F}$:

Proposition II.3. — *Si* $\omega = \omega_{t(V^*(1))} \otimes \omega_{t(V)}^{-1} \in \Delta_F(V)$*, alors*

$$\Delta_{EP,F,\mathbf{Z}_p}(V) = \mathbf{Z}_p \cdot \det\left(-\varphi \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))\right) \frac{\mathrm{Tam}_p^0(V)}{\mathrm{Tam}_p^0(V^*(1))}\omega.$$

La proposition ci-dessus et le lemme I.2 nous permettent de montrer $C_{EP,F}(V)$:

Proposition II.4. — *Si* $T \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[a*;b*]}$ *est un réseau d'une représentation cristalline* V*, alors la conjecture* $C_{EP,F}(V)$ *est vraie.*

Démonstration. — Comme les poids de Hodge-Tate de V sont tous dans $[-(p-2);p-1]$, les facteurs $\Gamma^*(-j)$ qui interviennent dans la définition de $\Delta_{EP,F,\mathbf{Z}_p}(V)$ sont des unités p-adiques. La conjecture $C_{EP,F}(V)$ suit alors du fait que $\mathrm{Tam}_p^0(V)$ et $\mathrm{Tam}_p^0(V^*(1)) \in \mathbf{Z}_p^*$, puisque si V est cristalline à poids dans $[a;b] \subset [-(p-2);p-1]$, alors $V^*(1)$ est cristalline et $T^*(1) \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[(1-b)*;(1-a)*]}$ avec $[1-b;1-a] \subset [-(p-2);p-1]$. □

Corollaire II.5. — *Si* $T \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[0*;p-1*]}$ *est un réseau d'une représentation cristalline* V*, alors la conjecture* $C_{EP,F}(V(i))$ *est vraie pour tout* $i \in \{0,-1,\cdots,-(p-2)\}$.

III. L'exponentielle de Perrin-Riou

III.1. Rappels sur l'exponentielle de Perrin-Riou

Soit Δ_F le sous-groupe de torsion de Γ_F et $\Gamma_1 = \chi^{-1}(1+p\mathbf{Z}_p)$ ce qui fait que $\Gamma_F \simeq \Delta_F \times \Gamma_1$. On pose $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma_F]]$ et $\mathcal{H}(\Gamma_F) = \mathbf{Q}_p[\Delta_F] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{H}(\Gamma_1)$ où $\mathcal{H}(\Gamma_1)$ est l'ensemble des $f(\gamma_1 - 1)$, avec $\gamma_1 \in \Gamma_1$, où $f(T) \in \mathbf{Q}_p[[T]]$ est un série formelle de rayon de convergence ≥ 1.

Rappelons que le résultat principal de Perrin-Riou dans [**5**] est la construction, pour une représentation cristalline V, d'une famille d'applications

$$\Omega_{V,h} : \mathcal{H}(\Gamma_F) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathcal{H}(\Gamma_F) \otimes_\Lambda H^1_{Iw}(F,V)/V^{H_F}$$

dont la propriété principale est qu'elles interpolent les applications "exponentielle de Bloch-Kato". Plus précisément, pour $h, j \gg 0$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\left(\mathcal{H}(\Gamma_F) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(j))\right)^{\widetilde{\Delta}=0} & \xrightarrow{\Omega_{V(j),h}} & \mathcal{H}(\Gamma_F) \otimes_\Lambda H^1_{Iw}(F,V(j))/V(j)^{H_F} \\
\Xi_{n,V(j)} \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_{F_n,V(j)} \\
F_n \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) & \xrightarrow{(h+j-1)!\exp_{F_n,V(j)}} & H^1(F_n,V(j))
\end{array}$$

est commutatif, où $\widetilde{\Delta}$ et $\Xi_{n,V}$ sont deux applications un peu compliquées à décrire. Nous utiliserons le fait que $\mathrm{Tw}_1\,\Omega_{V,h}(\mathrm{Tw}_1 \otimes d_{-1}) = -\Omega_{V(1),h+1}$ où d_{-1} est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Z}_p(-1))$.

Perrin-Riou a proposé une conjecture relativement au déterminant de $\Omega_{V,h}$. Posons

$$\delta(\Omega_V) = \prod_{j \geq 1-h} (\ell_{-j})^{-\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \times \Omega_{V,h}\left[\det_\Lambda(\Lambda \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \otimes_\Lambda \det_\Lambda^{-1} H^1_{Iw}(F,V) \otimes_\Lambda \det_\Lambda H^2_{Iw}(F,V)\right].$$

Perrin-Riou a montré que $\delta(\Omega_V)$ ne dépend pas de h, et [**5**, théo 3.4.2] que $\delta(\Omega_V) \in \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$; elle a de plus conjecturé que $\delta(\Omega_V)$ est une unité de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$. Ceci a été montré par Colmez [**3**]. Colmez a en fait montré la conjecture $\mathrm{Réc}(V)$, qui affirme que pour les accouplements naturels sur $H^1_{Iw}(F,V) \times H^1_{Iw}(F,V^*(1))$ et sur $\mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \times \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$, l'adjoint de $\Omega_{V,h}$ est essentiellement l'inverse de $\Omega_{V^*(1),1-h}$. Cela implique que $\delta(\Omega_V)\delta(\Omega_{V^*(1)})^\iota$ est une unité de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$, et donc de même pour $\delta(\Omega_V)$ et $\delta(\Omega_{V^*(1)})$.

III.2. La conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$

Soient T un réseau de V et M un réseau de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, tels que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison entre $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_F} M$ appartient à $t^{t_H(V)}\mathcal{O}^*_{\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}}$, et ω la base de $\Delta_F(V)$ que l'on en déduit. Posons:

$$\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V) = \prod_{j \geq 1-h} (\ell_{-j})^{-\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \times \Omega_{V,h}\left[\det_\Lambda(\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} M) \otimes_\Lambda \det_\Lambda^{-1} H^1_{Iw}(F,T) \otimes_\Lambda \det_\Lambda H^2_{Iw}(F,T)\right].$$

On peut alors énoncer la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$:

Conjecture III.1 ($\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$). — *On a $\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V) \in \Lambda^*$.*

On voit que Δ_F^*, le dual de Δ_F, est composé des ϖ^i, $0 \leq i \leq p-2$ où ϖ est le caractère de Teichmüller. Pour $i \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$, on notera e_i l'idempotent associé à ϖ^i. Le fait que $\mathrm{Tw}_1\,\Omega_{V,h}(\mathrm{Tw}_1 \otimes d_{-1}) = -\Omega_{V(1),h+1}$ implique:

Lemme III.2. — *On a $\mathrm{Tw}_1\,\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V) = \delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_{V(1)})$. En particulier, on a $e_{i+1}\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V) = e_i\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V(1))$.*

L'ingrédient principal dont nous avons maintenant besoin est une formule qui relie $\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V)$ et $C_{EP,F}(V)$, formule qui est montrée sous une forme un peu différente dans [**5**] (il faut faire attention au fait que les notations de [**5**] et de [**6**] ne sont pas vraiment compatibles, la définition de ξ_V n'est par exemple pas la même):

Proposition III.3. — *Si V est une représentation cristalline, et si φ est semi-simple en 1 et p^{-1} sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors*

$$\Delta_{EP,F,\mathbf{Z}_p}(V) = \det(-\varphi \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))) \prod_{j\in\mathbf{Z}} \Gamma^*(-j)^{-h_j(V)[F:\mathbf{Q}_p]} |\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V)(0)|_p \cdot \omega.$$

En particulier, la conjecture $e_0 \cdot \delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est équivalente à la conjecture $C_{EP,F}(V)$.

Démonstration. — Comme la conjecture Réc(V) est maintenant démontrée, le théorème [**5**, 3.5.4] est vrai en tout généralité (il n'y a plus de "grain de sable"). En prenant la e_0-composante de la formule [**5**, 3.5.4] de Perrin-Riou, on trouve la formule ci-dessus (si $f \in \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$, alors $f(0)$ est par définition la projection de f dans $e_0 \cdot \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda/(1-\gamma_1) \simeq \mathbf{Q}_p$). □

On en déduit donc que si V est φ-semi-simple, alors la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est équivalente à la réunion des conjectures $C_{EP,F}(V(i))$ pour $i \in \{0, -1, \cdots, -(p-2)\}$. En particulier:

Corollaire III.4. — *Si $T \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{[0*;p-1*]}$ est un réseau d'une représentation cristalline φ-semi-simple V, alors la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est vraie.*

Le fait que $\mathrm{Tw}_1\, \delta(\Omega_V) = \delta(\Omega_{V(1)})$ montre que $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ et $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V(1))$ sont équivalentes. De plus, Perrin-Riou a montré $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ pour les tordues de représentations non-ramifiées. Ceci implique donc:

Proposition III.5. — *Si V est une représentation cristalline φ-semi-simple et irréductible, dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$, alors $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ et $C_{EP,F}(V)$ sont vraies.*

Finalement, Perrin-Riou a montré que les conjectures $\delta_{\mathbf{Z}_p}$ (cf [**5**, 3.4.9]) et $C_{EP,F}$ (cf [**6**, C.2.9]) sont stables par suites exactes, ce qui fait que l'on a:

Théorème III.6. — *La conjecture $C_{EP,F}(V)$ est vraie pour les représentations semi-stables V de G_F, telles que tous les sous-quotients irréductibles de V sont des représentations cristallines dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$, et qui sont soit φ-semi-simples, soit à poids de Hodge-Tate dans $[-(p-2); p-1]$.*

Théorème III.7. — *La conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est vraie pour les représentations cristallines V de G_F, telles que tous les sous-quotients irréductibles de V sont des représentations cristallines φ-semi-simples dont la longueur de la filtration est $\leq p-1$.*

Remarquons que l'on conjecture que si V "vient de la géométrie", alors φ est semi-simple sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

Références

[1] Berger, L.: *Limites de représentations cristallines.* Preprint disponible sur ma page web.

[2] Bloch S., Kato K.: *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[3] Colmez P.: *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local.* Ann. of Math. 148 (1998), 485–571.

[4] Fontaine J-M., Laffaille G.: *Construction de représentations p-adiques.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 4, 547–608 (1983).

[5] Perrin-Riou B.: *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local.* Invent. Math. 115 (1994) 81–161.

[6] Perrin-Riou B.: *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques.* Astérisque No. 229 (1995), 198 pp (Appendice C en collaboration avec J-M. Fontaine).

[7] Wach N.: *Représentations cristallines de torsion.* Compositio Math. 108 (1997) 185–240.

Septembre 2002

LAURENT BERGER