EXAMEN

ALGÈBRE M1

Documents admis : notes de cours. Le soin de la rédaction compte dans la note.

1. Localisation

Soit A un anneau et S l'ensemble des $x \in A$ qui ne sont pas des diviseurs de zéro.

1.1. Montrer que S est une partie multiplicative de A.

1.2. Montrer que l'application canonique $\phi_S : A \to S^{-1}A$ est injective.

1.3. Montrer que si T est une partie multiplicative de A telle que l'application canonique $\phi_T : A \to T^{-1}A$ est injective, alors $T \subset S$.

1.4. Montrer que tout élément de $S^{-1}A$ qui n'est pas un diviseur de zéro est inversible.

1.5. Calculer $S^{-1}A$ si $A = \mathbf{Z}^2$.

1.6. Calculer $S^{-1}A$ si A est un anneau de cardinal fini.

2. Autour de la torsion

Dans tout ce problème, A est un anneau intègre et K est son corps des fractions.

2.1. Soit M un A-module. Montrer que le noyau de l'application naturelle $M \to K \otimes_A M$ est M_{tor}.

2.2. Si M est un A-module de type fini, soit $\mathrm{rg}(M) = \dim_K(K \otimes_A M)$. Montrer que si l'on a une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, alors $\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}(P)$.

2.3. Montrer qu'un A-module M de type fini sans torsion est isomorphe à un sous-module d'un A-module libre de rang $\mathrm{rg}(M)$.

2.4. Montrer que si M et N sont deux A-modules de type fini, et $x \in M$ et $y \in N$ sont tels que $x \otimes y = 0$ dans $M \otimes_A N$, alors $x \in M_{\mathrm{tor}}$ ou $y \in N_{\mathrm{tor}}$.

2.5. Soit S une partie multiplicative de A et M un A-module. Montrer que $S^{-1}(M_{\mathrm{tor}}) = (S^{-1}M)_{\mathrm{tor}}$.

2.6. Montrer qu'un A-module M est sans torsion si et seulement si $M_{\mathfrak{p}}$ est sans torsion pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.

3. Entiers

Soit A la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathbf{C}[X,Y]$ engendrée par les monômes $X^{k+1}Y^k$ avec $k \geq 0$.

3.1. Montrer que $A[XY]$ est contenue dans un A-module de type fini.

3.2. Montrer que malgré cela, XY n'est pas entier sur A.

4. Platitude sur les anneaux de Dedekind

Ce problème utilise un résultat du problème 2. Soit A un anneau de Dedekind.

4.1. Montrer que si A est en plus local, alors il est principal (indication : déterminer tous les idéaux de A).

4.2. Montrer que si M est un A-module de type fini sans torsion, alors M est plat.