EXAMEN

NOMBRES P-ADIQUES

Le soin de la rédaction compte dans la note.

1. Nombres transcendants

Soit $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs et $x = \sum_{n\geq 1} p^{a_n}$ dans $\mathbf{Z}_p$. Le but de cet exercice est de montrer que pour certaines suites $\{a_n\}_{n\geq 1}$, le nombre x est transcendant. On suppose que x est un nombre algébrique : soit $d \geq 1$ et $Q(X) = q_d X^d + \cdots + q_1 X + q_0 \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme tel que $Q(x) = 0$, avec $q_d \neq 0$. Le symbole $|\cdot|$ dénote la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{R}$.

1.1. Soit $y \in \mathbf{Z}$ non nul et $n \geq 1$. Montrer que si $v_p(y) \geq n$, alors $|y| \geq p^n$.

1.2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z_0 \in \mathbf{R}$ tel que $|Q(z)| \leq (1+\varepsilon)|q_d z^d|$ si $z \in \mathbf{R}$ et $|z| \geq |z_0|$.

1.3. Soit $x_k = \sum_{n=1}^{k} p^{a_n}$ et $r_k = \sum_{n\geq k+1} p^{a_n}$. En écrivant $Q(x_k) = Q(x - r_k)$, montrer que $v_p(Q(x_k)) \geq a_{k+1}$.

1.4. En majorant et minorant $|Q(x_k)|$, montrer qu'il existe deux constantes c et k_0 telles que $a_{k+1} \leq d a_k + c$ pour tout $k \geq k_0$.

1.5. Montrer que $\sum_{n\geq 1} p^{n!}$ est transcendant.

2. Fonctions lipschitziennes

Si $f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}_p$ est une fonction continue, on note $a_n(f)$ les coefficients de son développement de Mahler : $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(f)\binom{x}{n}$. Si $y \in \mathbf{Z}_p$, on note $f_y : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}_p$ la fonction définie par $f_y(x) = f(x+y)$.

2.1. Montrer que $a_i(f_y) = \sum_{k\geq 0} a_{k+i}(f)\binom{y}{k}$ pour tout $i \geq 0$.

2.2. Montrer que si $k \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, alors $|k|_p \geq 1/k$.

2.3. En écrivant par exemple $\binom{y}{k} = \frac{y}{k} \cdot \binom{y-1}{k-1}$ pour $y \in \mathbf{Z}_p$ et $k \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, montrer que si la suite $\{n \cdot |a_n(f)|_p\}_{n\geq 0}$ est bornée, alors f est lipschitzienne (c'est à dire qu'il existe $C > 0$ telle que $|f(x_1) - f(x_2)|_p \leq C \cdot |x_1 - x_2|_p$).

3. Polynômes irréductibles

Soit $P(X) = X^d + p_{d-1}X^{d-1} + \cdots + p_0 \in \mathbf{Q}_p[X]$. On suppose que $\mathrm{NP}(P)$ n'a qu'une seule pente, qu'on écrit sous la forme $\lambda = a/b$, avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ premiers entre eux.

3.1. Montrer que b divise d.

3.2. Montrer que si $b = d$, alors P est irréductible.

Date: 7 mai.