PARTIEL

ALGÈBRE M1

Documents admis : notes de cours. Le soin de la rédaction compte dans la note.

1. Un calcul de centre

Soit A un anneau principal et $d_1, \ldots, d_r$ des éléments de A qui ne sont ni nuls, ni des unités et tels que $d_1 | \cdots | d_r$. On pose $M = \oplus_{i=1}^r A/d_iA$ et on définit $m_i \in M$ comme l'élément $(0, \ldots, 0, \overline{1}, 0, \ldots, 0)$ où l'unique 1 est en i-ième position.

1.1. Fixons i et j ; à quelle condition sur $x_{i,j} \in A$ l'application $e_{i,j} : M \to M$ donnée par $e_{i,j}(m_k) = 0$ si $k \neq i$ et $e_{i,j}(m_i) = x_{i,j} \cdot m_j$ est-elle bien définie ?

1.2. On suppose que $f : M \to M$ est un endomorphisme A-linéaire qui commute avec tous les éléments de $\mathrm{Hom}_A(M, M)$. En choisissant judicieusement $x_{i,j}$ et en considérant $f \circ e_{i,j}$ et $e_{i,j} \circ f$, montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $f(m) = am$ pour tout $m \in M$.

1.3. Montrer que si V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et si f, $g \in \mathrm{End}(V)$ sont tels que g commute avec tout endomorphisme de V qui commute avec f, alors g est un polynôme en f.

2. Un calcul de produit tensoriel

Soit K un corps et $A = K[X, Y]$ et I l'idéal (X, Y), de sorte que $I^2 = (X^2, XY, Y^2)$. Le but du problème est de montrer que $I \otimes I \simeq I^2 \oplus K$ (tous les $\otimes$ sont au-dessus de A).

2.1. Montrer que les applications $f : A \to A \oplus A$ et $g : A \oplus A \to A$ données par $f(a) = (-aY, aX)$ et $g(a, b) = aX + bY$ donnent une suite exacte $(*)$ $0 \to A \xrightarrow{f} A \oplus A \xrightarrow{g} I \to 0$.

2.2. Montrer que $(*)$ induit une suite exacte $0 \to A \xrightarrow{f} I \oplus I \xrightarrow{g} I^2 \to 0$.

2.3. Montrer (par exemple en tensorisant $(*)$ par I) qu'on a une suite exacte $0 \to I \to I \oplus I \xrightarrow{h} I \otimes I \to 0$. Calculer explicitement $h(i, j) \in I \otimes I$.

2.4. Si $z \in I \otimes I$, montrer que $g \circ h^{-1}(z) \in I^2$ ne dépend pas du choix de $h^{-1}(z)$. On pose $\pi(z) = g \circ h^{-1}(z) \in I^2$. Montrer que l'on a une suite exacte $0 \to K \to I \otimes I \xrightarrow{\pi} I^2 \to 0$, où $K = A/I$. Que vaut $\pi(i \otimes j)$?

2.5. Montrer que l'élément $X \otimes Y - Y \otimes X$ de $I \otimes I$ n'est pas nul, et engendre le sous-module de torsion $(I \otimes I)_{\mathrm{tor}}$.

2.6. Montrer que le sous A-module de $I \otimes I$ engendré par $X \otimes X$, $X \otimes Y$ et $Y \otimes Y$ est isomorphe à I^2, et enfin que $I \otimes I \simeq I^2 \oplus K$.

Date: 16 novembre.