N^o d'ordre : 2855

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

par

Laurent Chevillard

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Physico-Chimie de la matière condensée

Description multifractale unifiée du phénomène d'intermittence en turbulence Eulérienne et Lagrangienne

---

Soutenue le : 21 Septembre 2004

Après avis de : MM Yves Gagne — Rapporteurs
Charles Meneveau

Devant la commission d'examen formée de :

MM	Jean-Pierre Aimé	Directeur de Recherche, CNRS	Examinateur
	Alain Arneodo	Directeur de Recherche, CNRS	Directeur
	Yves Couder	Professeur, Université de Paris VI	Examinateur
	Bérengère Dubrulle	Directrice de Recherche, CNRS	Invitée
	Yves Gagne	Professeur, Université de Grenoble	Rapporteur
	Hamid Kellay	Professeur, Université de Bordeaux I	Président
	Charles Meneveau	Professor, University Johns Hopkins, USA	Rapporteur
	Christos Vassilicos	Professor, Imperial College London, England	Invité

- 2004 -

Merci.

Merci Alain Arneodo de m'avoir fourni un cadre scientifique et humain si riche. Ton enthousiasme, ta rigueur, ton ouverture, ta disponibilité, ton honnêteté, ta confiance, tout cela et j'en oublie, m'ont soutenu et accompagné durant ces trois années. Faire une thèse avec toi, c'est vivre ta conception de la recherche, exigence, travail, détermination. Bien plus que des connaissances, je retire de ta formation d'indélébiles valeurs. Faire une thèse avec toi, c'est aussi partager des moments de vie avec le groupe que tu as constitué, Françoise Argoul, Benjamin Audit, Cendrine Moskalenko, Yves-Henri Sanejouand, et tout leurs étudiants. Cette thèse, l'approche qui est ici adoptée, c'est tout ce que tu m'as appris, avec un tout petit peu plus ...

Merci Bernard Castaing, il y a énormément de toi dans cette thèse. A côté de toi, je ne suis rien, pourtant tu as toujours accordé du temps pour répondre à mes incessantes questions. Sacrée turbulence des fluides ! Si c'est cette thèse a un quelconque intérêt en physique, c'est en grande partie grâce à toi.

Merci Emmanuel Lévêque de m'avoir accueilli à Lyon, aussi bien scientifiquement qu'humainement. Sans toi et sans tes études numériques, tout mon travail aurait été que pures spéculations et digressions poétiques.

Merci Stéphane Roux, merci pour tout. L'analyse du signal, retirer la substantifique moelle, nécessite d'autres outils que ceux que je me suis évertué à utiliser. Je te souhaite plein de bonheur avec Barbara, Coralie, et ...

Merci Jean-Francois Pinton et Nicolas Mordant d'avoir eu, il y a bien longtemps, l'ambition de réaliser des mesures impossibles en turbulence Lagrangienne.

Merci à toute l'équipe du traitement du signal de l'ENS de Lyon, Bruno Lashermes, Patrice Abry, Patrick Flandrin, Pierre Borgnat, pour l'incroyable environnement scientifique et humain que vous m'avez procuré.

Merci au laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, et notamment à son directeur, Sergio Ciliberto de m'avoir accueilli dans un contexte aussi favorable à la recherche scientifique. Merci Claude Laroche, Eric Falcon et tous les membres du laboratoire d'avoir partagé avec moi cette fantastique aventure.

Merci à tous les membres de mon jury, Jean-Pierre Aimé, Yves Couder, Bérengère Dubrulle, Yves Gagne, Hamid Kellay, Charles Meneveau et Christos Vassilicos de m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail de doctorat.

Merci Bruno, Lionel, Zoher et toute la bande des pentes de la Croix-Rousse. Mon amitié vous est à tout jamais acquise.

Merci.

à mes parents ...

Table des matières

I Introduction **11**

II Turbulence Eulérienne **21**

1 De la théorie K41 au phénomène d'intermittence **23**

2 Le domaine inertiel **29**
2.1 Spectre des exposants ζ_q^E : description log-normale de Kolmogorov et Obukhov 29
2.2 Spectre $\mathcal{D}^E(h)$ des singularités : formalisme multifractal 32
2.3 Modélisation probabiliste des incréments de vitesse 33
2.3.1 Le Propagateur 33
2.3.2 Propagateur et description log-normale 35
2.3.3 Propagateur et formalisme multifractal 36
2.3.4 Propagateur et développement en cumulants 36
2.3.5 Le nombre de Reynolds local 37
2.3.6 Dépendance du propagateur dans le nombre de Reynolds local . . . 38
2.4 Analyse en cumulants des données expérimentales et numériques d'incréments longitudinaux de vitesse 40
2.4.1 Le cumulant d'ordre 1 42
2.4.2 Le cumulant d'ordre 2 43
2.4.3 Le cumulant d'ordre 3 44
2.4.4 Conclusions 45

3 Les échelles dissipatives **47**
3.1 Un constat expérimental 47
3.2 Le nombre de Reynolds local dans le domaine dissipatif 47
3.3 Le propagateur dans le domaine dissipatif 48
3.3.1 Evolution du propagateur dans le domaine dissipatif intermédiaire . 49
3.3.2 Dépendance de l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire dans le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ 50
3.4 Description multifractale des échelles dissipatives 53
3.4.1 Continuité des incréments à l'échelle $l = \eta(h)$ 53
3.4.2 Généralisation du propagateur aux échelles dissipatives 54

3.4.3 Description unifiée de la densité de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse . . . 57
3.4.4 Expressions des fonctions de structure et des cumulants . . . 58
3.4.5 Prédictions dans le régime dissipatif profond . . . 60
3.4.6 Le régime dissipatif intermédiaire : dépendance dans le nombre de Reynolds . . . 62
3.4.7 Généralisation en fonction de l'ordre de l'ondelette analysatrice . . . 63
3.5 Analyse en cumulants des données expérimentales et numériques de vitesse longitudinale . . . 66
3.6 Notes sur la Skewness . . . 69
3.6.1 Mesures expérimentales et numériques . . . 69
3.6.2 Interprétation et modélisation . . . 71
3.7 Spectre de puissance . . . 79
3.7.1 Définitions et principes du formalisme . . . 79
3.7.2 Spectre de puissance dans le cadre log-normal . . . 81
3.7.3 Approche de Frisch-Vergassola . . . 83

III Turbulence Lagrangienne 87

4 L'intermittence inertielle Lagrangienne 89
4.1 Généralités . . . 89
4.2 Evidences expérimentales et numériques de la nature intermittente des fluctuations de vitesse Lagrangienne . . . 91
4.3 Hypothèse de similarité raffinée en turbulence Lagrangienne . . . 95
4.4 Généralisation de la méthode du propagateur aux fluctuations inertielles de vitesse Lagrangienne . . . 97
4.5 Les cumulants du logarithme des incréments . . . 99

5 Trajectoires Lagrangiennes dans le domaine dissipatif 101
5.1 Le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_\tau$ . . . 101
5.1.1 Définition dimensionnelle . . . 101
5.1.2 Le régime dissipatif intermédiaire . . . 103
5.2 Description multifractale des fluctuations de vitesse Lagrangienne . . . 103
5.2.1 Statistiques de l'accélération et des dérivées temporelles d'ordre supérieur de la vitesse Lagrangienne . . . 103
5.2.2 Statistiques des incréments d'ordre N de la vitesse Lagrangienne sur toute la gamme d'échelles . . . 105
5.3 Description probabiliste des données expérimentales et numériques . . . 109
5.3.1 Les cumulants du logarithme des incréments d'ordre N de la vitesse Lagrangienne . . . 109
5.3.2 Les densités de probabilité des incréments . . . 112

IV Formalisme multifractal et description probabiliste unificatrice des fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne 115

6 Description multifractale unificatrice des dissipations moyennées Eulérienne ϵ_l et Lagrangienne ϵ_τ 117

6.1 Approche de Tennekes-Lumley . . . 117
6.1.1 Hypothèse d'ergodicité . . . 117
6.1.2 Conséquences de l'hypothèse d'ergodicité sur la fonction caractéristique de la vitesse turbulente . . . 119
6.1.3 Conséquences de l'hypothèse d'ergodicité sur la fonction caractéristique de la dissipation locale . . . 120
6.2 Approche multifractale de la dissipation moyennée Eulérienne ϵ_l . . . 121
6.2.1 Spectre d'exposants τ_q^E et spectre des singularités $f^E(\alpha)$ . . . 121
6.2.2 Les échelles dissipatives Eulériennes . . . 122
6.3 Approche multifractale de la dissipation moyennée Lagrangienne ϵ_τ . . . 123
6.3.1 Spectre d'exposants τ_q^L et spectre des singularités $f^L(\kappa)$ . . . 123
6.3.2 Les échelles dissipatives Lagrangiennes . . . 124
6.4 Unification des spectres des singularités $f^E(\alpha)$ et $f^L(\kappa)$ des dissipations moyennées Eulérienne et Lagrangienne . . . 125

7 Liens statistiques entre fluctuations de vitesse Eulérienne et de vitesse Lagrangienne 127

7.1 Arguments dimensionnels . . . 127
7.2 Transformation Euler-Lagrange des spectres des singularités de la vitesse . 129
7.3 Interprétation et discussion de la validité de la transformation Euler-Lagrange 130
7.3.1 Limite monofractale . . . 130
7.3.2 Le modèle log-normal . . . 130
7.3.3 Le modèle Log-Poisson de She-Lévêque . . . 133

V Corrélations à longue portée en turbulence Eulérienne et Lagrangienne 135

8 Etude des corrélations à longue portée dans les champs de vitesse Eulériens et les trajectoires Lagrangiennes 137

8.1 Evidences expérimentales et numériques de l'existence de corrélations à longue portée dans les fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne . 139
8.1.1 Fonctions de corrélation et fonction d'auto-corrélation connexe . . . 139
8.1.2 Etude expérimentale et numérique des FAC des incréments de vitesses Eulérienne et Lagrangienne . . . 141
8.2 Représentation espace-échelle des fluctuations de vitesse Eulérienne . . . 143
8.3 Cascades et formalisme multifractal. . . . 148

9 De la synthèse de processus stochastiques corrélés à longue portée à la modélisation du caractère intermittent des fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne 153
9.1 Les cascades multiplicatives discrètes 154
9.2 Synthèse de signaux intermittents basée sur une équation de Langevin . . . 158
9.2.1 Le mouvement Brownien 159
9.2.2 Marche aléatoire multifractale (MRW) 161
9.2.3 Modélisation de l'accélération Lagrangienne par une équation de Langevin généralisée 165

VI Conclusion 167

A De l'existence d'une échelle intégrale pour les fonctions multifractales 173

B Transformation en ondelettes 175

C Incréments, transformation en ondelettes et analyse des singularités 177

D Les cumulants du logarithme des incréments de vitesse 179

E Au voisinage de la densité de probabilité Gaussienne 183
E.1 Cas général 183
E.2 Cas Gaussien - Développement de Edgeworth 184

F Relation entre la fonction de corrélation et la fonction d'auto-corrélation connexe 187

Première partie

Introduction

La turbulence des fluides est un phénomène omniprésent dans la nature. De tout temps elle a fasciné l'homme suivant sa sensibilité : qu'il soit philosophe, poète, peintre, mathématicien ou physicien, l'homme a toujours été intellectuellement attiré par cet état complexe des fluides. L'intérêt que les hommes ont porté à ce phénomène s'explique par son accessibilité : nous avons tous été interpellés par les remous de l'eau à la sortie d'une cascade, par les volutes de fumée de cigarettes qui se mélangent à l'air ambiant, par les mouvements des feuilles des arbres arrachées par un vent violent, etc. En physique, la turbulence relève du domaine classique, elle n'est pas sensible au caractère ondulatoire de la matière, ni à la cinématique subtile des vitesses proches de celle de la lumière. Les observables mises en jeu dans un écoulement turbulent (vitesse, vorticité, pression, dissipation, etc.) nous sont aisément accessibles. C'est aussi pour cela que les premières études en turbulence ont précédé les grands avènements de la physique du 20^{e} siècle : Léonard de Vinci au 17^{e} représentait déjà une vision très moderne de la turbulence comme une superposition imprédictible de structures cohérentes (tourbillons, vortex) de toutes formes et de toutes tailles [1, 2].

Dans une description continue, un fluide parfait de viscosité ν est une population de particules fluides de taille très grande devant l'échelle moléculaire et très petite devant l'échelle typique des phénomènes dissipatifs (Echelle de Kolmogorov η_K que nous définirons plus tard). Cette description, qui est celle de la mécanique des milieux continus, laisse intrinsèquement le choix entre deux points de vue :

- Soit le fluide est considéré comme un champs de particules fluides dont les observables (vitesse, pression, dissipation, ...) dépendent des coordonnées de l'espace et du temps : on réalise une étude **Eulérienne** du fluide. A tout instant t, le fluide en un point de l'espace pointé par un vecteur $\vec{r}$ correspond à une particule fluide qui se trouve être au point $\vec{r}$ à l'instant t.
- Soit le fluide est considéré comme une assemblée de particules fluides et on s'intéresse aux observables (vitesse, pression,dissipation) de chaque particule fluide au cours du temps t : on réalise une étude **Lagrangienne** du fluide. La connaissance du comportement de l'ensemble des particules fluides permet une description de l'ensemble du fluide.

Ces deux descriptions sont équivalentes puisque elles s'intéressent au même objet [2]. Les équations de Navier-Stokes régissent la dynamique de la vitesse Eulérienne $\vec{u}(x, y, z, t)$ d'un fluide incompressible de viscosité ν :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \ ,$$

où $p(x, y, z, t)$ est la pression du fluide. L'hypothèse d'incompressibilité est justifiée si on considère que les particules fluides conservent un volume constant dans l'espace et le temps, ce qui revient à supposer qu'il ne peut y avoir qu'une particule fluide en un point de l'espace (pas d'aggrégation). Les équations de Navier-Stokes sont issues du raisonnement de la mécanique Newtonienne qui stipule que l'accélération d'une particule est égale à la somme des forces qui agissent sur cette même particule.

Dans le jeu des variables Lagrangiennes [3], on peut définir la position à l'instant t d'une particule initialement en un point $\vec{r}_0$ de l'espace : $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$. La vitesse de cette particule est la dérivée temporelle de sa position : $\vec{v}(\vec{r}_0, t), t) = \partial\vec{r}(\vec{r}_0, t)/\partial t$. On peut ainsi faire le lien formel entre la vitesse Eulérienne $\vec{u}(x, y, z, t)$ et la vitesse Lagrangienne $\vec{v}(\vec{r}_0, t)$:

$$\vec{v}(\vec{r}_0, t) = \vec{u}\left[\vec{r}(\vec{r}_0, t), t\right] \ .$$

Selon le phénomène physique étudié, on choisira de décrire le fluide du point de vue Eulérien (structures cohérentes, vortex, ...) ou Lagrangien (dispersion de polluants).

Les équations de Navier Stokes mettent en jeu la compétition entre deux termes : un terme non linéaire advectif $((\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u})$ et un terme linéaire diffusif $(\nu\Delta\vec{u})$. Un moyen de saisir la prépondérance d'un terme par rapport à l'autre est de construire un nombre adimensionné à partir de grandeurs caractéristiques du fluide, le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e = UL/\nu$, défini comme le rapport d'une vitesse caractéristique U, d'une longueur caractéristique L et de la viscosité ν du fluide. Ainsi, le nombre de Reynolds d'un écoulement turbulent athmosphérique est de l'ordre de 10^8 et celui de l'écoulement laminaire du sang dans les veines de l'ordre de 10^{-3}.

L'étude mathématique des équations de Navier-Stokes, et de certaines versions simplifiées (équation d'Euler) ou ultra simplifiées (équation de Burgers [4]) est toujours d'actualité notamment lorsque tous les termes sont conservés (en particulier le terme quadratique). Suite à la publication des travaux de A. N. Kolmogorov [1, 5], la majeure partie de la communauté des physiciens s'est peu à peu orientée vers une description phénoménologique de la turbulence. Motivé par les travaux précurseurs de Richardson en 1922 [6], et de sa vision schématique de structures grandes échelles qui cascadent en des tourbillons de plus en plus petits jusqu'aux échelles dissipatives, Kolmogorov énonce en 1941 (K41) un postulat révolutionnaire : à des nombre de Reynolds infiniment grands, les *petites* échelles de la turbulences sont **statistiquement** isotropes et indépendantes du mécanisme qui produit la turbulence (c'est-à-dire l'injection d'énergie). Les *petites* échelles de la turbulence (temporelles ou spatiales) dont parle Kolmogorov, sont des échelles petites devant l'échelle de longueur L (ou de temps T) d'injection de l'énergie (typiquement la taille de la soufflerie ou celle des pales d'une machine de von Kármán dans une turbulence de laboratoire, typiquement l'échelle du kilomètre dans le cadre d'une turbulence atmosphérique), mais restent très grandes devant l'échelle moléculaire. Il convient ici de bien définir ces échelles. Nous appellerons échelles inertielles, les échelles qui sont petites devant l'échelle intégrale (caractéristique de l'injection d'énergie à grande échelle) mais qui demeurent grandes devant la longueur de Kolmogorov $\eta_K \sim L\mathbb{R}_e^{-3/4}$ (ou temps de Kolmogorov $\tau_\eta \sim T\mathbb{R}_e^{-1/2}$), à laquelle l'énergie injectée au système se dissipe par effets Joule, et qui définit le domaine dissipatif. L'hypothèse de grands nombres de Reynolds est nécessaire pour que ces deux domaines soient bien distincts et suffisamment étendus : on se situe ainsi dans le cadre d'une *turbulence pleinement développée*. Dans ces conditions, les hypothèses d'isotropie et d'indépendance vis à vis de la géométrie de l'écoulement à grande échelle sont vérifiées

et le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ prend toute sa signification : il définit complètement l'écoulement turbulent homogène et isotrope dont parle Kolmogorov [5]. Ainsi, pour un même nombre de Reynolds infiniment grand, une turbulence isotrope d'un fluide tel que l'eau est statistiquement indiscernable d'une turbulence isotrope d'un fluide tel que l'air ou l'huile.

Comme nous allons le voir, la notion d'échelle, omniprésente dans les travaux de Kolmogorov, est directement reliée aux observables (mesurables !) du fluide : la physique d'un fluide turbulent ne se résume pas à l'étude systématique de sa vitesse Eulérienne $\vec{u}(x,y,z,t)$ (ou Lagrangienne $\vec{v}(\vec{r}_0,t)$) et de ses dérivées comme la dissipation locale $\epsilon = \frac{1}{2}\nu \sum_{i,j} \left[\partial_i u_j + \partial_j u_i\right]^2$ (ou l'accélération d'une particule Lagrangienne $\vec{a}(\vec{r}_0,t) = \partial_t \vec{v}$), mais se situe aussi à travers les échelles, en étudiant par exemple l'évolution de la composante longitudinale de la vitesse Eulérienne sur une échelle de longueur l, $\delta_l u(x) = u_x(x+l) - u_x(x)$, u_x étant la composante suivant x de la vitesse Eulérienne, ou bien l'incrément temporel de vitesse Lagrangienne sur une échelle de temps τ, c'est à dire $\delta_\tau v(t) = v_x(t+\tau) - v_x(t)$, v_x étant par exemple la composante suivant x de la vitesse d'une particule Lagrangienne [1–3]. Kolmogorov caractéristise complètement, d'un point de vue statistique, le comportement de ces incréments dans les échelles, en s'appuyant sur des raisonnements dimensionnels et une relation exacte tirée des équations de Navier-Stokes : pour toutes les échelles inertielles, l'incrément se comporte statistiquement comme une loi de puissance vis-à-vis de l'échelle l, $\delta_l u \sim l^h$, où l'exposant h est unique et égal à $h = 1/3$; remarquons que cet exposant acquiert le statut mathématique d'exposant de Hölder à la limite des échelles infiniment petites (et donc pour un nombre de Reynolds infini). Dans une formulation Lagrangienne du fluide, en cohérence avec les travaux de Richardson [6], les incréments temporels de vitesse sur une échelle τ se comportent suivant une loi similaire, $\delta_\tau v \sim \tau^h$, mais cette fois avec un exposant unique $h = 1/2$. Les implications de cette description sur les moments des incréments, communement appellés fonctions de structure, $M_q(l) = \langle (\delta_l u)^q \rangle$ (respectivement $M_q(\tau) = \langle (\delta_\tau v)^q \rangle$) sont immédiates : $M_q(l) \sim l^{\zeta_q^E}$ avec $\zeta_q^E = q/3$ (respectivement $M_q(\tau) \sim \tau^{\zeta_q^L}$ avec $\zeta_q^L = q/2$). Comme nous le verrons dans la suite, le fait que l'exposant de loi de puissance h soit unique et que le spectre ζ_q soit linéaire conduit à une description autosimilaire, ou encore monofractale, des fluctuations de vitesse turbulente. Dans le cadre Lagrangien, les théories dimensionnelles *à la* Kolmogorov prédisent que les trajectoires des particules sont indiscernables statistiquement d'un mouvement Brownien (à la stationnarité de la vitesse près). Les prédictions de Kolmogorov peuvent être transposées dans le domaine spectral, en étudiant notamment le spectre de puissance $E(k) = \langle |u_x(k)|^2 \rangle$, où $u_x(k)$ est la transformée de Fourier de la composante suivant x de la vitesse Eulérienne, de vecteur d'onde k. On obtient ainsi le fameux comportement en loi de puissance $E(k) \sim k^{-5/3}$ pour la vitesse Eulérienne [5]. L'équivalent Lagrangien est un spectre de puissance se comportant comme une puissance de la fréquence ω exprimée en Hertz, $E(\omega) = \langle |v(\omega)|^2 \rangle \sim \omega^{-2}$ et qui est identique à celui obtenu pour le mouvement Brownien.

Expérimentalement, les implications de ces notions sont fondamentales. Les mesures de profils spatiaux ou temporels de vitesse Eulérienne sont apparues avec la maitrise des

anémomètres à fils chauds [7–15]. Il est ainsi devenu possible de mesurer des profils spatiaux de vitesse en soufflerie sous une hypothèse de turbulence "gelée", plus connue sous le nom d'hypothèse de Taylor [1, 2], que nous discuterons largement dans la suite de ce mémoire. Plus précisemment, il devenait possible de mesurer la composante dite *longitudinale* de la vitesse, c'est-à-dire la composante de la vitesse suivant la direction de la vitesse moyenne du flot (par exemple u_x suivant x). La machine de von Kármán, dite machine "à laver", est une autre méthode expérimentale [16–22] permettant de créer un écoulement turbulent : elle consiste à agiter dans un volume étroit, un fluide (eau-air-sodium-gallium) entre deux disques munis d'un mouvement de rotation autour de leur centre, de façon contra-rotative. Dans un petit volume au centre de la machine (c'est-à-dire, loin des bords), le fluide, outre le fait qu'il est turbulent, n'a pas de direction privilégiée. Les mesures Lagrangiennes de vitesse sont elles beaucoup plus récentes et ont été réalisées par deux équipes expérimentales, l'une aux USA et l'autre à Lyon. La première équipe à avoir réalisé une mesure Lagrangienne de vitesse à grand nombre de Reynolds est celle de Bodenschatz à l'université de Cornell [23–26]. Cette équipe est parvenue à mesurer l'accélération Lagrangienne (la variation de vitesse durant un temps égal à la résolution temporelle de l'expérience) grace à des "silicon strip detectors", issus de la physique des particules élémentaires, qui fournissent chacun la position selon une direction des billes de $50\mu m$ placées dans un écoulement de von Kármán. La deuxième expérience a été réalisée par Mordant à l'ENS de Lyon sous la direction de Pinton [27–31]. L'écoulement généré est le même que celui de l'équipe de Cornell (von Kármán) mais les techniques utilisées sont différentes : c'est l'écho doppler qui ici permet d'accéder à la vitesse des billes placées dans l'écoulement en fonction du temps. Les expériences sont complémentaires puisque seule l'accélération Lagrangienne est accessible à Cornell, alors que le groupe de Lyon a accès à la vitesse des billes en fonction du temps ce qui offre la possibilité d'étudier l'évolution de la statistique des fluctuations de vitesse Lagrangienne à travers les échelles, la technique ultrasonore ne permettant pas d'obtenir une résolution suffisante à ces nombre de Reynolds pour mesurer l'accélération.

L'avènement de l'informatique et des moyens de calcul en général, a permis la résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour des nombres de Reynolds de plus en plus importants [32–37]. Les écoulements simulés sont 2π-périodiques, forcés en général à grande échelle, sur un réseau de maille élémentaire de volume $\left(\frac{2\pi}{N}\right)^3$, N étant le nombre de points intervenant dans la discrétisation de 2π. La limitation de ces simulations (DNS pour *Direct Numerical Similations*) dans la modélisation des écoulements à grands nombres de Reynolds provient de la résolution spatiale nécessaire au calcul des dérivées présentes dans l'équation de Navier-Stokes : la résolution des échelles dissipatives à un nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ donné nécessite une place mémoire qui croit comme la puissance $9/4$ de ce nombre, c'est-à-dire comme $(L/\eta_K)^3$ [1]. En contrepartie, les DNS donnent accès à toutes les observables possibles de l'écoulement, aussi bien en Eulérien qu'en Lagrangien, et ce dans tout l'espace, suivant toutes les composantes (pour les vecteurs) et à tous les temps. Les dernières générations de super-ordinateur permettent d'atteindre des résolutions $N^3 = (4096)^3$ [36], et donc de simuler des flots turbulents à des nombres de Reynolds comparables à ceux obtenus dans des écoulements étudiés en laboratoire.

L'ensemble des études des signaux expérimentaux et numériques effectués soit dans des géométries différentes (souffleries, jets, etc), soit à des résolutions différentes , ont convaincu l'ensemble de la communauté que la turbulence pleinement développée, homogène et isotrope au sens de Kolmogorov [5], dévie de façon significative du modèle monofractal prédisant un comportement linéaire du spectre ζ_q dans le régime inertiel. Malgré les effets de nombre de Reynolds fini et la nature anisotrope de l'écoulement à grande échelle [38–41], il est désormais clairement établi que les statistiques des incréments de vitesses Eulérienne et Lagrangienne présentent des comportements en loi de puissance *anormaux* en fonction de l'échelle, caractérisés par un spectre ζ_q non linéaire. L'écart à la linéarité du spectre ζ_q est une manifestation d'un phénomène plus général connu sous l'appelation **intermittence**. Suite à une objection de Landau [42] à la théorie de **K41** [5], Kolmogorov [43] et Obukhov [44] publient chacun en 1962, un article dans un même volume de la revue *Journal of Fluids Mechanics* dans lequel ils prennent en considération les fluctuations de la dissipation moyennée sur une boule de rayon l, $\epsilon_l(\vec{r},t) = \frac{3}{4\pi l^3}\int_{|s|\leq l} \epsilon\,(\vec{r}+\vec{s},t)\,d\vec{s}$. Ils estiment ainsi les fonctions de structure des incréments de vitesse à partir des moments de la dissipation moyennée ϵ_l en supposant vraie à tout ordre q, la relation dimensionnelle suivante :

$$\langle(\delta_l u)^q\rangle \sim \langle(l\epsilon_l)^{q/3}\rangle \ .$$

Ils interprètent ainsi la non linéarité du spectre ζ_q^E comme la conséquence de la nature intermittente de la dissipation *locale* ϵ. Cette nouvelle description de Kolmogorov et Oboukhov en 1962, plus connue sous le nom de **KO62** [43, 44], est basée sur une statistique log-normale de la variable aléatoire ϵ_l, c'est-à-dire sur une statistique Gaussienne de la variable $\ln\epsilon_l(\vec{r},t)$. En 1985, Parisi et Frisch [45] proposent une interprétation du phénomène d'intermittence dans le langage des singularités et du formalisme multifractal [1, 46–49] : l'incrément de vitesse sur une échelle l (ou τ), $\delta_l u$ (ou $\delta_\tau v$) se comporte localement comme $\delta_l u \sim l^h$, où l'exposant h caractérise les propriétés d'invariance d'échelle locale de la vitesse ; les fluctuations spatiales de cet exposant sous-jacentes à la nature intermittente du signal de vitesse sont modélisées en considérant h comme une variable aléatoire de densité de probabilité $\mathbb{P}_l(h) \sim l^{1-\mathcal{D}^E(h)}$, où $\mathcal{D}^E(h)$ est le spectre multifractal des singularités. Dans la limite $l \to 0$, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds infiniment grands, h et $\mathcal{D}^E(h)$ acquièrent respectivement le statut d'exposant de Hölder et de spectre des singularités. Dans la description log-normale de KO62 [43, 44], $\mathcal{D}^E(h)$ est de forme parabolique. Plusieurs autres formes du spectre $\mathcal{D}^E(h)$ ont été proposées dans la littérature, parmi lesquelles celles prédites par le "p-modèle" [50], le modèle de She-Lévêque [51], et sa généralisation à la statistique log-Poisson [52, 53], et le modèle log-Lévy [54–56].

Aujourd'hui, si les travaux expérimentaux et numériques portant sur l'intermittence dans le domaine inertiel sont nombreux, force est de constater que d'un point de vue théorique, aucune approche quantitative du phénomène d'intermittence n'a émergée. La grande majorité des études expérimentales en turbulence s'est focalisée sur l'étude systématique des lois de puissance dans le domaine inertiel. D'un point de vue de l'analyse des signaux expérimentaux et numériques, le calcul des fonctions de structure met clairement en évidence un écart au comportement en loi de puissance, qui peut s'expliquer à toute petite

échelle par un effet de nombre de Reynolds fini (les effets dissipatifs remontent dans l'inertiel) et à grande échelle par l'anisotropie de l'écoulement à l'échelle intégrale [38–41]. Afin de mesurer correctement le spectre ζ_q à bas nombre de Reynolds, Benzi et ses collaborateurs [57–59] proposent en 1993 de mesurer la pente du graphe obtenu en représentant le logarithme d'une fonction de structure en fonction du logarithme d'une fonction de structure d'un autre ordre. Cette technique empirique porte le nom d'auto-similarité étendue (ESS pour *Extended Self Similarity*) [57–59]. Toutefois, une compréhension profonde de la validité de cette méthodologie est toujours manquante [60] et ses conditions d'application se limitent à des échelles supérieures à dix fois la longueur de Kolmogorov η_K [61]. Parallèlement à cette étude empirique, les travaux de Paladin et Vulpiani [62] montrent que dans le cadre de la description multifractale, l'échelle dissipative η_K (précédemment déterminée dimensionnellement par Kolmogorov, $\eta_K \sim \mathbb{R}_e^{-3/4}$) en fait fluctue spatialement et prend des valeurs dans un domaine d'échelles que nous appellerons le *domaine dissipatif intermédiaire* [63–66]. Le comportement dans le domaine spectral des profils spatiaux de vitesse dans le domaine dissipatif intermédiaire a été étudié par Frisch et Vergassola [63] ; leur résultat principal est que le spectre de puissance est universel, dans la mesure où $\ln E(k)/\ln \mathbb{R}_e$ est une fonction indépendante du nombre de Reynolds de $\ln k/\ln \mathbb{R}_e$. En 1990, Nelkin [67] prédit, grace au formalisme multifractal et en incorporant les fluctuations de l'échelle dissipative, la "flatness" des dérivées de la vitesse. Ses prédictions de l'évolution de la flatness en fonction du nombre de Reynolds sont corroborées par différentes mesures effectuées indépendement par plusieurs groupes expérimentaux [68–70]. Nous appelerons le *domaine dissipatif profond*, le domaine des petites échelles l (ou τ) pour lesquelles $\delta_l u_x(x) \approx l\partial_x u_x(x)$ (ou $\delta_\tau v_x(t) \approx \tau\partial_t v_x(t)$). Finalement, ce n'est qu'en 1995 que Meneveau [64] propose une généralisation du formalisme multifractal sur toute l'étendue de la gamme d'échelles, depuis l'échelle intégrale jusqu'au domaine dissipatif profond. A notre connaissance, il est le premier à étudier l'implication de la dispersion de l'échelle dissipative sur la courbure des fonctions de structure, séparant les lois de puissance triviales $M_q(l) \sim l^q$ (resp. $M_q(\tau) \sim \tau^q$), des lois de puissance anormales du domaine inertiel $M_q(l) \sim l^{\zeta_q}$ (resp. $M_q(\tau) \sim \tau^{\zeta_q}$).

Comme nous l'avons précédemment mentionné, la notion de cascade est omniprésente en turbulence pleinement développée depuis les travaux originaux de Richardson [6]. Elle est directement reliée au caractère multifractal de la turbulence, c'est-à-dire au phénomène d'intermittence [43, 44, 71] et à l'existence de corrélations à longue portée [50, 72–80]. Ainsi, au-delà de l'aspect analyse du signal, de nombreux travaux ont été récemment consacrés au problème de la synthèse, c'est-à-dire à la construction de processus stochastiques de signaux statistiquement indiscernables des profils spatiaux ou temporels de vitesse dans un écoulement turbulent (Eulérien et Lagrangien). Nous citerons à titre d'exemple les Brownien fractionnaires [81], les cascades discrètes [50, 82] et leur généralisation sur base d'ondelettes [77, 83], les processus multi-affines [84], les marches multifractales [85] et leur généralisation aux cascades continues log-infiniment divisibles [86–91].

Dans ce mémoire de doctorat, nous nous proposons d'étudier dans une première partie,

plusieurs signaux expérimentaux et numériques de turbulence Eulérienne. La constatation de la brisure de l'invariance d'échelle aux petites échelles, nous conduira à émettre de nouvelles prédictions dimensionnelles concernant l'étendue du *domaine dissipatif intermédiaire* ainsi qu'à formaliser l'évolution de la statistique des fluctuations de vitesse dans le cadre de la méthode du *propagateur* [9, 92–99] et du formalisme multifractal [45, 64]. Nous calculerons la densité de probabilité d'un incrément de vitesse à l'échelle l (ou τ), c'est-à-dire $\mathcal{P}(\delta_l u)$ (ou $\mathcal{P}(\delta_\tau v)$), dans toute la gamme d'échelles (dissipatif profond - dissipatif intermédiaire - inertiel), à un nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ donné (et fini) moyennant la détermination d'une fonction paramétrique $\mathcal{D}^E(h)$, où h et $\mathcal{D}^E(h)$ seront assimilés à l'exposant de Hölder et au spectre des singularités dans la limite de $\mathbb{R}_e \to +\infty$. Nous montrons qu'il est possible d'effectuer une description quantitative et synthétique de l'ensemble des données expérimentales et numériques avec un spectre $\mathcal{D}^E(h)$ quadratique en accord avec la théorie KO62. Nous aborderons ensuite le phénomène de *Skewness* [1–3, 100–103], et nous montrerons qu'il est possible de rendre compte de façon très précise de son comportement dans les échelles. Nous conclurons ce chapitre avec l'interprétation spectrale des signaux de turbulence, en faisant le lien entre notre approche et celle de Frisch & Vergassola [63], et en proposant une description quantitative du *Bottleneck effect* [104] observé dans les spectres de puissance expérimentaux. Nous généraliserons notre étude aux statistiques des incréments d'ordre N de la vitesse, ce qui nous permettra de repérer simplement et sans faire d'hypothèses supplémentaires, les échelles auxquelles la dissipation d'énergie n'est plus négligeable.

Dans une deuxième partie, nous reprendrons les raisonnements développés dans les chapitres précédents pour les étendre au contexte de la turbulence Lagrangienne et à l'étude des quantités présentant des propriétés d'invariance d'échelle temporelle. Nous montrerons comment il est possible de décrire de façon quantitative dans un même formalisme, supporté par des arguments dimensionnels plus généraux, l'ensemble des mesures expérimentales [23–31] et numériques [105] de vitesse Lagrangienne dans un écoulement turbulent pleinement développé. Nous verrons que les effets dissipatifs dans le cadre Lagrangien sont beaucoup plus importants [106] qu'en turbulence Eulérienne, au détriment du régime inertiel qui se révèlera peu étendu malgré les hauts nombres de Reynolds atteints dans les expériences. Nous mettrons en évidence le fait que des exposants $h \geq 1$ peuvent exister, des exposants pour lesquels l'incrément n'est plus adapté pour rendre compte des propriétés d'invariance d'échelle locale. Nous insisterons sur le fait que l'analyse multifractale des signaux de vitesse Lagrangienne exige l'utilisation des incréments (ou "ondelettes") d'ordre supérieur.

Dans une troisième partie, nous établirons un lien statistique entre les fluctuations de vitesse Lagrangienne et de vitesse Eulérienne. Des travaux précédents de Tennekes et Lumley [2], et de Borgas et collaborateurs [107–110], permettent de relier les descriptions multifractales (via l'estimation du spectre $f(\alpha)$ des singularités [46–49, 111–115]) de la dissipation en turbulence Lagrangienne et Eulérienne. Nous calculerons les implications de ces idées sur les spectres des singularités des vitesses Lagrangienne et Eulérienne, et

nous confronterons ces prédictions avec les résulats issus des mesures expérimentales et numériques présentées dans les chapitres précédents [106].

Dans une dernière partie, nous traiterons de la présence de corrélations à longue portée dans les signaux expérimentaux et numériques de vitesse Eulérienne et Lagrangienne. Nous rappelerons la principale conséquence d'une structure sous-jacente en cascade sur les statistiques d'ordre 2 des signaux de vitesse, à savoir une décroissance très lente (logarithmique) des corrélations d'amplitude [29, 31, 50, 72–74, 77–80]. Nous présenterons tout d'abord les fonctions de corrélation de la turbulence Eulérienne, et l'implication fondamentale de l'hypothèse de Taylor sur ces signaux [80, 116]. Nous discuterons de la même manière les corrélations à longue portée présentes dans les fluctuations de vitesse Lagrangienne [29, 31] et nous passerons en revue les différents modèles proposés dans la littérature pour rendre compte de l'intermittence Lagrangienne [107, 109, 117–128]. Nous présenterons ensuite une vision espace-échelle de ces corrélations à longue portée en rappelant les travaux de Cates et Deutsch [72], ainsi que ceux de Meneveau et Chhabra [73] dans le cadre du formalisme multifractal. Nous mentionnerons ensuite les limitations relatives des divers processus stochastiques proposés pour rendre compte des mesures expérimentales et numériques, et nous terminerons sur la notion d'intermittence dans le domaine spectral [129, 130].

Deuxième partie

Turbulence Eulérienne

Chapitre 1

De la théorie K41 au phénomène d'intermittence

Un signal de vitesse turbulente, par exemple le profil spatial d'une composante de la vitesse ($u_x(x, y, z, t) = u(x)$ en fonction de x) , dans le cadre de la description Eulérienne du fluide, est un signal d'une grande complexité (Fig. 1.1) :

- le signal apparait fortement désorganisé et présente des structures à toutes les échelles ;
- toutes prévisions détaillées (c'est-à-dire locales en espace) semblent difficiles ;
- certaines propriétés telles que les propriétés statistiques du signal (comme par exemple les densités de probabilité) sont reproductibles et indépendantes de l'espace.

Ainsi, il apparait très difficile de prévoir quelle sera la valeur de la vitesse en un point $x+l$ connaissant sa valeur au point x. Déjà en 1895, Reynolds [131] décrivait la vitesse d'un fluide "agité" comme la somme d'une composante constante et de ses fluctuations. Une autre façon d'appéhender la complexité d'un fluide turbulent est d'énumérer le nombre de paramètres libres nécessaires à le décrire. On peut en effet montrer [1, 2] que le nombre de degrés de liberté du fluide se comporte comme le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ (Eq. (1.5)) à la puissance 9/4. Ceci explique que le point de vue que nous adopterons dans ce manuscrit sera fondamentalement de nature statistique.

Dans le domaine inertiel, et dans le cadre phénoménologique de la théorie monofractale **K41** [1, 3, 5], la dissipation locale d'énergie

$$\epsilon = \frac{1}{2}\nu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 , \tag{1.1}$$

où i, j sont les indices du repère cartésien et ν la viscosité du fluide, caractérise complètement le comportement statistique à travers les échelles l des incréments *longitudinaux* de vitesse Eulérienne, $\delta_l u(x) = u(x + l) - u(x)$, et ce pour tout ordre q, suivant la relation dimensionnelle :

$$(\delta_l u)^q \sim l^{\frac{q}{3}} \epsilon^{\frac{q}{3}} . \tag{1.2}$$

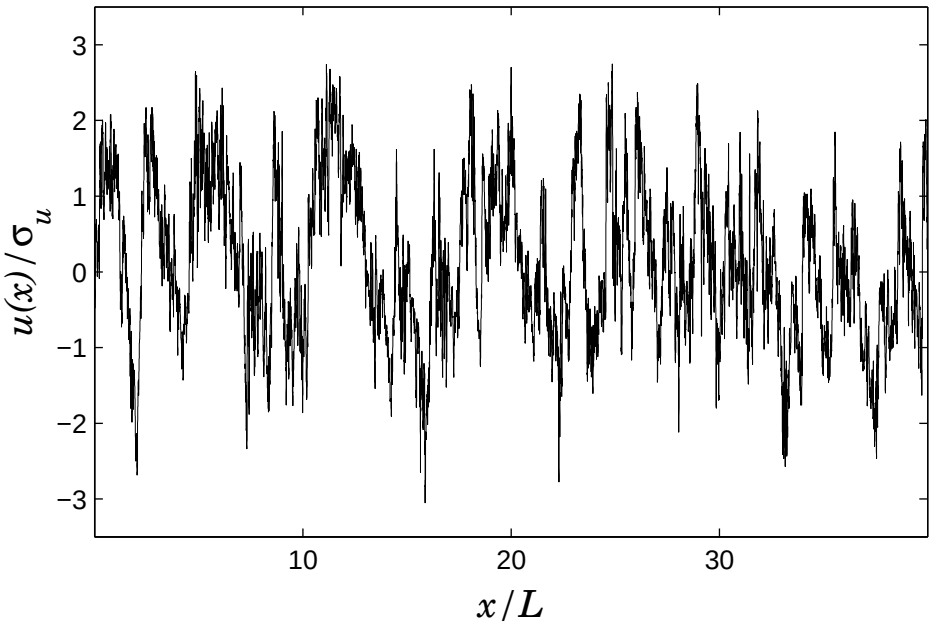

FIG. 1.1 – Profil spatial de la vitesse longitudinale $u(x)$, normalisée par son écart-type, enregistrée dans l'expérience de turbulence de jet de Baudet et Naert à l'ENS de Lyon ($\mathbb{R}_\lambda = 380$).

De plus, en supposant un comportement trivial[1] pour la dissipation, on en déduit le comportement des fonctions de structure $M_q(l)$,

$$M_q(l) = \langle \delta_l u^q \rangle \ \sim \ \langle \epsilon \rangle^{\frac{q}{3}} l^{\frac{q}{3}} \sim l^{\zeta_q^E} \quad \text{avec} \quad \zeta_q^E = \frac{q}{3} \ . \tag{1.3}$$

Dans le langage des singularités [1, 45], un spectre $\zeta_q^E = q/3$ linéaire correspond un exposant de Hölder $h = 1/3$ unique, et on peut montrer que le spectre de puissance $E(k)$ décroit comme $k^{-5/3}$. Ces comportements en loi de puissance reflètent l'invariance d'échelle du signal turbulent dans le domaine inertiel. Ce domaine d'échelles ne dépend que de l'échelle intégrale L du fluide et d'une vitesse caractéristique, typiquement l'écart-type[2] de l'incrément de vitesse à cette échelle : $\sigma = \sqrt{\langle (\delta_L u)^2 \rangle}$. Valable à toute échelle l, la relation dimensionnelle (1.2) implique que

$$\epsilon \sim \frac{\sigma^3}{L} \ , \tag{1.4}$$

[1] La théorie K41 consiste à supposer que la dissipation ne fluctue pas, et qu'en conséquence, on peut écrire que $\langle \epsilon^q \rangle = \langle \epsilon \rangle^q = \epsilon^q$.

[2] Comme nous le verrons dans la suite, l'échelle intégrale L de l'écoulement, échelle caractéristique de l'injection de l'énergie, est très proche de la longueur de décorrélation de la vitesse. Ainsi, l'écart-type σ de l'incrément à l'échelle intégrale vaut approximativement $\sqrt{2}\sigma_u$, où $\sigma_u = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ est l'écart-type de la vitesse.

indépendamment de la viscosité ν et donc du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$, que nous définissons de la manière suivante :

$$\mathbb{R}_e = \frac{\sigma L}{\nu} \ . \tag{1.5}$$

La viscosité intervient seulement dans l'expression dimensionnelle des grandeurs dissipatives, telle que l'échelle de Kolmogorov $\eta_K \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. D'après les relations (1.4) et (1.5), celle-ci est complètement déterminée par l'échelle intégrale L et le nombre de Reynolds,

$$\eta_K \sim L\mathbb{R}_e^{-3/4} \ . \tag{1.6}$$

Expérimentalement, les seules mesures auxquelles nous aurons accès sont des mesures temporelles effectuées en un point fixe de l'écoulement, par exemple à la sortie d'une soufflerie ou d'un jet pour lesquels la vitesse moyenne du fluide U est non nulle. L'hypothèse de turbulence *gelée*, dite de Taylor [1, 2], permet de réinterpréter ces mesures temporelles comme des mesures spatiales. En effet, dans le référentiel qui se meut à la vitesse U supposée très grande, la sonde (en général un fil chaud) qui est fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace à une vitesse très grande $-U$, de telle sorte que le champ de vitesse vu par cette sonde n'évolue pas de façon appréciable durant le temps de mesure. En définissant par u' la vitesse du fluide dans le référentiel du laboratoire et u celle dans le référentiel de l'écoulement moyen, l'hypothèse de Taylor consiste à assimiler :

$$u'(x, t+\tau) \approx u(x - U\tau, t) \ , \forall \tau > 0 \ . \tag{1.7}$$

Remarquons que cette approximation est valable tant que les fluctuations de vitesse restent négligeables devant la vitesse moyenne du fluide, c'est-à-dire, pour un *taux* de turbulence I faible,

$$I = \frac{\sigma_u}{U} = \frac{\sqrt{\langle (u-U)^2 \rangle}}{U} \ll 1 \ . \tag{1.8}$$

L'échelle intégrale, présente dans la définition du nombre de Reynolds (Eq. (1.5)), est une échelle difficile à mesurer car définie comme une échelle caractéristique de l'injection d'énergie. Expérimentalement, il est plus commode de définir un nombre de Reynolds à une échelle plus petite, de façon à être non pollué par les phénomènes d'anisotropie présents aux grandes échelles [38–41] (postulat d'isotropie statistique de Kolmogorov). Cette échelle est l'échelle dite de Taylor, notée λ, définie à partir des grandeurs intrinsèques du signal :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sigma_u^2}{\langle (\partial_x u(x))^2 \rangle} \ . \tag{1.9}$$

Le nombre de Reynolds construit à cette échelle s'écrit :

$$\mathbb{R}_\lambda = \frac{\sigma_u \lambda}{\nu} \ . \tag{1.10}$$

De manière phénoménologique, en s'aidant de la relation (1.4) et d'une approximation de la dissipation $\epsilon \sim \nu\langle(\partial_x u)^2\rangle$, on peut montrer que

$$\mathbb{R}_\lambda \sim \sqrt{\mathbb{R}_e} \ . \tag{1.11}$$

Dans ce chapitre, nous étudierons les statistiques de signaux expérimentaux de vitesse Eulérienne obtenus sous l'hypothèse de Taylor. Ces signaux sont issus des travaux de Chanal et collaborateurs [15], qui ont mesuré dans un jet d'hélium froid, la vitesse pour plusieurs nombre de Reynolds $\mathbb{R}_\lambda = 89, 208, 463, 723$ et 929. Nous aurons aussi à notre disposition les signaux de Baudet et Naert [10–13] dans un jet d'air, $\mathbb{R}_\lambda = 380$, ainsi que ceux de l'équipe de Gagne [9, 92] à la soufflerie de Modane pour un nombre de Reynolds très grand, $\mathbb{R}_\lambda \approx 2500$. La simulation directe des équations de Navier-Stokes (DNS pour *Direct Numerical Simulation*) est une alternative aux signaux expérimentaux et permet un accès immédiat aux profils spatiaux de vitesse Eulérienne. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la limitation des DNS provient du fait qu'il faille résoudre les échelle dissipatives. Ainsi, le volume de résolution de la simulation doit être de l'ordre de $\eta_K^3 \sim \mathbb{R}_e^{-9/4}$ (Eq. (1.6)). Nous effectuerons une analyse statistique des données numériques obtenues par Lévêque [105] en DNS avec la résolution 256^3 ($\mathbb{R}_\lambda = 140$). Nous disposerons ainsi des trois composantes de la vitesse pour plusieurs temps de *retournements*, l'équivalent temporel de l'échelle de longueur intégrale L.

L'analyse des signaux de vitesse turbulente sur toute la gamme d'échelles disponible, et plus précisemment dans le domaine inertiel, met clairement en évidence un écart aux prédictions de Kolmogorov en 1941 [60]. Plus précisément, le spectre ζ_q^E des exposants des fonctions de structure mesuré, est inconstablement non linéaire et dévie significativement spectre linéaire $\zeta_q^E = q/3$ (Eq. (1.3)) prédit par le modèle *monofractal* de **K41**. Ainsi, les statistiques de la vitesse à travers les échelles se révèlèrent être *multifractales*, ou **intermittentes**, et les fonctions de structures présentent des comportements en loi de puissance dits *anormaux*, dans le sens où les exposants ζ_q^E diffèrent du comportement linéaire K41. Traditionnellement [8], l'étude statistique des profils spatiaux de vitesse consiste en l'estimation des exposants du comportement en loi de puissance des fonctions de structure $M_q(l)$ en fonction de l'échelle l, ce qui revient à mesurer la pente du logarithme d'une fonction de structure en fonction du logarithme de l'échelle dans le domaine inertiel ($l \in [\eta_K, L]$). Une autre méthode possible consiste à fixer par exemple[3] $\zeta_3^E = 1$, et à mesurer de manière relative les exposants ζ_q^E par rapport à $\zeta_3^E = 1$ en représentant $\ln M_q(l)$ en fonction de $\ln M_3(l)$ [10, 57–59, 76]. Cette procédure alternative basée sur l'hypothèse d'auto-similarité étendue (ESS pour *Extended Self-similarity*), présente l'avantage de s'affranchir d'éventuels écarts au comportement en loi de puissance observés dans les fonctions de structure aux grandes échelles.

[3] En cohérence avec la relation de Karman-Howarth [3] qui stipule que $\langle(\delta_l u)^3\rangle \propto l$.

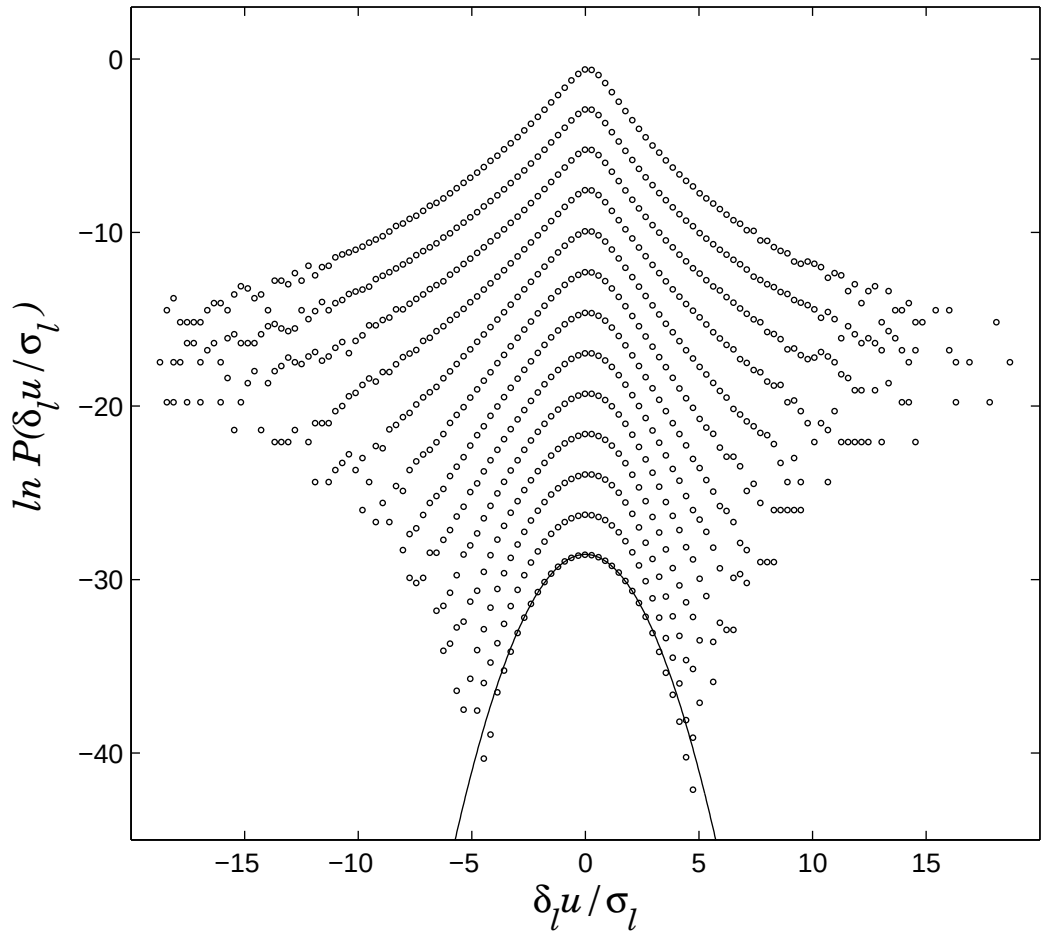

FIG. 1.2 – Densité de probabilité $\mathcal{P}(\delta_l u)$ des incréments de vitesse Eulérienne sur les signaux expérimentaux de Baudet et Naert ($\mathbb{R}_\lambda = 380$). Les densités sont normalisées et une variance unité est imposée à chaque échelle. Les densités obtenues aux échelles (respectivement de haut en bas) $l/L = 0.00092, 0.0018, 0.0035, 0.0070, 0.014, 0.028, 0.056, 0.12, 0.22, 0.44, 0.8$ et 1, ont été décalées arbitrairement en ordonnée par souci de clarté. Pour $l = L$, nous avons tracé en trait continu la densité Gaussienne de variance unité : $\mathcal{P}(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$.

Le phénomène d'intermittence est donc mis en évidence à travers la non linéarité du spectre ζ_q^E. De manière plus directe, et sans présupposer un comportement en loi de puissance pour les fonctions de structure, le phénomène d'intermittence est responsable de la déformation des densités de probabilité des incréments de vitesse à travers les échelles $\mathcal{P}(\delta_l u)$ [9, 92–98, 132–134]. Comme nous le voyons sur la figure 1.2, $\mathcal{P}(\delta_l u)$ est de forme Gaussienne à l'échelle intégrale L. Lorsque l'échelle l diminue, la densité de probabilité se déforme continûment, et dévie fortement du cas Gaussien. Nous constatons ainsi que les évènements *violents*, c'est-à-dire ceux tels que $\delta_l u$ atteint plusieurs fois l'écart-type, sont

d'autant plus probables que l'échelle de l'incrément l est petite. Ainsi, le signal de vitesse présente des *bouffées* intermittentes, dans lesquelles la vitesse varie de façon brutale sur une distance l faible. C'est aussi pour cette raison que la dissipation (Eq. (1.1)), approximée par le carré de la dérivée de la vitesse longitudinale [1], présente elle-même des variations violentes. La figure 1.2 met aussi en évidence la dissymétrie des densités de probabilité, qui s'interprète comme le fait que les incréments négatifs de vitesse longitudinale sont plus probables que les positifs. C'est le phénomène dit de **Skewness** [1–3, 5], qui caractérise, contrairement au cas Gaussien, le fait que les moments (ou fonctions de structure) impairs sont non nuls, $\langle(\delta_l u)^{2q+1}\rangle < 0$ dans le domaine inertiel ($l \in [\eta_K, L]$).

Chapitre 2

Le domaine inertiel

2.1 Spectre des exposants ζ_q^E : description log-normale de Kolmogorov et Obukhov

De manière générale, le signal de vitesse longitudinale présente des propriétés d'invariance d'échelle, et on s'attend à ce que les fonctions de structures se comportent en loi de puissance :

$$M_q(l) = \langle (\delta_l u)^q \rangle \sim l^{\zeta_q^E} \ . \tag{2.1}$$

Dès 1962, Kolmogorov [43] et Obukhov [44] ont proposé un modèle non linéaire quadratique pour le spectre des exposants ζ_q^E, le modèle **log-normal**,

$$\zeta_q^E = c_1 q - c_2 \frac{q^2}{2} \ , \tag{2.2}$$

basé sur l'observation de fluctuations non triviales de la dissipation. Le coefficient c_2 est appelé le coefficient d'**Intermittence** car il rend complètement compte de la non linéarité du spectre. Comme nous le verrons par la suite, le coefficient du terme linéaire $c_1 \approx 1/3$ se révèlera être très proche des prédictions dimensionnelles de Kolmogorov (K41). Ces deux coefficients sont en fait contraints par la condition $\zeta_3^E = 1$, relation exacte issue des équations de Navier-Stokes, plus communément connue sous le nom de **loi des 4/5** [1, 3, 5] :

$$\lim_{l \to 0} \lim_{\nu \to 0} \frac{\langle (\delta_l u)^3 \rangle}{l} = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle \ . \tag{2.3}$$

Ils vérifient ainsi la relation :

$$c_1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} c_2 \ . \tag{2.4}$$

L'ensemble des données expérimentales et numériques est compatible avec un coefficient d'intermittence universel [15, 60, 79, 80, 102] :

$$c_2 = 0.025 \pm 0.003 \ , \tag{2.5}$$

c'est-à-dire indépendant du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$; via la relation (2.4), cela conduit à la valeur :

$$c_1 = 0.37 \pm 0.003 \ . \tag{2.6}$$

Le comportement intermittent des fluctuations de vitesse à travers les échelles l s'explique, dans le cadre des travaux de Kolmogorov [43] et Obukhov [44], par une généralisation de la relation dimensionnelle (1.2), communément appelée *hypothèse de similarité raffinée* (RSH pour *Refined Similarity Hypothesis*) [1–3, 111, 135, 136],

$$(\delta_l u)^q \sim l^{\frac{q}{3}} \epsilon_l^{\frac{q}{3}} \ , \tag{2.7}$$

qui prend désormais en compte les fluctuations de la dissipation ϵ_l moyennée sur une boule de taille l. Ainsi, si $\vec{r}$ désigne un point de l'espace,

$$\epsilon_l(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi l^3} \int_{|\vec{r}'-\vec{r}|<l} \epsilon(\vec{r}') d^3r' \tag{2.8}$$

est une quantité qui *a priori* va dépendre du point où est centrée la boule de taille l. Kolmogorov et Obukhov présupposent l'invariance d'échelle de la dissipation moyennée à l'échelle l, au travers du spectre d'exposants τ_q^E :

$$\langle (\epsilon_l)^q \rangle \sim l^{\tau_q^E} \ . \tag{2.9}$$

Via la relation (2.7), on en déduit la relation suivante entre les exposants ζ_q^E et τ_q^E [1, 111, 135] :

$$\zeta_q^E = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}^E \ . \tag{2.10}$$

Cette relation permet d'expliquer le comportement *anormal*[1] des fluctuations de vitesse à travers les échelles, à partir des fluctuations de la dissipation[2].

Dans leur travail de pionniers, Kolmogorov [43] et Obukhov [44] proposèrent une statistique log-normale[3] pour ϵ_l, et ce pour toutes les échelles inertielles ($l \in [\eta_K, L]$) :

$$\mathcal{P}_{\epsilon_l}(\epsilon_l) d\epsilon_l = \mathcal{P}_{\ln \epsilon_l}(\ln \epsilon_l) d \ln \epsilon_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l^2}} \exp\left[\frac{(\ln \epsilon_l - \mathrm{m}_l)^2}{2\sigma_l^2} \right] d \ln \epsilon_l \ , \tag{2.11}$$

[1] C'est-à-dire intermittent.

[2] Dans le cadre monofractal de la théorie K41, les fluctuations de ϵ_l sont indépendantes de l'échelle l, ce qui implique $\tau_q^E = 0$, $\forall q$. On retrouve donc bien un spectre $\zeta_q^E = q/3$ linéaire.

[3] Cette hypothèse n'est pas tellement restrictive, souligne Obukhov [44], puisque la variable aléatoire ϵ_l est strictement positive (Eqs. (1.1) et (2.8)). En effet, toute variable aléatoire positive peut être approximée, au moins pour ses deux premiers moments, par une variable log-normale.

où les paramètres m_l et σ_l^2 définissent respectivement la moyenne et la variance de $\ln \epsilon_l$. Les moments de la variable aléatoire ϵ_l se déduisent naturellement de l'expression de la densité de probabilité (Eq. (2.11)) :

$$\langle (\epsilon_l)^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\epsilon_l)^q \mathcal{P}_{\ln \epsilon_l}(\ln \epsilon_l) d \ln \epsilon_l = \exp \left[\frac{1}{2} q \left(q\sigma_l^2 + 2m_l \right) \right] \ . \tag{2.12}$$

D'après les relations (1.1) et (2.8), la dissipation locale ϵ et la dissipation moyennée ϵ_l sur une boule de taille l sont égales en moyenne, ce qui permet de déduire l'équation :

$$m_l = \ln \langle \epsilon \rangle - \frac{\sigma_l^2}{2} \ . \tag{2.13}$$

Finalement, nous voyons que la densité de probabilité proposée dans l'équation (2.11) ne dépend que d'un paramètre σ_l, et que les moments de ϵ_l sont donnés par la relation suivante :

$$\langle (\epsilon_l)^q \rangle = \langle \epsilon \rangle^q \exp \left[\frac{1}{2} q(q-1) \sigma_l^2 \right] \ . \tag{2.14}$$

Il suffit alors de choisir une variance σ_l^2 proportionnelle au logarithme de l'échelle pour obtenir des lois de puissance pour les moments de la dissipation (Eq. (2.9)) :

$$\sigma_l^2 = 9 c_2 \ln \frac{L}{l} \ , \tag{2.15}$$

où $c_2 > 0$ sera appelé le coefficient d'intermittence. L'équation (2.15) fait intervenir une échelle caractéristique L nécessaire pour adimensionaliser l'argument du logarithme. D'un point de vue formel, l'annexe A montre que la multifractalité impose l'existence d'une échelle caractéristique qui se révèle être, dans ce cas précis, une échelle intégrale. Plus simplement, la relation (2.15) n'est valable que pour les échelles $l \leq L$ ($\sigma_l^2 = 0$ pour les échelles $l \geq L$). Ainsi, on obtient bien un comportement en loi de puissance aux échelles $l \leq L$, pour les moments de la dissipation :

$$\langle (\epsilon_l)^q \rangle = \langle \epsilon \rangle^q \left(\frac{l}{L} \right)^{\tau_q^E} \ , \tag{2.16}$$

avec

$$\tau_q^E = \frac{9}{2} c_2 q(1-q) \ . \tag{2.17}$$

Le spectre ζ_q^E des exposants des fonctions de structure de la vitesse est alors obtenu en appliquant l'hypothèse de similarité raffinée (Eq. (2.10)) [1, 43, 44, 111, 135] :

$$\zeta_q^E = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} c_2 \right) q - c_2 \frac{q^2}{2} \ . \tag{2.18}$$

Remarquons qu'un coefficient d'intermittence nul, $c_2 = 0$, nous ramène bien à une description monofractale (K41) des fluctuations de vitesse dans les échelles, c'est-à-dire à un spectre linéaire $\zeta_q^E = q/3$ (Eq. (1.3)).

2.2 Spectre $\mathcal{D}^E(h)$ des singularités : formalisme multifractal

C'est en 1985 que Parisi et Frisch [45] proposèrent une nouvelle interprétation du phénomène d'intermittence dans le langage des singularités et du formalisme multifractal [1, 46–49]. Le cadre général de l'analyse des singularités d'une distribution par la transformation en ondelettes (généralisation de la notion d'incrément) est présenté dans les annexes B et C [98, 112–115]. Dans ces dernières références le lecteur trouvera une généralisation du formalisme multifractal aux distributions (mesures et fonctions incluses) à l'aide de la transformation en ondelettes. La notion de singularité s'applique naturellement au profil spatial de vitesse $u(x)$,

$$\delta_l u(x) = u(x+l) - u(x) \sim l^{h(x)} \text{ lorsque } l \to 0 \ , \tag{2.19}$$

avec un exposant de Hölder $h(x) = 1/3$ unique (indépendant de x) dans le cadre monofractal de la théorie **K41** [5]. Définissons le *spectre des singularités* $\mathcal{D}^E(h)$ comme suit :

$$\mathcal{D}^E(h) = d_F(\{x_0 \in \mathbb{R}/h(x_0) = h\}) \ , \tag{2.20}$$

où d_F symbolise la dimension fractale[4]. Toujours dans le cadre monofractal initié par Kolmogorov en 1941 [5], le signal unidimensionnel de vitesse longitudinale est singulier en chaque point avec un exposant de Hölder $h = 1/3$ unique, c'est-à-dire que pour tout x, l'incrément de vitesse sur une distance l, $\delta_l u(x)$ se comporte comme $l^{1/3}$. En d'autres termes, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}/h(x) = h\}$ est exactement égal à $\mathbb{R}$ pour $h = 1/3$, et le spectre $\mathcal{D}^E(h)$ se réduit à un point $\mathcal{D}^E(h = 1/3) = 1$ ($\mathcal{D}^E(h) = -\infty$ pour $h \neq 1/3$).

Le **formalisme multifractal** [45] consiste à associer une loi de probabilité à l'exposant h qui est désormais considéré comme une variable aléatoire. Ainsi, à l'échelle l, la probabilité $\mathbb{P}_l^i(h)$ que l'incrément de vitesse à cette échelle se comporte comme l^h, s'exprime en fonction de la dimension fractale de l'ensemble des points pour lesquels cette singularité est présente[5] :

$$\mathbb{P}_l(h) \sim l^{1-\mathcal{D}^E(h)} \ . \tag{2.21}$$

On remarque immédiatement que, dans le cadre monofractal K41, cette probabilité est indépendante de l'échelle et vaut 1 lorsque $h = 1/3$, et est nulle sinon. La multifractalité s'inscrit naturellement dans cette description puisqu'elle est directement reliée à la non unicité de l'exposant h. Ainsi, l'intermittence des fluctuations de vitesse se traduit par l'existence de plusieurs exposants (ou "forces") de singularité, auxquels sont attribués une probabilité. Comme nous le verrons, le signal de vitesse turbulente présente un **continuum** d'exposants de singularité $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$. Le formalisme multifractal repose donc sur une interprétation locale des propriétés d'invariance d'échelle du signal étudié via la notion

[4] Plus précisément la dimension de Haussdorf de l'ensemble concerné.

[5] $d = 1$ représente la dimension cartésienne de l'espace dans lequel nous nous plaçons, c'est-à-dire $d(\mathbb{R}) = 1$ dans notre cas.

(locale) d'exposant de Hölder $h(x)$ (Eq. (2.19)) qui fluctue d'un point à l'autre. Au cœur de ce formalisme est la **transformée de Legendre** suivante, qui permet de faire le lien statistique entre le comportement global en loi de puissance des fonctions de structure, et donc la forme du spectre ζ_q^E, avec le comportement singulier local du profil spatial de vitesse :

$$\zeta_q^E = \min_h \left[qh + 1 - \mathcal{D}^E(h) \right] \ . \tag{2.22}$$

Cette relation est obtenue en appliquant la méthode du col à l'expression intégrale des fonctions de structure dans la limite $l \to 0^+$:

$$\begin{aligned} M_q(l) = \langle (\delta_l u)^q \rangle &\sim l^{\zeta_q^E} \ , \\ &\sim \int l^{qh} \times l^{1-\mathcal{D}^E(h)} dh \ , \\ &\sim l^{\min_h \left[qh+1-\mathcal{D}^E(h) \right]} \ . \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nous nous limiterons à des formes de spectre $\mathcal{D}^E(h)$ et ζ_q^E continûment dérivables. Sous ces conditions, la transformée de Legendre (Eq. (2.22)) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} q & = d\mathcal{D}^E(h)/dh \ , \\ \zeta_q^E & = hq + 1 - \mathcal{D}^E(h) \ . \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Nous appelerons formalisme multifractal [1, 45–49, 98, 112–115] l'approche qui consiste à considérer le spectre $\mathcal{D}^E(h)$ des singularités comme la transformée de Legendre (inverse) du spectre ζ_q^E :

$$\mathcal{D}^E(h) = \min_q \left[1 + qh - \zeta_q^E \right] \ , \tag{2.25}$$

que l'on peut réécrire, lorsque ζ_q^E est continûment dérivable, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} h & = d\zeta_q^E/dq \ , \\ \mathcal{D}^E(h) & = 1 + qh - \zeta_q^E \ . \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Dans le cadre de la description log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44], la relation (2.26) permet de calculer le spectre des singularités associé au spectre quadratique donné par l'équation (2.2) :

$$\mathcal{D}^E(h) = 1 - \frac{(h - c_1)^2}{2c_2} \ . \tag{2.27}$$

2.3 Modélisation probabiliste des incréments de vitesse

2.3.1 Le Propagateur

Comme nous on peut le constater sur la figure 1.2, la densité de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse à l'échelle l, $\mathcal{P}_l(\delta_l u)$, dépend de l'échelle l, lorsque $l < L$. Pour les échelles plus grandes que l'échelle intégrale L, $\mathcal{P}_l(\delta_l u)$ est indépendante de l'échelle l

et se confond avec $\mathcal{P}_L(\delta_L u)$ qui se révèle être très proche d'une Gaussienne. Lorsque l'échelle l diminue, les densités de probabilité se déforment continûment, exhibant des queues de forme exponentielle "étirée" ($\ln \mathcal{P}_l(\delta_l u) \sim (\delta_l u)^{-\alpha}$ avec $\alpha < 2$, lorsque $\delta_l u$ est grand). Castaing et ses collaborateurs [9, 92–98] se sont intéressés tout particulièrement à l'évolution dans les échelles de la forme des fonctions de densité de probabilité des incréments. Ils ont ainsi proposé une description statistique de la turbulence pleinement développée au travers d'une équation fonctionnelle reliant les distributions de probabilité des incréments à deux échelles différentes. Cette description consiste à supposer que $\forall l$ et l' ($l' > l$), $\mathcal{P}_l(\delta_l u)$ peut s'exprimer en fonction de $\mathcal{P}_{l'}(\delta_{l'} u)$ de la façon suivante[6] :

$$\mathcal{P}_l(\delta_l u) = \int G_{ll'}(\ln \beta_{ll'}) \mathcal{P}_{l'}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_{ll'}}\right) \frac{d \ln \beta_{ll'}}{\beta_{ll'}} \ , \tag{2.28}$$

où le noyau (ou propagateur dans les échelles) $G_{ll'}$ dépend uniquement de l et l', et $\beta_{ll'} > 0$. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les mesures expérimentales montrent que la distribution des incréments à l'échelle intégrale L est Gaussienne. Il est ainsi possible de réécrire la relation (2.28) en utilisant comme référence la distribution des incréments à l'échelle intégrale $l' = L$. Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{P}_l(\delta_l u) = \int G_l(\ln \beta_l) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_l}\right) \frac{d \ln \beta_l}{\beta_l} \ , \tag{2.29}$$

où G_l est le propagateur entre les échelles L et l (l'indice L est omis dans la suite par souci de clarté), et $\mathcal{G}$ est la fonction Gaussienne de variance $\sigma^2 = \langle (\delta_L u)^2 \rangle$ et de moyenne nulle $m = \langle \delta_L u \rangle = 0$:

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \ . \tag{2.30}$$

Il est alors possible de calculer les moments d'ordre q quelconque des incréments de vitesse :

$$\begin{aligned}
\langle (\delta_l u)^q \rangle &= \int (\delta_l u)^q \mathcal{P}_l(\delta_l u) d\delta_l u \ , \\
&= \int (\delta_l u)^q d\delta_l u \int G_l(\ln \beta_l) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_l}\right) \frac{d \ln \beta_l}{\beta_l} \ , \\
&= \int X^q \mathcal{G}(X) dX \int \beta_l^q G_l(\ln \beta_l) d \ln \beta_l \ , \\
&= \langle \delta^q \rangle \langle \beta_l^q \rangle \ ,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

où δ est un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 (Eq. (2.30)) et où nous avons effectué le changement de variable $X = \delta_l u / \beta_l$ dans le calcul de l'intégrale double.

[6] Le fait que la relation (2.28) soit valable $\forall l$ et l' ($l' > l$) est relié à la propriété que la variable aléatoire $\delta_l u$ est *log-infiniment divisible* [95, 137, 138] lorsque l appartient au domaine inertiel. Nous verrons dans la suite que dans le domaine dissipatif, cette variable aléatoire perd cette propriété.

Nous voyons donc que l'approche du propagateur revient à considérer l'incrément de vitesse comme le produit de deux variables aléatoires **indépendantes** $\beta_l > 0$ et $\delta = \delta_L u$,

$$\delta_l u = \beta_l \times \delta \ , \tag{2.32}$$

avec $\delta \equiv \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ variable aléatoire normale et β_l une variable aléatoire positive dont le logarithme est de densité de probabilité $G_l(\ln \beta_l)$.

2.3.2 Propagateur et description log-normale

L'approche du propagateur permet de retrouver les statistiques log-normales pour la vitesse en cohérence avec les travaux de Kolmogorov [43] et Obukhov [44]. Il suffit pour cela de prendre une statistique log-normale pour la variable β_l, c'est-à-dire un propagateur Gaussien pour $\ln \beta_l$ de la forme [9, 79, 92, 95, 98] :

$$G_l(\ln \beta_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_l^2}} \exp\left[-\frac{(\ln \beta_l - m_l)^2}{2\lambda_l^2}\right] \ , \tag{2.33}$$

de paramètres m_l et λ_l^2 qui varient linéairement avec le logarithme de l'échelle, pour les échelles l plus petites que l'échelle intégrale L :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_l = c_1 \ln(l/L) \ , \\ \lambda_l^2 = -c_2 \ln(l/L) \ , \end{array} \right. \tag{2.34}$$

où c_1 et c_2 sont positifs. La relation (2.29) permet de calculer les moments des incréments de vitesse :

$$\langle (\delta_l u)^q \rangle = \langle \delta^q \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_l^q G_l(\ln \beta_l) d\ln \beta_l = \langle \delta^q \rangle \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_q^E} \ , \tag{2.35}$$

avec $\zeta_q^E = c_1 q - c_2 q^2/2$, en accord avec l'équation (2.2). Rappelons que les moments impairs de la Gaussienne sont nuls $\langle \delta^{2q+1} \rangle = 0$ puisque la densité de probabilité est symétrique par rapport à sa moyenne. Il est toutefois possible de calculer les moments pairs d'ordre $2q$ d'une variable Gaussienne δ de variance σ^2 ;

$$\langle \delta^{2q} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2q} \mathcal{G}(x) dx = (2q-1)!! \sigma^{2q} \ , \tag{2.36}$$

où l'on a introduit la notation $(2q-1)!! = (2q)!/(2^q q!)$. Ainsi, le propagateur log-normal ne rend pas compte du phénomène de Skewness [1–3, 5] lié à la valeur non nulle du moment d'ordre 3 de l'incrément[7] (Eq. (2.3)). La relation (2.36) se généralise aux moments d'ordre q quelconque de $|\delta|$

$$\langle |\delta|^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^q \mathcal{G}(x) dx = \frac{2^{q/2} \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sigma^p \ , \tag{2.37}$$

où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x} t^{x-1} dx$ est la généralisation de la fonction factorielle.

[7] Nous reviendrons sur ce point dans la partie du manuscrit (Section 3.6) consacrée au phénomène de skewness. Nous verrons qu'il est possible de rendre compte de ce phénomène, en conservant l'indépendance de β_l et δ (Eq. (2.32)). En fait l'asymétrie des densités de probabilité des incréments de vitesse illustrée dans la figure 1.2, sera introduite dans la modélisation de la densité de probabilité de δ.

2.3.3 Propagateur et formalisme multifractal

La variable β_l étant positive, on est tenté, en s'inspirant du formalisme multifractal, de faire le changement de variable

$$\beta_l = \left(\frac{l}{L}\right)^h \Leftrightarrow h = \frac{\ln \beta_l}{\ln(l/L)} \ . \tag{2.38}$$

Nous pouvons ainsi réécrire le propagateur log-normal (Eq. (2.33)) avec les paramètres m_l et λ_l définis dans l'équation (2.34), ce qui permet de calculer la fonction densité de probabilité de l'exposant h :

$$\mathbb{P}_l(h)dh = G_l(\ln \beta_l) d\ln \beta_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{c_2}{\ln(L/l)}}} \left(\frac{l}{L}\right)^{\frac{(h-c_1)^2}{2c_2}} dh \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} dh \ , \tag{2.39}$$

où $\mathcal{D}^E(h)$ a la forme (Eq. (2.27)) du spectre des singularités du modèle log-normal de Kolmogorov [43] et Obukhov [44]. Nous voyons donc que l'approche du propagateur (Eqs. (2.28) et (2.29)) [9, 92–98] est équivalente à une description de l'incrément comme le produit de deux variables aléatoires $\beta_l > 0$ et δ indépendantes (Eq. (2.32)), où β_l peut être réécrite sous la forme $\beta_l = (l/L)^h$, où h est une variable aléatoire stochastique de densité $\mathbb{P}_l(h) \sim (l/L)^{1-\mathcal{D}^E(h)}$, dont la dépendance dans l'échelle l est controlée par la fonction $D^E(h)$ qui sera assimilée au spectre des singularités du signal de vitesse dans la limite $l/L \to 0$.

2.3.4 Propagateur et développement en cumulants

La notion de propagateur est directement reliée au développement en cumulants présenté dans l'Annexe D [9, 79, 80, 92, 95, 139]. Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, le propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ est interprété comme la densité de probabilité de la variable aléatoire $\ln \beta_l$. L'incrément de vitesse s'exprime comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes, $\delta_l u = \beta_l \delta$, où δ est Gaussienne de variance $\mathrm{Var}(\delta) = \sigma^2 = \mathrm{Var}(\delta_L u)$. Ainsi les cumulants $C_{n,\delta_l u}$ de $\ln|\delta_l u|$ s'expriment comme la somme des cumulants de $\ln \beta_l$ et de $\ln|\delta|$:

$$C_{n,\delta_l u}(l) = C_{n,\beta_l}(l) + C_{n,\delta} \ . \tag{2.40}$$

La moyenne et la variance de $\ln|\delta_l u|$ sont donc reliées à la moyenne et à la variance de $\ln \beta_l$, c'est-à-dire à la moyenne et à la largeur à mi-hauteur du propagateur $G_l(\ln \beta_l)$:

$$\begin{aligned} C_{1,\beta_l} &= \langle \ln \beta_l \rangle = C_{1,\delta_l u}(l) - C_{1,\delta} = \int \ln \beta_l G_l(\ln \beta_l) d\ln \beta_l \ , \\ C_{2,\beta_l} &= \mathrm{Var}(\ln \beta_l) = C_{2,\delta_l u}(l) - C_{2,\delta} = \int (\ln \beta_l)^2 G_l(\ln \beta_l) d\ln \beta_l - (C_{1,\beta_l})^2 \ . \end{aligned} \tag{2.41}$$

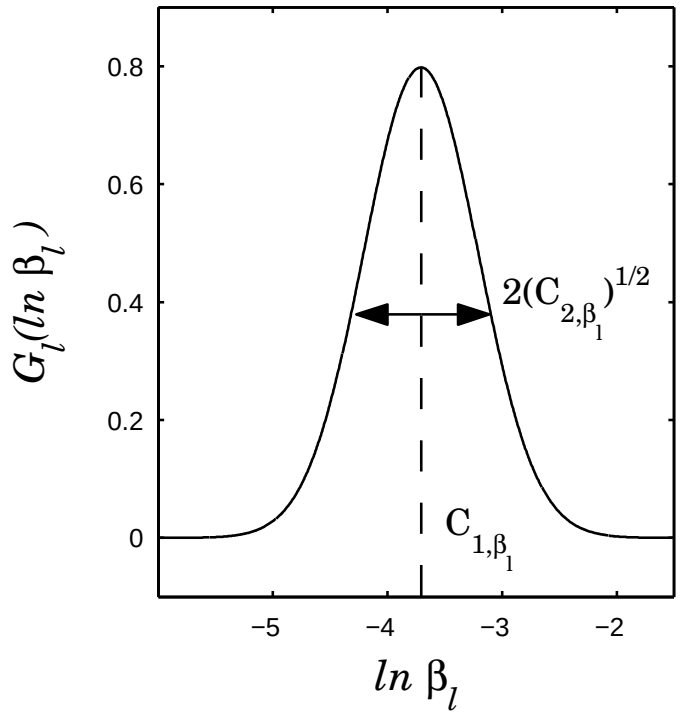

FIG. 2.1 – Représentation de la densité de probabilité $G_l(\ln \beta_l)$ de $\ln \beta_l$, appellée propagateur (Eq. (2.29)) à une échelle l. Dans cet exemple, nous avons utilisé le propagateur log-normal, donné par la relation (2.33), pour le jeu de paramètres $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$ et $c_2 = 0.025$ (Eq. (2.34)). L'échelle utilisée est $l/L \approx 10^{-4.34}$. Dans le cadre log-normal, cette densité est centrée sur le cumulant d'ordre 1, $C_{1,\beta_l} = c_1 \ln(l/L)$, et sa largeur à mi-hauteur est égale à deux fois l'écart-type, soit $2\sqrt{C_{2,\beta_l}}$, où $C_{2,\beta_l} = -c_2 \ln(l/L)$.

Les cumulants d'ordre supérieur sont donnés par l'équation (D.5) en annexe D, l'équation (D.7) correspond aux cumulants de la Gaussienne. Ce résultat est illustré dans la figure 2.1. Le fait que le propagateur soit centré en C_{1,β_l} et que sa largeur à mi-hauteur soit $2\sqrt{C_{2,\beta_l}}$ est exact dans le cadre du modèle log-normal, et constitue une bonne approximation pour l'ensemble des données expérimentales de vitesse Eulérienne [15, 79, 80, 102, 140]. Retenons simplement que la largeur non nulle du propagateur est liée au phénomène d'intermittence, et que dans une première approche, nous caractériserons cette largeur par l'écart-type du propagateur, qu'il soit log-normal ou autre (par exemple log-Poisson [51–53]).

2.3.5 Le nombre de Reynolds local

Il est possible de définir un nombre sans dimension formé à partir des grandeurs caractéristiques de l'écoulement à l'échelle intégrale L, à savoir une vitesse caractéristique $\sigma = \sqrt{(\delta_L u)^2}$ et la viscosité ν. On obtient ainsi le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e = \sigma L/\nu$ (Eq.

(1.5)). De la même manière, on peut définir un nombre sans dimension à une échelle l plus petite que l'échelle intégrale. Phénoménologiquement, ce nombre sera formé des grandeurs caractéristiques à cette échelle, à savoir une vitesse caractéristique $\sigma\beta_l$, l'échelle l et la viscosité ν. On obtient ainsi le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ à l'échelle l [48, 50, 62, 111] :

$$\mathbb{R}_l = \frac{\sigma\beta_l l}{\nu} = \beta_l \left(\frac{l}{L}\right) \mathbb{R}_e \ . \tag{2.42}$$

Ce nombre est local dans le sens où au travers de β_l, il dépend de l'espace[8]. En fait il s'agit d'une variable aléatoire qui peut être caractérisée par ses moments :

$$\langle (\mathbb{R}_l)^q \rangle = (\mathbb{R}_e)^q \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_q^E + q} \ . \tag{2.43}$$

Remarquons que dans le cadre monofractal de **K41**, $\beta_l = (l/L)^{1/3}$ est déterministe et ne dépend pas de l'espace ; en conséquence $\mathbb{R}_l$ n'en dépend pas non plus. Dans le langage des singularités [1, 45, 62], nous pouvons réécrire le nombre de Reynolds local en fonction de l'exposant de Hölder $h(x)$ de la façon suivante :

$$\mathbb{R}_l(x) = \left(\frac{l}{L}\right)^{h(x)+1} \mathbb{R}_e \ . \tag{2.44}$$

Le nombre de Reynolds caractérise la "complexité" du fluide. A l'échelle intégrale L l'écoulement est complètement imprédictible, et peut être assimilé à un bruit blanc : le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ est grand. En d'autres termes, la vitesse au point $x + L$ est complètement indépendante de celle au point x. Le nombre Reynolds local $\mathbb{R}_l$ diminue avec l'échelle l (Eq. (2.42)), le fluide à petite échelle est moins complexe : la vitesse au point $x + l$, $u(x + l)$, dépend fortement de la vitesse $u(x)$, ce qui est à relié au fait que la vitesse est corrélée à *longue portée* comme nous le discuterons dans la quatrième partie de ce manuscrit consacrée aux statistiques d'ordre supérieur et aux corrélations à longue portée.

2.3.6 Dépendance du propagateur dans le nombre de Reynolds local

Comme nous venons de le voir, la notion d'intermittence est liée à la largeur du propagateur $G_l(\ln \beta_l)$. Le cumulant d'ordre 2, $C_{2,\beta_l}(l)$ caractérise totalement l'intermittence dans un cadre log-normal ($c_2 \neq 0$ et $c_n = 0, \forall n > 2$). Dans d'autres descriptions plus générales (log-Poisson, ...), $C_{2,\beta_l}(l)$ fournit en général une bonne approximation de ce phénomène ($c_2 \neq 0$ et $\forall n > 2$, $|c_n| \ll c_2$) [15, 79, 95, 98, 102, 141]. L'approche du propagateur permet d'expliquer la déformation des densités de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse dans les échelles (Fig. 1.2). La figure 2.2 permet de se représenter l'évolution de ces densités

[8] $\beta_l(x)$ dépend de l'espace au travers de l'exposant $h(x)$: $\beta_l(x) = (l/L)^{h(x)}$ (Eq. (2.38)).

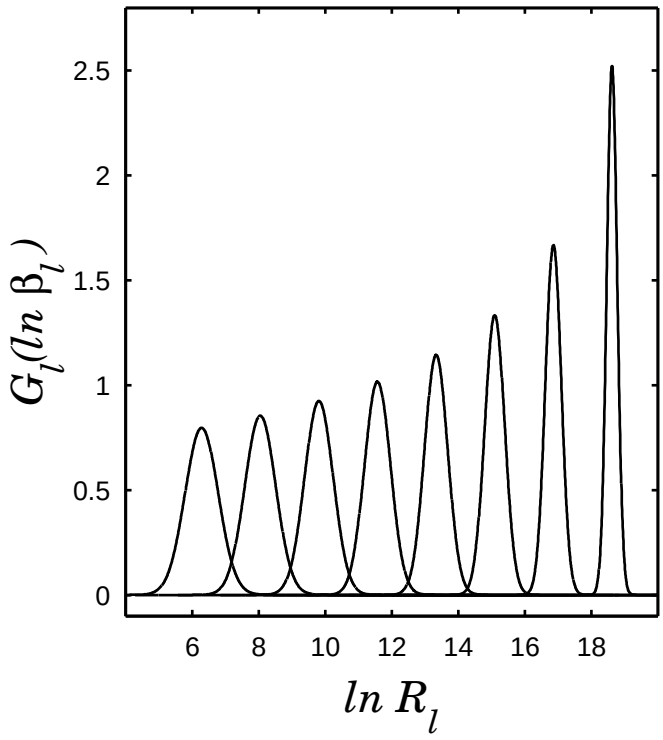

FIG. 2.2 – Représentation de la densité de probabilité de $\ln \beta_l$ (ou propagateur) en fonction du logarithme du nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ (Eq.(2.42)) pour différentes échelles l. Dans cet exemple, nous avons utilisé le propagateur log-normal, donné par la relation (2.33), avec le même jeu de paramètres que dans la figure 2.1. Les échelles utilisées sont (de gauche à droite) $\log_{10}(l/L) = -4.3429, -3.7846, -3.2262, -2.6678, -2.1094, -1.5511, -0.9927$ et -0.4343. Le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ qui intervient dans la définition du nombre de Reynolds local vaut $\mathbb{R}_e = \exp(20)$.

à travers la dépendance du propagateur log-normal[9] $G_l(\ln \beta_l)$ en fonction du logarithme du nombre de Reynolds local, $\ln \mathbb{R}_l = \ln \beta_l + \ln(\mathbb{R}_e l/L)$ (Eq. (2.42)). Lorsque $\mathbb{R}_l = \mathbb{R}_e$, c'est-à-dire à l'échelle intégrale L, le propagateur a une largeur nulle ($C_{2,\beta_L}(L) = 0$), c'est un pic de Dirac. Lorsque l'échelle diminue, la largeur augmente comme la racine carrée du logarithme de l'échelle ($C_{2,\beta_l}(l) = -c_2 \ln(l/L)$). Le maximum[10] du propagateur, lié à la valeur la plus probable de $\ln \beta_l$, se situe en $\langle \ln \mathbb{R}_l \rangle \approx C_{1,\beta_l} + \ln(\mathbb{R}_e l/L)$ et se déplace à la "vitesse"

$$\frac{\partial \langle \ln \mathbb{R}_l \rangle}{\partial \ln(l/L)} \approx c_1 + 1 \ , \tag{2.45}$$

[9]On rappelle que la forme précise du propagateur n'est pas importante ici, puisqu'on s'intéresse de manière générale à un propagateur qui a une largeur non-nulle. Le modèle log-normal est le modèle le plus simple qui présente un $C_{2,\beta_l}(l) \neq 0$.

[10]Ce maximum est obtenu pour $\ln \beta_l^* \approx C_{1,\beta_l}$; l'égalité est exacte dans le cadre log-normal.

dans une représentation en fonction de $\ln \mathbb{R}_l$ (et à la "vitesse" c_1 dans la représentation en fonction de $\ln \beta_l$). Cette "vitesse" du maximum du propagateur quantifie la dérive (terme de "drift") dans la modélisation par une équation de Langevin du processus $\ln \beta_l$ d'évolution à travers les échelles [13, 142–144]. Cette vision générale de l'intermittence basée sur l'évolution du propagateur dans les échelles en fonction du nombre de Reynolds local, reste à ce niveau esthétique mais se révèlera par la suite riche de physique puisque, comme nous le verrons, les effets dissipatifs seront entièrement caractérisés par le nombre de Reynolds local.

2.4 Analyse en cumulants des données expérimentales et numériques d'incréments longitudinaux de vitesse

Nous présentons dans la figure 2.3 l'estimation des cumulants (Annexe D) de $\ln \beta_l$ à partir des profils longitudinaux de vitesse obtenus en laboratoire sous l'hypothèse de Taylor ou simulés par résolution directe des équations de Navier-Stokes (DNS). Nous étudions ici les signaux expérimentaux issus des différents groupes suivants :

- Baudet et Naert [10–13, 142] au laboratoire de physique de l'ENS de Lyon : jet d'air pour un nombre de Reynolds $\mathbb{R}_\lambda = 380$;
- Chanal *et al.* [15] au Centre de Recherche sur les Très Basses Températures (CRTBT) à Grenoble : jet d'helium à basse température ($\nu(T) \to 0$ quand $T \to T_c$ (Température critique) et donc $\mathbb{R}_\lambda \to +\infty$) pour quatre nombres de Reynolds $\mathbb{R}_\lambda = 208, 463, 703$ et 929 ;
- Gagne *et al.* à la soufflerie de Modane [9, 92, 102] : très haut nombre de Reynolds $\mathbb{R}_\lambda = 2500$.

Nous présentons aussi les résultats obtenus avec les signaux numériques de Lévêque à $\mathbb{R}_\lambda = 140$, avec une résolution de 256^3, les moyennes étant effectuées sur plusieurs temps de retournement. Etant donné que l'étendue du domaine inertiel croît comme une puissance du nombre de Reynolds ($\sim \mathbb{R}_e^{3/4}$), il est opportun de renormaliser les cumulants par $\ln \mathbb{R}_e$ comme cela est fait sur la figure 2.3, où $C_{n,\beta_l}/\ln \mathbb{R}_e$ est représenté en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$, de telle sorte que les échelles du domaine inertiel soient indépendantes du nombre de Reynolds[11]. Le nombre de Reynolds (Eq. (1.5)), caractérise la complexité du fluide à grande échelle. Expérimentalement, il est plus pratique de calculer le nombre de Reynolds à l'échelle de Taylor $\mathbb{R}_\lambda$ (Eqs. (1.9) et (1.10)). Dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope, il est possible d'approximer la dissipation locale (Eq. (1.1)) par les statisques du gradient longitudinal de la vitesse [1, 145, 146] :

$$\epsilon \approx 15\nu\langle(\partial_x u)^2\rangle \ , \tag{2.46}$$

et qui, dimensionnellement, se comporte comme

$$\epsilon \sim \sigma^3/L \ . \tag{2.47}$$

[11] Dans cette représentation, le domaine inertiel au sens de Kolmogorov est le domaine $[-3/4; 0]$, indépendemment du nombre de Reynolds.

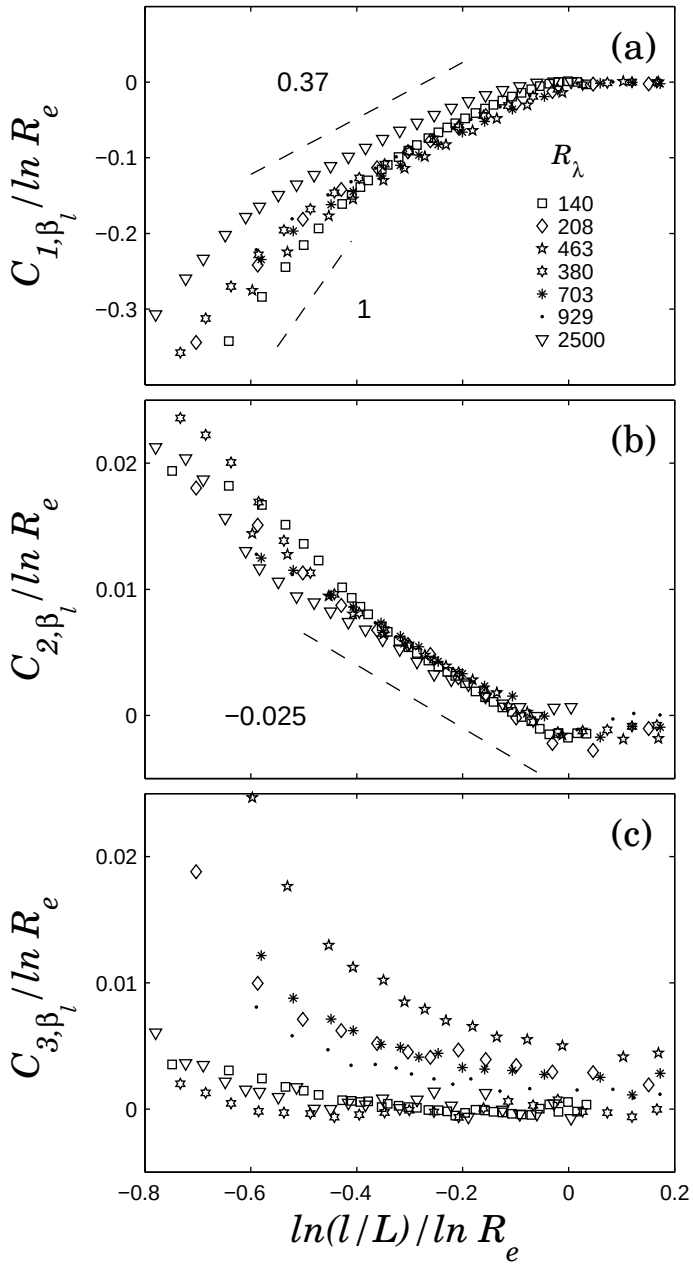

FIG. 2.3 – Représentation des trois premiers cumulants de $\ln \beta_l$, normalisés par $\ln \mathbb{R}_e$ via la relation (2.48) : (a) $C_{1,\beta_l} = \langle \ln |\delta_l u| \rangle - \langle \ln |\delta_L u| \rangle$; (b) $C_{2,\beta_l} = \mathrm{Var}(\ln |\delta_l u|) - \mathrm{Var}(\ln |\delta_L u|)$; (c) C_{3,β_l} donné par l'équation (D.5), où $\delta_l u$ est l'incrément longitudinal de vitesse mesuré dans différentes géométries et à des nombres de Reynolds différents (jet d'air $\mathbb{R}_\lambda = 380$; jet d'hélium $\mathbb{R}_\lambda = 208, 463, 703, 929$; soufflerie $\mathbb{R}_\lambda = 2500$; DNS $\mathbb{R}_\lambda = 140$).

Cette analyse rapide permet d'établir un lien entre le nombre de Reynolds à l'échelle intégrale $\mathbb{R}_e$ et le nombre de Reynolds à l'échelle de Taylor $\mathbb{R}_\lambda$:

$$\mathbb{R}_e \approx \frac{1}{15}(\mathbb{R}_\lambda)^2 \,, \tag{2.48}$$

à un coefficient $O(1)$ multiplicatif près[12]. C'est sur cette relation que nous nous sommes basés pour renormaliser les cumulants. Dans le domaine inertiel, l'analyse en cumulants de ces données a été effectuée dans la référence [80]. Dans le chapitre 3, nous allons étendre cette analyse aux petites échelles, c'est-à-dire à un domaine d'échelles pour lequel l'interprétation des données nécessitera de prendre en compte la physique des effets **dissipatifs**.

2.4.1 Le cumulant d'ordre 1

Le cumulant d'ordre 1 de $\ln \beta_l$, normalisé par le nombre de Reynolds calculé à partir de $\mathbb{R}_\lambda$ via la relation (2.48), est présenté dans la figure 2.3(a) en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$, où

$$C_{1,\beta_l} = C_{1,\delta_l u} - C_{1,\delta} = \langle \ln |\delta_l u| \rangle - \langle \ln |\delta_L u| \rangle \ . \tag{2.49}$$

Dans cette représentation, suivant les arguments dimensionnels de Kolmogorov [5], le domaine inertiel s'étend de $\ln(l/L) \approx \ln(\eta_K/L) = -3/4$ jusqu'à l'échelle intégrale $\ln(L/L) = 0$, où $\eta_K = L\mathbb{R}_e^{-3/4}$ (Eq. (1.6)) est l'échelle de Kolmogorov. En pratique, l'analyse des signaux expérimentaux montre qu'à cause des effets de nombre de Reynolds fini, le domaine inertiel apparait clair sur un domaine plus restreint[13] $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e \in [-0.55; 0]$, dans lequel C_{1,β_l} se comporte a peu près linéairement en fonction de $\ln(l/L)$ avec une pente $c_1 = 0.37 \pm 0.03$, valeur très proche de la prédiction monofractale $c_1 = \langle h \rangle = 1/3$ de **K41** (Section 2.2). On constate toutefois une courbure prononcée aux alentours de l'échelle intégrale L. Nous attribuons cette courbure aux effets d'anisotropie présents à cette échelle [38–41]. En ce qui concerne les échelles inférieures à l'échelle de Kolmogorov ($\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e \lesssim -0.55$), C_{1,β_l} se comporte désormais comme $\ln(l/L)$. Il s'agit là d'une conséquence directe du fait que dans le domaine dissipatif, l'incrément de vitesse se comporte comme l'échelle, en cohérence avec le développement de Taylor :

$$\delta_l u(x) = u(x+l) - u(x) \approx l\partial_x u + o(l^2) \ . \tag{2.50}$$

On obtient bien que le cumulant d'ordre 1 se comporte comme

$$C_{1,\beta_l} = \ln\left(\frac{l}{L}\right) + \mathrm{cste}(\mathbb{R}_e) \ , \tag{2.51}$$

où la constante est déterminée par continuité du cumulant, c'est-à-dire, dans le cadre dimensionnel de Kolmogorov,

$$\mathrm{cste}(\mathbb{R}_e) \approx (c_1 - 1) \ln\left(\frac{\eta_K}{L}\right) \approx -\frac{2}{3} \ln\left(\mathbb{R}_e^{-3/4}\right) = \frac{1}{2} \ln \mathbb{R}_e \ , \tag{2.52}$$

[12] Que nous prendrons égal à 1. Un calcul plus poussé peut-être effectué conduisant effectivement à un nombre très proche de 1 (Section 3.6).

[13] Pour rendre compte de ces effets de nombre de Reynolds fini, il suffit de prendre comme échelle dissipative $\eta_K = (\mathbb{R}_e/\mathbb{R}^*)^{-3/4}$, où $\mathbb{R}^*$ est une constante empirique estimée à partir des mesures expérimentales (c.f. Section 3.6). Ainsi, $\ln \eta_K/\ln \mathbb{R}_e = -3/4 + 3/4(\ln \mathbb{R}^*/\ln \mathbb{R}_e)$ respecte les prédictions de Kolmogorov ($\ln \eta_K/\ln \mathbb{R}_e \to -3/4$ lorsque $\mathbb{R}_e \to +\infty$) bien que dans la gamme des valeurs du nombre de Reynolds concernée, $\ln \eta_K/\ln \mathbb{R}_e \approx -0.55$ varie très faiblement en fonction du nombre de Reynolds ($\sim 1/\ln \mathbb{R}_e$).

ce qui donne un ordre de grandeur de la valeur du cumulant à l'échelle de Kolmogorov : $C_{1,\beta_{\eta_K}}/\ln \mathbb{R}_e \approx -1/4$. Un même calcul, en prenant en compte des effets de nombre de Reynolds fini ($\ln(\eta_K/L) \approx -0.55 \ln \mathbb{R}_e$) et $c_1 \approx 0.37$, donne $C_{1,\beta_{\eta_K}}/\ln \mathbb{R}_e \approx -0.20$, une valeur très proche de celle observée dans la figure 2.3(a).

2.4.2 Le cumulant d'ordre 2

Nous présentons dans la figure 2.3(b) l'estimation du cumulant d'ordre 2 de $\ln \beta_l$. Comme précédemment, nous avons représenté ce cumulant normalisé par $\ln \mathbb{R}_e$, $C_{2,\beta_l}/\ln \mathbb{R}_e$ en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$, où

$$C_{2,\beta_l} = \mathrm{Var}(\ln \beta_l) = C_{2,\delta_l u} - C_{2,\delta_L u} = \mathrm{Var}(\ln |\delta_l u|) - \pi^2/8 \ . \tag{2.53}$$

En ce qui concerne les échelles inertielles ($\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e \gtrsim -0.55$), C_{2,β_l} présente un comportement linéaire **universel**[14] en fonction de $\ln(l/L)$, de pente $-c_2 = -0.025 \pm 0.003$ [15, 79, 80, 102]. Contrairement à C_{1,β_l}, ce comportement invariant d'échelle est beaucoup plus marqué et bien moins pertubé par l'anisotropie des grandes échelles. On constate pour les échelles dissipatives ($\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e \lesssim -0.55$) un écart au comportement linéaire. Ceci est une conséquence de la dérivabilité du signal de vitesse résultant de l'effet de lissage par la viscosité du fluide. On peut montrer en effet que $C_{2,\delta_l u}$ devient indépendant de l'échelle lorsque $l/L \to 0$,

$$C_{2,\delta_l u} = \mathrm{Var}(\ln |\delta_l u|) \underset{l/L \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{Var}(\ln |\partial_x u|) = C_{2,\partial_x u} \, ; \tag{2.54}$$

C_{2,β_l} tend donc vers une constante qui dépend du nombre de Reynolds. Dans le cadre monofractal de K41 [5], cette constante est égale à la valeur du cumulant à l'échelle dissipative,

$$C_{2,\beta_l} \underset{l/L \to 0}{\longrightarrow} C_{2,\beta_{\eta_K}} = c_2 \ln \frac{L}{\eta_K} \approx \frac{3}{4} c_2 \ln \mathbb{R}_e \ . \tag{2.55}$$

Dans notre représentation et en prenant en compte les effets de nombre de Reynolds fini, on obtient

$$\frac{C_{2,\beta_l}}{\ln \mathbb{R}_e} \underset{l/L \to 0}{\longrightarrow} 0.025 \times 0.55 \approx 0.014 \ . \tag{2.56}$$

L'analyse des signaux expérimentaux dans la figure 2.3(b) montre clairement que si C_{2,β_l} sature à petites échelles (qui ne sont pas pour le moment accessibles à l'expérience ou à la DNS), cette saturation se fera à des valeurs plus importantes que la valeur donnée dans l'équation (2.56). En particulier, les signaux à $\mathbb{R}_\lambda = 380$ et 2500, montrent clairement que la saturation se situe plus haut que celle prédite par un simple raisonnement dimensionel. Cette "accélération"[15] de C_{2,β_l} résulte du caractère intermittent des fluctuations de vitesse à travers les échelles. Remarquons simplement que cette accélération dépend de façon non

[14] C'est-à-dire indépendant du nombre de Reynolds.

[15] La notion d'accélération est à rapprocher de la notion de "vitesse" dans les échelles mentionée dans l'établissement de la relation (2.45).

triviale[16] du nombre de Reynolds. Nous appelerons le domaine **dissipatif profond** le domaine d'échelles où C_{2,β_l} devient indépendant de l'échelle. Ce domaine est très difficile à atteindre expérimentalement puisqu'il nécessite une résolution temporelle[17] d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est grand. Nous appelerons le domaine **dissipatif intermédiaire** [48, 62–66], le domaine d'échelles où C_{2,β_l} subit une "accélération", c'est-à-dire le domaine d'échelles qui sépare le comportement inertiel ($C_{2,\beta_l} = -c_2 \ln(l/L)$) du comportement dissipatif profond $C_{2,\beta_l} = \mathrm{Var}(\ln|\partial_x u|)$.

2.4.3 Le cumulant d'ordre 3

Nous présentons dans la figure 2.3(c) l'estimation du cumulant d'ordre 3 de $\ln \beta_l$. Nous représentons à nouveau ce cumulant normalisé par $\ln \mathbb{R}_e$ en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$, où, en utilisant les résultats de l'annexe D,

$$C_{3,\beta_l}(l) = C_{3,\delta_l u}(l) - C_{3,\delta_L u} \approx C_{3,\delta_l u}(l) + 2.10 \ . \tag{2.57}$$

Dans le domaine inertiel ($\ln(l/L) \lesssim -0.55$), la pente c_3 du cumulant d'ordre 3 en fonction de $\ln(l/L)$ permet de discriminer le modèle log-normal ($c_3 = 0$) d'autres modèles proposés pour rendre compte du phénomène d'intermittence et qui généralement conduisent à des valeurs non nulles pour les cumulants c_n d'ordre $n > 2$ [15, 51–56, 79, 80, 95, 98, 102, 139–141]. Les signaux expérimentaux ($\mathbb{R}_\lambda = 208, 463, 703, 929$) présentent un C_{3,β_l} qui se comporte linéairement avec $\ln(l/L)$ avec une pente $c_3 < 0$ faible mais non nulle. Ceci contraste avec les résultats obtenus avec les autres signaux ($\mathbb{R}_\lambda = 140$, 380 et 2500) qui présentent un $C_{3,\beta_l} \approx 0$ indépendant de l'échelle, aux erreurs de mesures près, et qui confirment que l'incrément de vitesse à l'échelle intégrale $\delta_L u$ reste indiscernable d'un bruit Gaussien. Plusieurs phénomènes peuvent être mis en avant pour expliquer ces comportements. Premièrement, les signaux de Chanal *et al.* sont obtenus pour un taux de turbulence (Eq. (1.8)) important [15], ce qui rend approximative l'utilisation de l'hypothèse de Taylor. Les données de Baudet et Naert ($\mathbb{R}_\lambda = 380$) sont elles aussi obtenues pour un taux de turbulence important, mais le signal a été rééchantillonné en appliquant l'hypothèse de Taylor *locale* [1, 18], qui consiste à interpréter les mesures temporelles $u(t)$ comme un profil spatial $u(x(t))$, avec[18]

$$x(t) = x_0 - \int_{t'=0}^{t} u(t')dt' \ . \tag{2.58}$$

D'un point de vue du traitement du signal, la statistique nécessaire à une bonne estimation des cumulants C_{n,β_l} croît avec l'ordre n du cumulant. Ainsi, pour les échelles inertielles,

[16] Nous montrerons dans la suite de ce manuscrit que $\partial C_{2,\beta_l}/\partial \ln(l/L) \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$ dans le domaine d'échelles correspondant au domaine dissipatif intermédiaire (Eq. (3.12)).

[17] On rappelle que les profils spatiaux de vitesse sont obtenus sous l'hypothèse de Taylor.

[18] L'approximation de Taylor traditionnelle consiste à relier l'espace et le temps via $x(t) = x_0 - \langle u \rangle t$, où $\langle u \rangle$ est la vitesse moyenne de l'écoulement dans le référentiel du laboratoire. Le signe moins qui intervient dans cette dernière relation comme dans l'équation (2.58) provient du fait que la sonde visite le référentiel de l'écoulement moyen dans le sens des x négatifs.

les points expérimentaux dans la figure 2.3(c) sont soumis à une forte dispersion. Nous pouvons néanmoins attribuer une pente aux différentes courbes correspondant aux différents nombres de Reynolds : $c_3 = -0.0010 \pm 0.0005$ pour les signaux de Chanal *et al.*, $c_3 = -0.0001 \pm 0.0001$ pour les autres. Le décalage en ordonnée des valeurs de C_{3,β_l} observé pour les signaux de Chanal *et al.* provient de la statistique du bruit $\delta = \delta_L u$: cohérente pour les deux premiers cumulants avec une statistique Gaussienne, elle s'écarte clairement du cas Gaussien d'après la valeur finie obtenue pour $C_{3;\beta_l}$ aux autres valeurs de $\mathbb{R}_\lambda$. Du coté des échelles dissipatives $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e \lesssim -0.55$, on observe un écart au comportement en loi de puissance. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, ceci s'explique par le caractère intermittent des fluctuations de vitesse.

2.4.4 Conclusions

L'analyse des signaux expérimentaux et numériques montrent que les incréments longitudinaux de vitesse sur une échelle l sont correctement modélisés dans le domaine inertiel par le produit de deux variables aléatoires indépendantes δ et β_l (Eq. (2.32)), où $\delta = \delta_L u = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et β_l est une variable log-normale

$$\beta_l = \left(\frac{l}{L}\right)^h \ , \tag{2.59}$$

l'exposant h étant lui-même une variable aléatoire Gaussienne de variance

$$\mathrm{Var}(h) = \frac{c_2}{\ln(L/l)} \ , \quad \text{avec} \quad c_2 = 0.025 \pm 0.003 \ , \tag{2.60}$$

et de moyenne $\langle h \rangle = c_1 = 0.37 \pm 0.03$, aux effets de nombre de Reynolds fini et aux incertitudes de mesures près. La densité de probabilité de l'exposant h à l'échelle l, peut se réécrire sous la forme :

$$\mathbb{P}_l(h) = \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)}}{\int \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} dh} \ , \tag{2.61}$$

avec

$$\mathcal{D}^E(h) = 1 - \frac{(h - c_1)^2}{2c_2} \ . \tag{2.62}$$

Les fonctions de structure sont alors correctement[19] modélisées par des lois de puissance :

$$\langle |\delta_l u|^q \rangle = K_q \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_q^E} \ , \tag{2.63}$$

[19]Remarquons que les lois de puissance des fonctions de structure sont fortement perturbées par des effets de courbure dans la représentation logarithmique au voisinage de l'échelle de Kolmogorov η_K et de l'échelle intégrale L, en cohérence avec le comportement de C_{1,β_l} (Fig. 2.3(a)). Le lien entre cumulants et fonctions de structure est explicité dans l'Annexe D (Eqs. (D.1) et (D.2)).

avec

$$\zeta_q^E = c_1 q - c_2 \frac{q^2}{2} \ . \tag{2.64}$$

Nous remarquerons que les valeurs attribuées aux coefficients du modèle log-normal sont cohérentes avec $\zeta_3^E = 1$, puisque $c_1 \approx 1/3 + 3c_2/2$. Ces valeurs peuvent être comparées avec celles prédites par le modèle de She-Lévêque [51] (statistiques log-Poisson [52, 53, 95]) (Annexe D). La prédiction de ce modèle pour le spectre ζ_q^E peut être décomposée sous la forme polynomiale suivante :

$$\begin{aligned} \zeta_q^E = \frac{q}{9} + 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{q/3}\right] &= \left[\frac{1}{9} - \frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right] q - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n}\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]^n \frac{q^n}{n!} \ , \\ &= 0.381q - 0.0365\frac{q^2}{2} - 0.005\frac{q^3}{3!} - \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{3^n}\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]^n \frac{q^n}{n!} \ . \end{aligned} \tag{2.65}$$

Ainsi, les valeurs des coefficients c_n prédites par ce modèle diffèrent significativement de celles mesurées sur les signaux expérimentaux et numériques, en particulier pour ce qui concerne le coefficient d'intermittence c_2 qui est surestimé.

Dans le chapitre suivant, nous nous placerons donc volontairement et par soucis de simplicité dans un cadre log-normal de coefficients

$$c_1 = 0.370 \pm 0.005 \quad \text{et} \quad c_2 = 0.025 \pm 0.003 \ . \tag{2.66}$$

Chapitre 3

Les échelles dissipatives

3.1 Un constat expérimental

La figure 2.3 montre clairement que, dans le domaine dissipatif, les cumulants s'écartent d'un comportement linéaire en fonction de $\ln(l/L)$. Nous nous proposons dans ce chapitre de comprendre l'implication de la différentiabilité de la vitesse induite par les effets visqueux ($\delta_l u = l\partial_x u$, lorsque $l \to 0$) sur les statistiques des fluctuations de vitesse à travers les échelles, ce qui constitue la majeure partie de ma contribution personnelle à la compréhension des (très) petites échelles de la turbulence.

3.2 Le nombre de Reynolds local dans le domaine dissipatif

Le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ (Eq. (1.5)) caractérise la complexité de l'écoulement. Dans les écoulements caractéristiques d'une turbulence pleinement développée, le nombre de Reynolds est très grand (typiquement $\mathbb{R}_e \sim (\mathbb{R}_\lambda)^2$, avec $\mathbb{R}_\lambda \sim 100 - 3000$). Le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ (Eq. (2.42)) caractérise lui la complexité du fluide à l'échelle l, et diminue avec l'échelle. Lorsque l'échelle est suffisamment petite, $\mathbb{R}_l$ atteint des valeurs faibles de l'ordre de $O(1)$: aux petites échelles ($l \leq \eta_K$), l'écoulement est laminaire et la vitesse varie peu. Ce comportement s'explique par les phénomènes dissipatifs qui "régularisent" la vitesse, c'est-à-dire qui l'empêche de varier de façon significative sur de telles échelles ; l'incrément de vitesse devient alors directement proportionnel à l'échelle

$$\delta_l u(x) \approx l\partial_x u \underset{l\to 0}{\longrightarrow} 0 \ . \tag{3.1}$$

Selon Paladin et Vulpiani [48, 62], on peut reprendre ces idées de manière plus formelle, en disant que le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ à une certaine échelle $l = \eta$ est de l'ordre de

l'unité[1] :

$$\mathbb{R}_\eta = 1 \ . \tag{3.2}$$

Dans un cadre monofractal (**K41**), le nombre de Reynolds local ne fluctue pas spatialement (Section 2.3.5), et donc l'échelle η est elle-même unique. Dans un cadre multifractal, le nombre de Reynolds local fluctue et donc l'échelle η fluctue aussi. $\mathbb{R}_l$ peut se réécrire en fonction de l'exposant h via la relation (2.44) :

$$\mathbb{R}_\eta = 1 \Rightarrow \frac{\eta(h)}{L} = (\mathbb{R}_e)^{-\frac{1}{h+1}} \ . \tag{3.3}$$

Remarquons que l'on retrouve bien, dans le cadre du modèle **K41** qui prédit un exposant $h = 1/3$ unique, le comportement : $\eta_K = \eta(h = 1/3) = L\mathbb{R}_e^{-3/4}$ (Eq. (1.6)) pour l'échelle dissipative de Kolmogorov. Le nombre de Reynolds local permet de différencier les échelles inertielles ($\ln \mathbb{R}_l > 0$) des échelles dissipatives ($\ln \mathbb{R}_l < 0$). Dans le domaine dissipatif, l'incrément de vitesse, c'est-à-dire β_l, devient proportionnel à l'échelle. Nous obtenons donc

$$\ln \mathbb{R}_l(h) = 2 \ln \left(\frac{l}{\eta(h)} \right) \ . \tag{3.4}$$

3.3 Le propagateur dans le domaine dissipatif

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.4, le propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ est, en bonne approximation[2], centré sur le cumulant d'ordre 1, C_{1,β_l}, et sa largeur à mi-hauteur est bien approchée par $2\sqrt{C_{2,\beta_l}}$ (Fig. 2.1). Remarquons que la forme précise du propagateur n'est pas importante dans la discussion, nous retiendrons simplement que le propagateur n'est pas de largeur nulle et que le modèle log-normal est le modèle le plus simple auquel nous pouvons penser pour rendre compte de la nature intermittente des fluctuations de vitesse. Lorsque le propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ est représenté en fonction de $\ln \mathbb{R}_l$ (Section 2.3.6), le maximum de cette densité de probabilité, situé en $\langle \ln \mathbb{R}_l \rangle = C_{1,\beta_l} + \ln(\mathbb{R}_e l/L)$, se déplace à la vitesse $c_1 + 1 \approx 4/3$ (Eq. (2.45) et Fig. 2.2) dans le domaine inertiel ($\ln \mathbb{R}_l \gg 0$). Dans le domaine dissipatif profond ($\ln \mathbb{R}_l \ll 0$), pour lequel $\beta_l \sim l$, le maximum du propagateur se déplace dans cette représentation à la "vitesse" (Eq. (3.4)) :

$$\frac{\partial \langle \ln \mathbb{R}_l \rangle}{\partial \ln(l/L)} = 2 \ . \tag{3.5}$$

[1] Dans une première étape, nous considèrerons que le nombre de Reynolds local est exactement égal à 1. Les mesures expérimentales et numériques montrent clairement que ce n'est pas tout à fait l'unité, mais plutôt $\mathbb{R}_\eta = \mathbb{R}^* \approx 60$. Nous reviendrons sur ce point dans la suite du manuscrit.

[2] Ces résultats sont exacts dans le cadre log-normal, et restent toutefois une très bonne approximation dans d'autres descriptions plus générales des données expérimentales et numériques, comme par exemple le modèle (log-Poisson) de She-Lévêque [51–53].

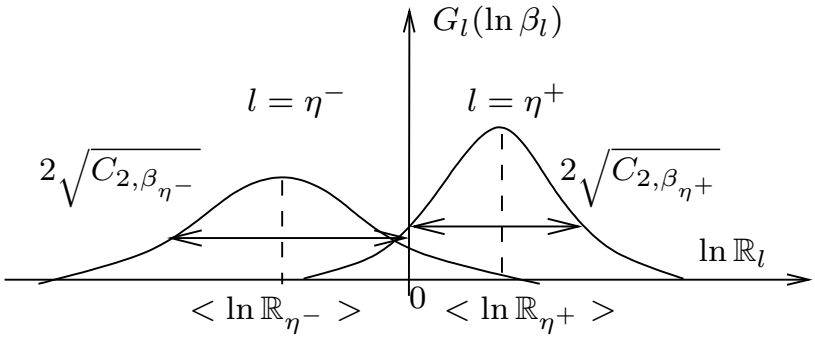

FIG. 3.1 – Représentation schématique du propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ en fonction de $\ln \mathbb{R}_l$, pour les deux échelles $l = \eta^-$ et $l = \eta^+$ définies dans le texte et qui délimitent le domaine dissipatif intermédiaire.

3.3.1 Evolution du propagateur dans le domaine dissipatif intermédiaire

Nous voyons donc que la vitesse de déplacement vers les très petites échelles du maximum du propagateur est sensiblement plus importante que dans le domaine inertiel. En fait, il existe un domaine d'échelles (le domaine dissipatif intermédiaire) dans lequel le maximum du propagateur a été "accéléré". Dans la figure 3.1, nous représentons de façon schématique le comportement du propagateur dans les échelles en fonction de $\ln \mathbb{R}_l$. Dans le domaine dissipatif profond (c'est-à-dire $\delta_l u \sim l$ et $\ln \mathbb{R}_l \ll 0$), la largeur du propagateur ($2\sqrt{C_{2,\beta_l}}$) devient indépendante de l'échelle puisque $C_{2,\beta_l} \to C_{2,\partial_x u} - \pi^2/8$ lorsque $l \to 0$. Le propagateur *sature* dans le dissipatif profond, c'est-à-dire que dans la représentation en fonction de $\ln \mathbb{R}_l$, le propagateur subit un mouvement de translation en bloc à la vitesse donnée par l'équation (3.5). Nous noterons η^- la plus grande échelle à laquelle la largeur du propagateur devient indépendante de l'échelle ($\forall l < \eta^-$, $C_{2,\beta_l} = C_{2,\partial_x u} - \pi^2/8$). Comme nous l'avons vu, dans le domaine inertiel (Fig. 2.2), la largeur du propagateur augmente comme $2\sqrt{C_{2,\beta_l}} = 2\sqrt{c_2 \ln(L/l)}$ lorsque l'échelle diminue. Appelons η^+ la plus petite échelle à partir de laquelle C_{2,β_l} s'écarte d'un comportement linéaire vis à vis de $\ln(L/l)$, c'est-à-dire que $\forall l < \eta^+$, $C_{2,\beta_l} > c_2 \ln(L/l)$. Ainsi, nous pouvons définir le domaine **dissipatif intermédiaire** comme le domaine d'échelles $l \in [\eta^-, \eta^+]$ dans lequel le coeur du propagateur pénètre par la droite ($\ln \mathbb{R}_{\eta^+} > 0$) à la "vitesse" $c_1 + 1$ (Eq. (2.45)) et sort par la gauche ($\ln \mathbb{R}_{\eta^-} < 0$) à la "vitesse" 2 (Eq. (3.5)). Dans un cadre monofractal, le propagateur est de largeur nulle ($c_2 = 0$), ce qui définit une seule échelle dissipative $\eta_K = L\mathbb{R}_e^{-3/4}$ (Eq. (1.6)). Dans le cadre multifractal qui est le nôtre, et de manière phénoménologique, l'échelle dite de Kolmogorov η_K est telle que le propagateur à cette échelle $G_{\eta_K}(\ln \beta_{\eta_K})$ est centré en $\langle \ln \mathbb{R}_{\eta_K} \rangle = 0$. Admettons[3] en première approximation que les échelles η^- et η^+

[3]Ceci revient à supposer que les échelles dissipatives fluctuent autour de η_K d'une manière logarithmique, c'est-à-dire $\langle \ln \eta \rangle \approx \ln \eta_K$. Dans le cadre du formalisme multifractal, ceci revient à approximer $\langle \ln \eta(h) \rangle = -\langle (h+1)^{-1} \rangle \ln \mathbb{R}_e$ par $-(\langle h \rangle + 1)^{-1} \ln \mathbb{R}_e \approx -(1/3+1)^{-1} \ln \mathbb{R}_e = \ln \eta_K$.

soient telles que $\langle \ln \mathbb{R}_{\eta^-} \rangle \approx -\langle \ln \mathbb{R}_{\eta^+} \rangle$ (Fig. 3.1). On peut montrer[4] alors que η_K est la moyenne géométrique des échelles η^+ et η^- :

$$\eta_K \approx \sqrt{\eta^- \eta^+} \ . \tag{3.6}$$

Ainsi, le maximum du propagateur inertiel de largeur $2(C_{2,\beta_{\eta^+}})^{1/2}$, voyageant à la "vitesse" $c_1 + 1$ (Eq. (2.45)), met un "temps" $\ln(\eta^+/\eta_K)$ à atteindre l'échelle dissipative η_K :

$$\frac{\sqrt{C_{2,\beta_{\eta^+}}}}{c_1 + 1} \approx \ln\left(\frac{\eta^+}{\eta_K}\right) \ . \tag{3.7}$$

De la même manière, le maximum du propagateur dissipatif de largeur $2(C_{2,\beta_{\eta^-}})^{1/2}$, voyageant à la "vitesse" 2 (Eq. (3.5)) depuis l'échelle η_K, met un "temps" $\ln(\eta_K/\eta^-)$ à atteindre le régime dissipatif profond :

$$\frac{\sqrt{C_{2,\beta_{\eta^-}}}}{2} \approx \ln\left(\frac{\eta_K}{\eta^-}\right) \ . \tag{3.8}$$

Les relations (3.6), (3.7) et (3.8) permettent de calculer le facteur d'amplification du cumulant d'ordre 2, C_{2,β_l}, à la traversée du régime dissipatif intermédiaire [15, 66] :

$$\frac{C_{2,\beta_{\eta^-}}}{C_{2,\beta_{\eta^+}}} \approx \left(\frac{2}{c_1 + 1}\right)^2 \ . \tag{3.9}$$

Nous appelerons[5] **loi des 9/4** l'amplification du cumulant d'ordre 2, car en négligeant les corrections intermittentes[6], $c_1 = 1/3$ et donc l'amplication est de l'ordre de 9/4.

3.3.2 Dépendance de l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire dans le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$

Le même raisonnement que précédemment mène à des prédictions sur la largeur $[\eta^-, \eta^+]$ du domaine dissipatif intermédiaire, ainsi que sur le comportement de C_{2,β_l} dans ce domaine. L'échelle η^+ est définie comme la limite du domaine inertiel, mais reste toutefois une échelle inertielle. On peut donc écrire que

$$C_{2,\beta_{\eta^+}} = c_2 \ln\left(\frac{L}{\eta^+}\right) \approx c_2 \ln\left(\frac{L}{\eta_K}\right) = \frac{3}{4} c_2 \ln \mathbb{R}_e \ , \tag{3.10}$$

en utilisant la forme du C_{2,β_l} inertiel et le fait qu'à très haut nombre de Reynolds, l'échelle η^+ reste très proche[7] de l'échelle de Kolmogorov η_K. D'après les relations (3.7) et (3.8), on

[4] C'est une conséquence directe de la note en bas de page précédente.

[5] Par analogie avec la **loi des 4/5** régissant la fonction de structure d'ordre 3 (Eq. (2.3)) [1, 3, 5].

[6] La condition $\zeta_3^E = 1$ impose dans un cadre log-normal $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 \approx 0.37 \approx 1/3$.

[7] Cette approximation est justifiée *a posteriori* puisque nous pouvons montrer que, via la relation (3.7), $\ln(\eta^+/\eta_K) \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$, un domaine d'échelle de largeur négligeable devant $\ln(L/\eta_K) = (3/4) \ln \mathbb{R}_e$.

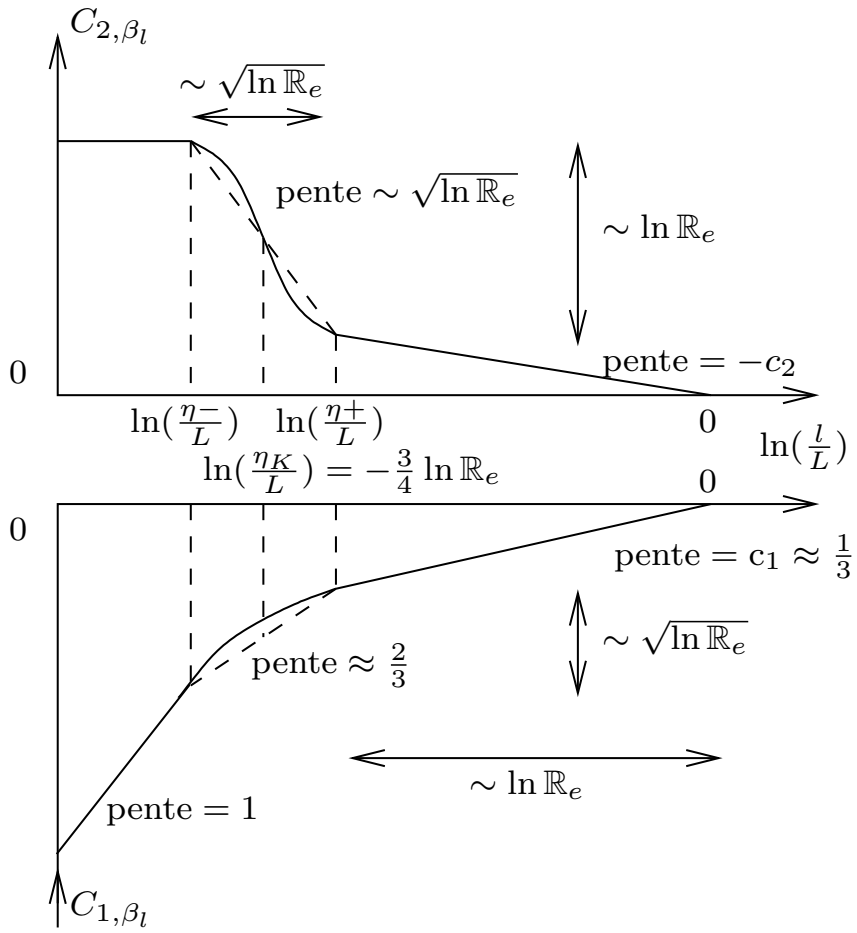

FIG. 3.2 – Prédictions dimensionnelles pour les cumulants C_{1,β_l} et C_{2,β_l} de $\ln \beta_l$ sur toute la gamme d'échelles comprise entre l'échelle intégrale et le domaine dissipatif profond.

peut calculer

$$\sqrt{C_{2,\beta_{\eta^-}}} - \sqrt{C_{2,\beta_{\eta^+}}} \approx 2 \ln\left(\frac{\eta_K}{\eta^-}\right) - (c_1+1)\ln\left(\frac{\eta^+}{\eta_K}\right) \approx \frac{1-c_1}{2}\ln\left(\frac{\eta^+}{\eta^-}\right) . \qquad (3.11)$$

L'équation (3.9) permet d'aboutir à la prédiction dimensionnelle de l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire :

$$\ln\left(\frac{\eta^+}{\eta^-}\right) \approx \frac{\sqrt{3c_2}}{c_1+1}\sqrt{\ln \mathbb{R}_e} . \qquad (3.12)$$

Nous voyons donc que l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire ($\ln(\eta^+/\eta^-)$) varie en fonction du nombre de Reynolds comme $\sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$, un domaine d'échelles négligeable devant l'étendue $\ln(L/\eta_K) \sim \ln \mathbb{R}_e$ des échelles inertielles dans la limite des nombres de Reynolds infinis.

Remarquons que dans la littérature, des considérations spectrales [63] ont été évoquées pour estimer que le domaine dissipatif intermédiaire s'étendait plutôt entre $\eta_{\min}$ à $\eta_{\max}$ (Eq. 3.3), où

$$\ln(\eta_{\min}/L) = -\frac{1}{1+h_{\min}} \ln \mathbb{R}_e \text{ et } \ln(\eta_{\max}/L) = -\frac{1}{1+h_{\max}} \ln \mathbb{R}_e \ , \tag{3.13}$$

avec $h_{\min}$ et $h_{\max}$ des constantes universelles[8], c'est-à-dire indépendantes du nombre de Reynolds. On obtient alors que l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire varie comme

$$\ln\left(\frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}}\right) = \left(\frac{1}{1+h_{\min}} - \frac{1}{1+h_{\max}}\right) \ln \mathbb{R}_e \ , \tag{3.14}$$

en contradiction avec nos prédictions dimensionnelles (Eq. (3.12)) [66].

Dans la figure 3.2, nous avons essayé de résumer les différentes prédictions dimensionnelles que nous avons établies sur le comportement des cumulants C_{1,β_l} et C_{2,β_l} en fonction de $\ln(l/L)$. C_{2,β_l} est constant et est égal à $C_{2,\partial_x u} - \pi^2/8$ dans le domaine dissipatif profond ($l < \eta^-$) ; il se comporte linéairement avec une pente $-c_2$ dans le domaine inertiel ($l > \eta^+$) et présente un taux de variation dans le domaine dissipatif intermédiaire ($l \in [\eta^-, \eta^+]$) égal à :

$$\frac{C_{2,\eta^-} - C_{2,\eta^+}}{\ln\left(\frac{\eta^+}{\eta^-}\right)} \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e} \ . \tag{3.15}$$

C_{1,β_l} se comporte linéairement avec une pente 1 dans le domaine dissipatif profond et une pente $c_1 \approx 1/3$ dans le domaine inertiel ; il présente dans le domaine dissipatif intermédiaire un taux de variation indépendant du nombre de Reynolds :

$$\frac{C_{1,\eta^-} - C_{1,\eta^+}}{\ln\left(\frac{\eta^+}{\eta^-}\right)} \approx -\frac{2}{3} \ . \tag{3.16}$$

Nous voyons donc que le caractère différentiable de la vitesse ($\delta_l u \sim l\partial_x u$) et l'intermittence des fluctuations ($C_{2,\beta_l} > 0$) du domaine inertiel ont des implications fondamentales et non triviales sur les statistiques des incréments à travers les échelles, et ce indépendemment de la forme précise du propagateur. Nous pouvons aussi conclure que les statistiques de la vitesse en turbulence ne sont pas log-infiniment divisibles [95, 137, 138] dans le domaine dissipatif. En effet, le taux de variation de C_{2,β_l} (Eq. (3.15)) à la traversée du domaine dissipatif intermédiaire dépend du nombre de Reynolds, alors que celui de C_{1,β_l} (Eq. (3.16)) n'en dépend pas. Ainsi, il n'existe pas de fonction $f(l, \mathbb{R}_e)$ telle que $C_{1,\beta_l} \propto f(l, \mathbb{R}_e)$ et $C_{2,\beta_l} \propto f(l, \mathbb{R}_e)$ (c.f. Annexe D). Nous présentons dans la section suivante une formalisation précise de ces idées dans le cadre du formalisme multifractal.

[8]Dans le référence [63], il est indiqué que $h_{\min} > -1$, c'est-à-dire $L > \eta_{\min} > 0$. Traditionnellement, $h_{\min}$ et $h_{\max}$ correspondent aux deux solutions de l'équation $\mathcal{D}^E(h) = 0$, à savoir $h_{\min} = c_1 - \sqrt{2c_2}$ et $h_{\max} = c_1 + \sqrt{2c_2}$ dans un cadre log-normal.

3.4 Description multifractale des échelles dissipatives

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2, dans le contexte où les fluctuations de vitesse à travers les échelles sont intermittentes, l'échelle dissipative η définie à partir du nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$, fluctue spatialement. La relation (3.3) montre que l'échelle $\eta(h)$ est bien une fonction de l'exposant h, auquel est associé (dans le domaine inertiel) une probabilité $\mathbb{P}_l^i(h) \sim l^{1-\mathcal{D}^E(h)}$ (Eq. (2.21)). Nous allons discuter dans cette section comment étendre ces notions aux échelles l dissipatives et notament, comment se comporte dans ce régime l'incrément de vitesse $\delta_l u$ et la densité de probabilité des exposants h, $\mathbb{P}_l^d(h)$.

3.4.1 Continuité des incréments à l'échelle $l = \eta(h)$

Dans le domaine inertiel, c'est-à-dire aux échelles $l > \eta(h)$, nous avons vu que la description statistique fournit par le formalisme multifractal est basée sur le comportement local des incréments des signaux de vitesse étudiés [1, 45, 48]. L'approche du propagateur [9, 92–98] permet d'écrire l'incrément de vitesse à une échelle l inertielle comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes (Eq. (2.32)), dont l'une δ est Gaussienne (de densité $\mathcal{G}$) et indépendante[9] de l'échelle, et l'autre β_l contient entièrement la dépendance dans les échelles (Eq. (2.38)), c'est-à-dire, $\forall l \geq \eta(h)$,

$$\beta_l^i(h) = \left(\frac{l}{L}\right)^h , \tag{3.17}$$

avec

$$\mathbb{P}_l^i(h) \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} , \tag{3.18}$$

où $\eta(h)$ est donnée par l'équation (3.3) [62], l'exposant i signifiant que les échelles concernées sont inertielles. Nous nous intéressons maintenant au comportement des incréments aux échelles $l \leq \eta(h)$, en ayant pour ambition de décrire les statistiques des gradients[10] de vitesse comme un prolongement *naturel* des statistiques inertielles. Dans le cadre du modèle "β aléatoire" [1, 48, 111], Benzi *et al.* [132] proposèrent une expression des densités de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse $\delta_l u$ à toute échelle. Nous allons voir que les statistiques du domaine dissipatif se déduisent des comportements inertiels par continuité des incréments à l'échelle dissipative. C'est Nelkin [67] qui à nôtre connaissance, fut le premier en 1990 à établir les prédictions du formalisme multifractal sur les statistiques des gradients de vitesse. Nous nous proposons ici d'étendre son étude à toutes les échelles. Dans le domaine dissipatif, l'incrément de vitesse est directement proportionnel à l'échelle, c'est-à-dire (Eq. (2.50))

$$\beta_l^d(h) = \mathrm{cste}(h)\frac{l}{L} , \tag{3.19}$$

[9] L'indépendance vis à vis de l'échelle est vraie pour les statistiques à un point, c'est-à-dire la densité de probabilité $\mathcal{G}(\delta)$, les moments $\langle \delta^q \rangle$ et les cumulants $C_{n,\delta}$.

[10] Les gradients s'obtiennent à la limite des échelles infiniment petites, $\delta_l u/l \to \partial_x u$ lorsque $l \to 0$.

où la constante est indépendante de l'échelle et dépend *a priori* de l'exposant h, l'index d référant aux échelles de nature dissipatives. Cette constante est déterminée par continuité en remarquant que l'incrément à l'échelle $\eta(h)$ est à la fois inertiel et dissipatif, ce qui permet d'écrire, $\forall l \leq \eta(h)$:

$$\beta_l^d(h) = \frac{l}{L}\left(\frac{\eta(h)}{L}\right)^{h-1} . \tag{3.20}$$

En combinant les équations (3.18) et (3.20), on obtient ainsi le comportement des incréments à toutes les échelles. Il reste toutefois à déterminer la densité de probabilité de l'exposant h pour complètement décrire de façon statistique les fluctuations des incréments longitudinaux de vitesse. En cohérence avec la différentiabilité de la vitesse, la constante intervenant dans l'équation (3.19) ne doit pas dépendre de l'échelle. Il est alors naturel de choisir pour la densité de l'exposant h dans le domaine dissipatif, une forme indépendante de l'échelle et qui respecte la continuité de la fonction $\mathbb{P}_l^{i,d}(h)$ lorsque $l = \eta(h)$. On obtient ainsi, $\forall l \leq \eta(h)$,

$$\beta_l^d(h) = \frac{l}{L}\left(\frac{\eta(h)}{L}\right)^{h-1} , \tag{3.21}$$

avec

$$\mathbb{P}_l^d(h) \sim \left(\frac{\eta(h)}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} , \tag{3.22}$$

en bon accord avec les résultats particuliers de Nelkin [67]. Ainsi, les équations (3.18) et (3.22) fournissent une description statistique des fluctuations des incréments de vitesse sur toute la gamme d'échelles depuis l'échelle intégrale jusqu'au régime dissipatif profond.

3.4.2 Généralisation du propagateur aux échelles dissipatives

L'expression générale de la densité de probabilité du produit de deux variables indépendantes est donnée par l'égalité (2.29), ce qui revient à adopter l'approche du propagateur. Déterminons en premier lieu la constante de normalisation $\mathcal{Z}$ de la densité de probabilité des exposants h. Plaçons-nous à une échelle l fixe, et déterminons les exposants h qui participent respectivement aux statistiques inertielles et dissipatives à cette échelle particulière. Nous voyons tout d'abord qu'il existe, à cette échelle, un exposant caractéristique $h^*(l/L, \mathbb{R}_e)$ qui délimite les comportements inertiels et dissipatifs (Eq. (3.3)) :

$$l = \eta(h^*) \Leftrightarrow h^*\left(\frac{l}{L}, \mathbb{R}_e\right) = -\left(1 + \frac{\ln \mathbb{R}_e}{\ln(l/L)}\right) ; \tag{3.23}$$

ainsi les exposants $h \geq h^*$ correspondent à des comportements de type dissipatif (Eq. (3.22)), et les exposants $h \leq h^*$ à des comportements de type inertiel (Eq. (3.18)). Remarquons aussi que l'exposant caractéristique de l'échelle l varie entre -1 et $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{l \to 0^+} h^*\left(\frac{l}{L}, \mathbb{R}_e\right) &= -1 \\ \lim_{l \to L^-} h^*\left(\frac{l}{L}, \mathbb{R}_e\right) &= +\infty , \end{aligned} \tag{3.24}$$

et que l'exposant caractéristique $h^*\left(\eta_K/L, \mathbb{R}_e\right)$ à l'échelle de Kolmogorov $\eta_K = L\mathbb{R}_e^{-3/4}$ (Eq. (1.6)) vaut 1/3.

On obtient ainsi la constante de normalisation (ou fonction de partition) des densités de probabilité $\mathbb{P}_l^i(h)$ (Eq. (3.18)) et $\mathbb{P}_l^d(h)$ (Eq. (3.22)) :

$$\mathcal{Z}(l/L, \mathbb{R}_e, \mathcal{D}^E(h)) = \int_{-1}^{h^*} \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} dh + \int_{h^*}^{\infty} \left(\frac{\eta(h)}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} dh \ , \tag{3.25}$$

où $\eta(h)$ est définie dans l'équation (3.3), ce qui détermine complètement la probabilité d'avoir un exposant h à toutes les échelles :

$$\mathbb{P}_l^d(h) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left(\frac{\eta(h)}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} \text{ et } \mathbb{P}_l^i(h) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} \ . \tag{3.26}$$

Ainsi, pour les échelles inertielles $l \geq \eta(h)$ (ou $h \leq h^*$), le propagateur devient

$$G_l(\ln \beta_l^i) = \mathbb{P}_l^i(h) \left[\frac{d \ln \beta_l^i}{dh}\right]^{-1} \ , \tag{3.27}$$

avec

$$\ln \beta_l^i = h \ln \left(\frac{l}{L}\right) \ . \tag{3.28}$$

De même pour les échelles dissipatives $l \leq \eta(h)$ (ou $h \geq h^*$), le propagateur s'écrit

$$G_l(\ln \beta_l^d) = \mathbb{P}_l^d(h) \left[\frac{d \ln \beta_l^d}{dh}\right]^{-1} \ , \tag{3.29}$$

avec

$$\ln \beta_l^d = \ln \left(\frac{l}{L}\right) - \left(\frac{h-1}{h+1}\right) \ln \mathbb{R}_e \ . \tag{3.30}$$

Nous avons représenté dans la figure 3.3, le propagateur (Eqs. (3.27) et (3.29)) en fonction du logarithme du nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ (Eq. (2.42)) et ce pour plusieurs échelles couvrant toute la gamme d'échelles inertielles et dissipatives (contrairement à la figure 2.2 qui se limitait aux nombre de Reynolds locaux supérieurs à l'unité, et donc aux échelles purement inertielles). Nous avons utilisé une forme parabolique pour le spectre $\mathcal{D}^E(h)$ (Eq. (2.27)), de paramètres $c_2 = 0.025$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$; nous avons fixé le nombre de Reynolds à la valeur $\ln \mathbb{R}_e = 20$. Comme nous l'avons montré dans la section 2.3.6, lorsque les échelles varient de L à η^+ (section 3.3.1), le propagateur calculé à partir des équations (3.27) et (3.29) se déforme continûment avec une variance qui augmente comme $-c_2 \ln(L/l)$. Aux échelles $l \ll \eta^-$, on constate que le propagateur sature, sa variance devient indépendante de l'échelle ($C_{2,\beta_l} \to C_{2,\partial_x u} - \pi^2/8$). Dans le domaine dissipatif intermédiaire $l \in [\eta^-, \eta^+]$, la partie gauche du propagateur reflète les statistiques du domaine dissipatif

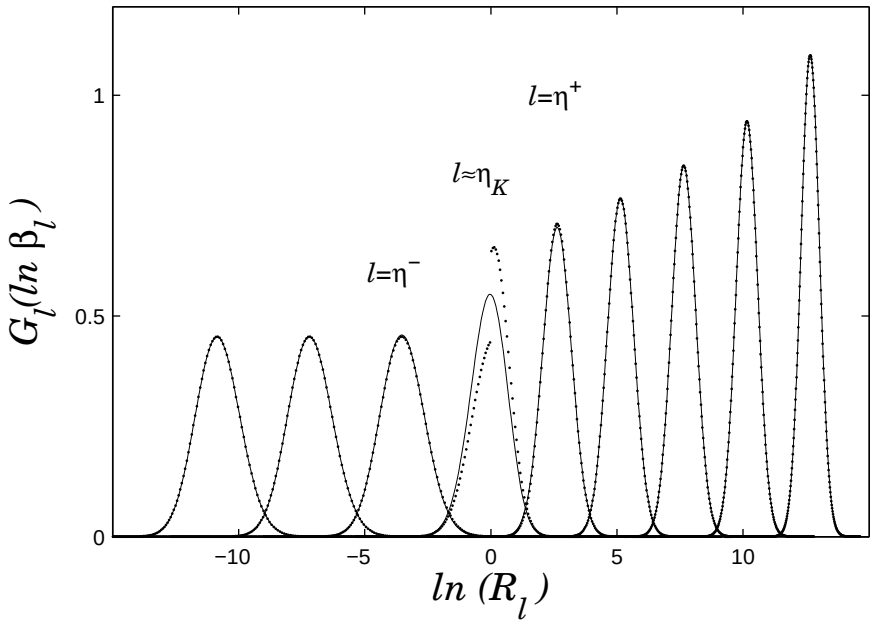

FIG. 3.3 – Représentation du propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ en fonction de $\ln \mathbb{R}_l$ (Eq. (2.42)), à des échelles purement inertielles ($l > \eta^+$), purement dissipatives ($l < \eta^-$), et dans le domaine dissipatif intermédiaire ($l \in [\eta^-, \eta^+]$). Les points noirs correspondent au propagateur donné par les relations (3.27) et (3.29). Ce propagateur n'est pas continu à la traversée de $\mathbb{R}_l = 1$. Le propagateur donné par les relations (3.32) et (3.33) et correspondant à la transition $\mathcal{C}^\infty$ de Batchelor–Meneveau [64, 147, 148] est représenté en trait continu. Le modèle utilisé pour $\mathcal{D}^E(h)$ est le spectre log-normal parabolique défini dans l'équation (2.27) avec comme valeurs des paramètres $c_1 = 0.37$ et $c_2 = 0.025$. Le nombre de Reynolds intervenant dans la définition du nombre de Reynolds local et dans le propagateur est $\ln \mathbb{R}_e = 20$.

($\ln \mathbb{R}_l \langle 0$) et la partie droite celle du domaine inertiel ($\ln \mathbb{R}_l \rangle 0$). Le propagateur n'est pas continu à la traversée de $\mathbb{R}_l = 1$, car un simple calcul permet de vérifier que $G_l(\ln \beta_l^d(h = h^*)) \neq G_l(\ln \beta_l^i(h = h^*))$. Dans la figure 3.3 est aussi représentée en trait continu une autre forme du propagateur qui est continue à la traversée de $\mathbb{R}_l = 1$, et indiscernable du propagateur précédent aux échelles $l > \eta^+$ et $l < \eta^-$. La différence majeure provient de la transition entre les comportements inertiels ($\beta_l^i \sim l^h$) et dissipatifs ($\beta_l^d \sim l$) qui est continue, dans la description précédente, mais pas dérivable :

$$\beta_l^i(h = h^*) = \beta_l^d(h = h^*) \text{ mais } \left(\frac{\partial \beta_l^i(h)}{\partial l}\right)_{h=h^*} \neq \left(\frac{\partial \beta_l^d(h)}{\partial l}\right)_{h=h^*}. \tag{3.31}$$

Dans la suite de ce mémoire, nous proposons une forme de transition qui respecte la continuité de toutes les dérivées de β_l à toutes les échelles, et qui est inspirée des travaux de Batchelor [147] sur la fonction de structure d'ordre 2. Le but est d'inclure dans un seul

couple de fonctions β_l et $\mathbb{P}_l(h)$, l'ensemble des propriétés inertielles et dissipatives. Nous postulerons donc la forme suivante originellement proposée par Meneveau[11] [64] :

$$\beta_l(h,\mathbb{R}_e) = \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^h}{\left[1+\left(\frac{l}{\eta(h)}\right)^{-2}\right]^{(1-h)/2}} \ , \tag{3.32}$$

qui vérifie bien les limites inertielles ($\beta_l \approx \beta_l^i$, pour $L > l \gg \eta(h)$) et dissipatives ($\beta_l \approx \beta_l^d$, pour $l \ll \eta(h)$). La fonction de densité de probabilité des exposants h à l'échelle l s'obtient de la même manière :

$$\mathbb{P}_l(h,\mathbb{R}_e,\mathcal{D}^E(h)) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)}}{\left[1+\left(\frac{l}{\eta(h)}\right)^{-2}\right]^{(\mathcal{D}^E(h)-1)/2}} \ , \tag{3.33}$$

qui vérifie bien les limites inertielles ($\mathbb{P}_l \approx \mathbb{P}_l^i$ pour $L > l \gg \eta(h)$) et dissipatives ($\mathbb{P}_l \approx \mathbb{P}_l^d$ pour $l \ll \eta(h)$), la "constante" de normalisation intervenant dans la relation (3.33) s'écrivant maintenant

$$\mathcal{Z}(l/L,\mathbb{R}_e,\mathcal{D}^E(h)) = \int_{-1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)}}{\left[1+\left(\frac{l}{\eta(h)}\right)^{-2}\right]^{(\mathcal{D}^E(h)-1)/2}} dh \ . \tag{3.34}$$

Le propagateur obtenu à partir des formes (3.32), (3.33) et (3.34) vérifiant la description statistique des incréments longitudinaux de vitesse dans les régimes inertiel et dissipatif, est représenté en trait continu dans la figure 3.3.

3.4.3 Description unifiée de la densité de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse

La fonction de densité de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse $\delta_l u$ peut donc être calculée à toutes les échelles, et pour un nombre de Reynolds donné, moyennant une fonction (paramètrable) $\mathcal{D}^E(h)$, en utilisant[12] dans la relation (2.29) les expressions (3.18) et (3.22) de $\mathbb{P}_l^i$ et $\mathbb{P}_l^d$:

$$\mathcal{P}(\delta_l u) = \int_{h_{\min}}^{h^*} \mathbb{P}_l^i(h)\mathcal{G}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_l^i(h)}\right)\frac{dh}{\beta_l^i(h)} + \int_{h^*}^{h_{\max}} \mathbb{P}_l^d(h)\mathcal{G}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_l^d(h)}\right)\frac{dh}{\beta_l^d(h)} \ . \tag{3.35}$$

[11] Les relations (11) et (13) de la référence [64] font intervenir une constante γ (en cohérence avec la modélisation de Batchelor (Eq. (3.106))) qui n'a pas lieu d'être, comme le mentionne Meneveau lui-même : " *(this formalism) is consistent with the multifractal formalism near the transition between inertial and viscous ranges but not in the far dissipative range, where the scaling of Nelkin should apply instead.*". Il est vrai que le "scaling" de Nelkin dans la référence [67] ne fait pas intervenir cette constante.

[12] On rappelle que la conservation des probabilités implique que $G_l^{i,d}(\ln\beta_l^{i,d})d\ln\beta_l^{i,d} = \mathbb{P}_l^{i,d}(h)dh$.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, il est plus réaliste d'utiliser une transition inertiel-dissipatif qui respecte le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $\beta_l(h)$ en $h = h^*$. La densité de probabilité[13] des incréments de vitesse devient alors :

$$\mathcal{P}(\delta_l u) = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mathbb{P}_l(h) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_l(h)}\right) \frac{dh}{\beta_l(h)} \ , \tag{3.36}$$

où $\beta_l(h)$ et $\mathbb{P}_l(h)$ sont donnés par les relations (3.32) et (3.33) respectivement. Nous avons fait apparaitre dans les expressions (3.35) et (3.36) les bornes d'intégration $h_{\min}$ et $h_{\max}$. Ces bornes ne dépendent pas *a priori* de la forme du spectre $\mathcal{D}^E(h)$ mais sont tributaires de l'utilisation de l'ondelette du pauvre, à savoir les incréments d'ordre un [149]. En effet, comme cela a été remarqué dans la référence [150], l'incrément de vitesse permet d'explorer qu'un domaine limité de valeurs de l'exposant h (Annexe C). Etant donnée sa forme très singulière, l'incrément de vitesse n'est pas adapté à mesurer des exposants h négatifs [150]. De plus, comme il n'a qu'un seul moment nul (Annexes B et C), l'incrément est uniquement sensible aux exposants $h \leq 1$; en d'autres termes le plus grand exposant[14] vu par l'incrément est $h = 1$. C'est pour cela que dans la suite de ce manuscrit, les bornes d'intégration seront prises égales à

$$h_{\min} = 0 \quad \text{et} \quad h_{\max} = 1 \ . \tag{3.37}$$

En effet, qu'ils soient de nature inertielle ou dissipative, les exposants h dont la probabilité est significative sont tels que $\mathcal{D}^E(h) \geq 0$. Les mesures expérimentales [15, 79, 80, 102] indiquent que le spectre des singularités est positif sur un domaine $h \in [0.1, 0.6]$; ainsi les exposants $h \langle 0.1$ et $h \rangle 0.6$ sont infiniment peu probables à la limite des échelles infiniment petites. Nous verrons que dans la description Lagrangienne d'un fluide turbulent (Troisième partie), les exposants h proches de l'unité ont des probabilités significatives, ce qui nous conduira à considérer les incréments de vitesse d'ordre supérieur à 1 pour rendre compte de l'intermittence des fluctuations de vitesse Lagrangienne. Dans la mesure où les valeurs de h dont la probabilité est significative sont comprises dans l'intervalle $h_{\min} = 0 < 0.1 < h < 0.6 < h_{\max} = 1$ dans le cas Eulérien, nous limiterons dans ce cas notre étude à la statistique des incréments de vitesse d'ordre 1.

3.4.4 Expressions des fonctions de structure et des cumulants

L'expression (3.35) de $\mathcal{P}(\delta_l u)$ donne accès à toutes les quantités caractérisant les statistiques à un point[15] comme les fonctions de structure ($\langle (\delta_l u)^q \rangle$), les cumulants du logarithme des incréments de vitesse ($C_{n,\delta_l u}$), et le spectre de puissance[16]. On obtient ainsi pour la

[13] Par souci de clarté, nous utilisons la notation $\mathcal{P}_l(\delta_l u) = \mathcal{P}(\delta_l u)$.

[14] Plus généralement, le plus grand exposant vu par l'incrément d'ordre N, $\delta^{(N)}$, est $h = N$ (Annexe C) [112, 150].

[15] Nous appelerons statistiques à un point, les statistiques faisant intervenir seulement la densité de probabilité des exposants h, et non pas leur corrélation ($\langle h(x)h(y) \rangle$).

[16] Nous reviendrons sur ce point dans la Section 3.7 consacrée à l'analyse spectrale.

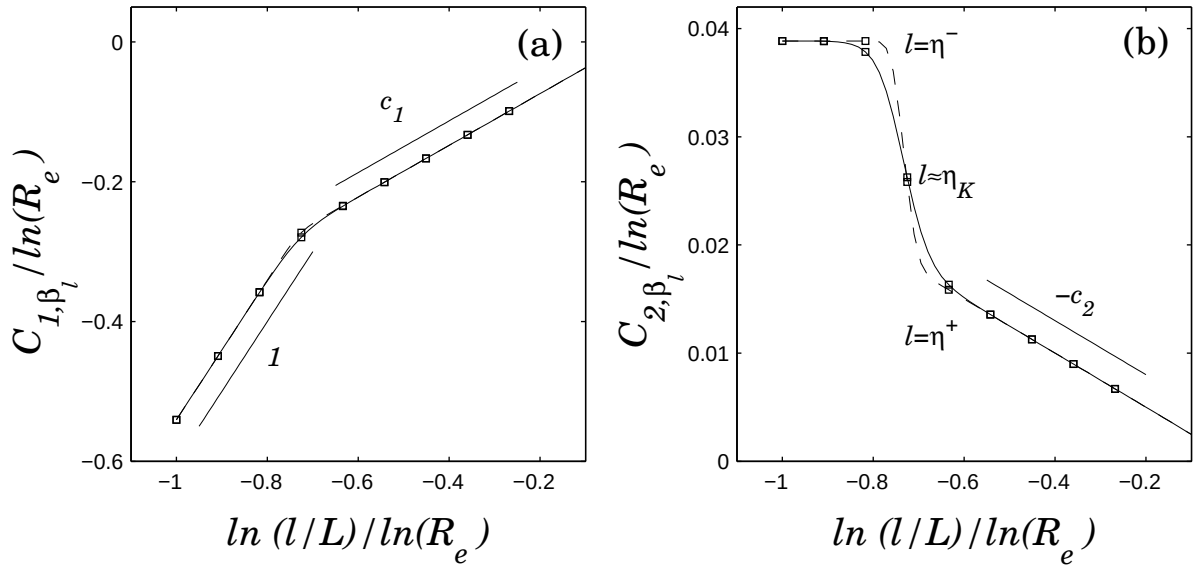

FIG. 3.4 – Représentation des cumulants du logarithme des incréments longitudinaux de vitesse C_{1,β_l} (a) et C_{2,β_l} (b), normalisé par $\ln \mathbb{R}_e$, en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$. Les carrés indiquent les échelles utilisées dans la figure 3.3. En trait discontinu sont représentés les cumulants obtenus par la relation (3.40) et en trait continu ceux obtenus avec la transition de Batchelor–Meneveau (Eq. (3.41)). Le modèle utilisé pour $\mathcal{D}^E(h)$ est le spectre log-normal parabolique (Eq. (2.27)), pour les valeurs des paramètres $c_1 = 0.37$ et $c_2 = 0.025$. Le nombre de Reynolds est égal à $\mathbb{R}_e = \exp(20)$.

fonction de structure[17] d'ordre q :

$$\begin{aligned}\langle(\delta_l u)^q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_l u)^q \mathcal{P}(\delta_l u) d\delta_l u \ , \\ &= \langle \delta^q \rangle \left(\int_{h_{\min}}^{h^*} [\beta_l^i(h)]^q \mathbb{P}_l^i(h) dh + \int_{h^*}^{h_{\max}} [\beta_l^d(h)]^q \mathbb{P}_l^d(h) dh \right) \ ,\end{aligned} \tag{3.38}$$

ou alternativement en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eq. (3.36)) :

$$\langle(\delta_l u)^q\rangle = \langle \delta^q \rangle \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} [\beta_l(h)]^q \mathbb{P}_l(h) dh \ . \tag{3.39}$$

[17]Dans un premier temps, on s'intéressera uniquement aux ordres q pairs (ou aux statistiques des amplitudes $\langle|\delta_l u|^q\rangle$), les fonctions de structure d'ordre q impair étant prédites identiquement nulles de par le caractère symétrique de la densité $\mathcal{G}$ Gaussienne. Nous reviendrons sur ce point dans la Section 3.6 consacrée à la Skewness.

De même pour les cumulants du logarithme, construits à partir des moments de $\ln \beta_l$ (Annexe D), on obtient à partir de l'équation (3.35) :

$$\langle (\ln \beta_l)^q \rangle = \int_{h_{\min}}^{h^*} [\ln \beta_l^i(h)]^q \mathbb{P}_l^i(h) dh + \int_{h^*}^{h_{\max}} [\ln \beta_l^d(h)]^q \mathbb{P}_l^d(h) dh \ , \tag{3.40}$$

ou alternativement en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eq. (3.36)) :

$$\langle (\ln \beta_l)^q \rangle = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} [\ln \beta_l(h)]^q \mathbb{P}_l(h) dh \ . \tag{3.41}$$

Nous avons représenté dans la figure 3.4, les cumulants d'ordre 1, $C_{1,\beta_l} = \langle \ln \beta_l \rangle$, d'ordre 2, $C_{2,\beta_l} = \langle (\ln \beta_l)^2 \rangle - \langle \ln \beta_l \rangle^2$, normalisés par $\ln \mathbb{R}_e$, en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$. En trait discontinu sont représentés les cumulants evalués via l'équation (3.40), et en trait continu ceux obtenus en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eq. (3.41)). Dans cette figure, les symboles carrés (□) correspondent aux échelles présentées dans la figure 3.3. Dans le domaine inertiel ($l > \eta^+$), les deux cumulants se comportent bien linéairement en fonction de $\ln(l/L)$, $C_{1,\beta_l} = c_1 \ln l/L$ et $C_{2,\beta_l} = -c_2 \ln(l/L)$, confirmant que les fonctions de structures (Annexe D) se comportent bien comme des lois de puissance. Remarquons que dans ce domaine d'échelles, les deux descriptions sont indiscernables, en cohérence avec la figure 3.3. Dans le domaine dissipatif profond, $l < \eta^-$, $C_{2,\beta_l} = C_{2,\partial_x u} - \pi^2/8$ est indépendant de l'échelle et $C_{1,\beta_l} = \ln(l/L) + \text{cste}(\mathbb{R}_e)$. De la même manière, les valeurs des cumulants à ces échelles sont indépendantes de la forme de la transition employée pour $\beta_l(h)$ ($\mathcal{C}^0$ ou $\mathcal{C}^\infty$). Dans le régime dissipatif intermédiaire, C_{2,β_l} subit une "accélération" d'autant plus importante que la transition ne respecte pas la continuité des dérivées de β_l, et C_{1,β_l} transite continûment entre le comportement inertiel et celui du dissipatif profond.

3.4.5 Prédictions dans le régime dissipatif profond

La "flatness" de la dérivée de la vitesse

Un des estimateurs importants de la turbulence est la "flatness" $F(l)$ [1–3], qui caractérise "l'applatissement" des densités de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse et qui a la propriété de tendre vers une limite finie (et *a priori* non nulle) lorsque les échelles tendent vers zéro :

$$F(l) = \frac{\langle (\delta_l u)^4 \rangle}{\langle (\delta_l u)^2 \rangle^2} \ . \tag{3.42}$$

La première prédiction que l'on peut faire à partir du formalisme développé dans les sections précédentes, concerne la dépendance dans le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ de la flatness de la dérivée de la vitesse :

$$\lim_{l/L \to 0} F(l) = \frac{\langle (\partial_x u)^4 \rangle}{\langle (\partial_x u)^2 \rangle^2} \ . \tag{3.43}$$

Remarquons tout de suite que la flatness d'une Gaussienne est égale à 3 (Eq. (2.36)). Le formalisme multifractal (Eq. (3.38)) permet alors de calculer la flatness à toutes les échelles, et plus spécialement la flatness de la dérivée, en utilisant[18] les relations (3.3) et (3.38) :

$$\lim_{l/L\to 0} F(l) = F_{\partial_x u}(\mathbb{R}_e) = 3\mathcal{Z}\frac{\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mathbb{R}_e^{-\frac{4(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh}{\left(\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mathbb{R}_e^{-\frac{2(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh\right)^2}. \tag{3.44}$$

En travaillant dans la limite $\mathbb{R}_e \to +\infty$, il est possible d'estimer l'expression (3.44) en appliquant le théorème du col. On obtient, en négligeant les constantes additives[19],

$$\ln F_{\partial_x u}(\mathbb{R}_e) \approx -\ln \mathbb{R}_e \left[\min_h \left(\frac{4(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}\right) - 2\min_h \left(\frac{2(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}\right)\right]. \tag{3.45}$$

Dans un cadre log-normal de paramètres $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$ et $c_2 = 0.025$ (Eq. (2.66)), il est possible d'obtenir une expression analytique (mais compliquée) des minima intervenant dans la relation (3.45). En utilisant le fait qu'à grand nombre de Reynolds, $\mathbb{R}_\lambda \sim \sqrt{\mathbb{R}_e}$, on trouve que :

$$F_{\partial_x u}(\mathbb{R}_e) \sim \mathbb{R}_\lambda^{0.37} . \tag{3.46}$$

Ce résultat, déjà présent dans le travail théorique de Nelkin [67], est en bon accord avec les mesures effectuées par différents groupes expérimentaux [68–70].

Les cumulants du logarithme de la dérivée de la vitesse - Facteur d'amplification

L'expression générale du moment d'ordre q des incréments longitudinaux de vitesse permet de calculer les cumulants du logarithme à tout ordre (Annexe D). Plus précisemment, pour $l \ll \eta^-$, l'équation (3.38) peut être réécrite sous la forme :

$$\langle|\delta_l u|^q\rangle \underset{l\langle\langle\eta^-}{=} l^q\langle|\partial_x u|^q\rangle = K_q\sigma^q\left(\frac{l}{L}\right)^q \frac{\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mathbb{R}_e^{-\frac{q(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh}{\int_{-1}^{+\infty} \mathbb{R}_e^{-\frac{1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh} , \tag{3.47}$$

où $K_q(\sigma/L)^q$ est le moment (en valeur absolue) d'ordre q d'une Gaussienne centrée de variance $(\sigma/L)^2$ (Eq. (2.37)). On peut montrer[20] que dans la limite $\mathbb{R}_e \to +\infty$, $C_{n,\partial_x u} =$

[18] On utilise aussi le fait que $\lim_{l\to 0^+} h^*(l/L, \mathbb{R}_e) = -1$ (Eq. (3.24)).

[19] Ces constantes sont négligeables dans la limite $\mathbb{R}_e \to +\infty$.

[20] Les cumulants d'une Gaussienne sont donnés dans l'Annexe D et la technique de calcul employée est celle donnée par la relation (D.8). On remarquera aussi que la constante de normalisation est indépendante de q et que $\ln\langle|\delta_l u|^0\rangle = 0$. Un logiciel de calcul symbolique sérieux permet alors d'obtenir l'équation (3.48).

$C_n^\infty + C_{n,\delta}$ avec

$$\begin{aligned} C_1^\infty &= \frac{1-c_1}{1+c_1}\ln \mathbb{R}_e \ , \\ C_2^\infty &= \frac{4c_2}{(1+c_1)^3}\ln \mathbb{R}_e \ , \\ C_3^\infty &= \frac{24c_2^2}{(1+c_1)^5}\ln \mathbb{R}_e \ , \\ C_n^\infty &\propto \frac{c_2^{n-1}}{(1+c_1)^{2n-1}}\ln \mathbb{R}_e \text{ pour } n \geq 2 \ . \end{aligned} \tag{3.48}$$

La **loi des 9/4** [15, 66] (Eq. (3.9)) obtenue de façon phénoménologique dans la section 3.3.1, stipule que le cumulant d'ordre 2 est multiplié par un facteur approximativement égal à 9/4 à la traversée du domaine dissipatif intermédiaire. En reprenant les notations définies dans la section 3.3.1, il est naturel d'assimiler $C_{2,\beta_{\eta^-}}$ à C_2^∞. L'échelle η^+ est la plus petite échelle inertielle, donc $C_{2,\beta_{\eta^+}} = c_2 \ln(L/\eta^+)$. En assimilant η^+ à $\eta(\langle h \rangle)$ (Eq. (3.3) avec $\langle h \rangle = c_1$), on retrouve bien :

$$\frac{C_{2,\beta_{\eta^-}}}{C_{2,\beta_{\eta^+}}} \approx \frac{4}{(1+c_1)^2} \approx \frac{9}{4} \ . \tag{3.49}$$

3.4.6 Le régime dissipatif intermédiaire : dépendance dans le nombre de Reynolds

Les arguments dimensionnels de la section 3.3.2 permettent d'estimer la dépendance dans le nombre de Reynolds de l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire, c'est-à-dire $\ln(\eta^+/\eta^-) \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$ (Eq. (3.12)). Comme l'étendue du régime inertiel varie comme $\ln(\eta_K/L) \sim \ln \mathbb{R}_e$, le cumulant d'ordre 2 à l'échelle η^+ se comporte de la même manière $C_{2,\beta_{\eta^+}} \approx C_{2,\beta_{\eta_K}} \sim \ln \mathbb{R}_e$. Comme à l'échelle η^- ce cumulant se comporte toujours comme $C_2^\infty \sim \ln \mathbb{R}_e$, une façon de caractériser $\ln(\eta^+/\eta^-)$ est d'étudier la variation de C_{2,β_l} avec $\ln(l/L)$ dans le domaine d'échelles compris entre η^- et η^+. La figure 3.4 montre clairement que "l'accélération" du cumulant d'ordre 2 n'est pas constante. Nous nous sommes donc intéressés à représenter dans la figure 3.5(a), la dérivée logarithmique du cumulant d'ordre 2, $\partial C_{2,\beta_l}/\partial \ln(l/L)$, en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$ dans le régime dissipatif intermédiaire, pour une valeur du nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e \approx 30$. Nous avons représenté par un trait continu le cumulant d'ordre 2 obtenu avec la formalisation (Eq. (3.41)) de la transition de Batchelor–Meneveau et en trait pointillé celui obtenu avec l'équation (Eq. (3.40)). On constate que la dérivée n'est pas constante et présente un minimum. Dans la figure 3.5(b) ce minimum, $\min_l \partial C_{2,\beta_l}/\partial \ln(l/L)$, est représenté en fonction de $\sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$. La linéarité des résultats obtenus aussi bien avec la transition de Batchelor–Meneveau (□), qu'avec la

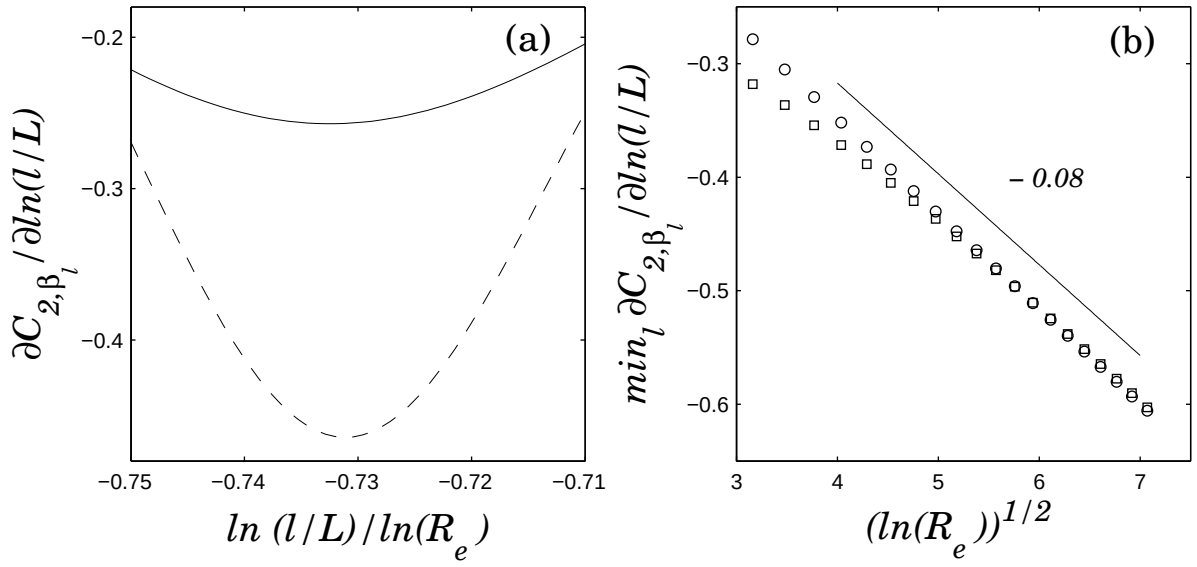

FIG. 3.5 – (a) Dérivée logarithmique du cumulant d'ordre 2, $\partial C_{2,\beta_l}/\partial \ln(l/L)$, en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$ à un nombre de Reynolds donné ($\ln \mathbb{R}_e \approx 30$), pour la transition $\mathcal{C}^0$ (trait discontinu) et pour la transition de Batchelor–Meneveau (trait continu). (b) Minimum de la dérivée logarithmique $\min_l \partial C_{2,\beta_l}/\partial \ln(l/L)$ en fonction de $\sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$, obtenu avec la transition $\mathcal{C}^0$ ($\circ$) et la transition de Batchelor–Meneveau ($\square$). Les minima obtenus avec cette dernière sont représentés en (b) en les décalant arbitrairement en ordonnée afin de les comparer.

transition $\mathcal{C}^0$ ($\circ$) permet de conclure[21] que l'étendue du régime dissipatif intermédiaire varie comme $\sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$ dans la limite des nombres de Reynolds infinis :

$$\min_{l \in [\eta^-, \eta^+]} \frac{\partial C_{2,\beta_l}}{\partial \ln(l/L)} \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e} \ . \tag{3.50}$$

3.4.7 Généralisation en fonction de l'ordre de l'ondelette analysatrice

Dans les Annexes B et C, nous présentons de façon générale la transformée en ondelettes comme une généralisation de l'analyse des incréments pour l'étude des singularités localisées dans les dérivées d'ordre supérieur du signal étudié [98, 112–115]. Dénotons par N l'ordre de l'ondelette analysatrice, c'est-à-dire son nombre de moments nuls. Ainsi, l'incrément $\delta_l^{(1)} u$ est une ondelette dite "du pauvre" d'ordre $N = 1$ [149, 150]. La discrétisation du Laplacien $\delta_l^{(2)} u(x) = u(x + 2l) - 2u(x + l) + u(x)$ (Eq. (B.5)) est d'ordre $N = 2$. Dans le

[21] Nous aurions aussi pu montrer que les courbes $\partial C_{2,\beta_l}/\partial \ln(l/L)$, en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$, obtenues pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds, se superposent toutes sur une même courbe autour de leur minimum lorsque la dérivée logarithmique du cumulant d'ordre 2 est renormalisée par $\sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$.

domaine dissipatif, l'incrément $\delta_l^{(1)}u$ se comporte comme l'échelle l. De manière générale, l'analycité du signal de vitesse impose que l'incrément d'ordre N se comporte comme l^N. On peut ainsi écrire que

$$\delta_l^{(N)}u \underset{l\to 0}{\sim} l^N \frac{\partial^N u}{\partial x^N} \ . \tag{3.51}$$

Les statistiques des fluctuations de vitesse sont *a priori* inchangées dans le domaine inertiel puisque la forme du spectre $\mathcal{D}^E(h)$ montre que les valeurs de l'exposant $h > 1$ sont infiniment peu probables. Ainsi, l'ondelette d'ordre $N = 1$ suffit *a priori* pour identifier l'ensemble de la gamme des valeurs de l'exposant h présentes dans le signal de vitesse turbulente. Toutefois, nous allons voir que l'utilisation des ondelettes d'ordre supérieur permet de distinguer clairement les échelles dissipatives des échelles inertielles.

La loi des $9/4$

La vitesse du maximum du propagateur (Eq. (3.5)) dans le domaine dissipatif devient, lorsque l'ondelette analysatrice est d'ordre N,

$$\frac{\partial\langle \ln \mathbb{R}_l^{(N)}\rangle}{\partial \ln\left(\frac{l}{L}\right)} = N + 1 \ . \tag{3.52}$$

La relation (3.9), appelée **loi des 9/4**, se généralise alors avec une ondelette d'ordre N sous la forme

$$\frac{C_{2,\beta_{\eta^-}}}{C_{2,\beta_{\eta^+}}} \approx \left(\frac{N+1}{c_1+1}\right)^2 \ . \tag{3.53}$$

Formalisme multifractal

Il est possible de généraliser le propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ (Eq. (2.29)) à une ondelette d'ordre N quelconque, ce qui permet d'interpréter l'incrément d'ordre N de vitesse comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes (généralisation de l'équation (2.32)) :

$$\delta_l^{(N)}u = \beta_l^{(N)}(h, \mathbb{R}_e)\delta \ , \tag{3.54}$$

où δ est Gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma_N^2 = \mathrm{Var}(\delta_L^{(N)}u)$. Dans le cadre de la transition $\mathcal{C}^\infty$ de Batchelor–Meneveau [64, 147], la vitesse caractéristique $\beta_l^{(N)}(h, \mathbb{R}_e)$ (Eq. (3.32)) s'écrit alors sous la forme

$$\beta_l^{(N)}(h, \mathbb{R}_e) = \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^h}{\left[1 + \left(\frac{l}{\eta(h)}\right)^{-2}\right]^{(N-h)/2}} \ , \tag{3.55}$$

qui vérifie bien les limites inertielles ($\beta_l \sim l^h$ pour $L > l \gg \eta(h)$) et dissipatives ($\beta_l \sim l^N$ pour $l \ll \eta(h)$). La fonction de densité de probabilité (Eq. (3.33)) des exposants h à l'échelle

l reste inchangée :

$$\mathbb{P}_l(h, \mathbb{R}_e, \mathcal{D}^E(h)) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)}}{\left[1 + \left(\frac{l}{\eta(h)}\right)^{-2}\right]^{(\mathcal{D}^E(h)-1)/2}} \ , \tag{3.56}$$

de même que la "constante" de normalisation (Eq. (3.34)) intervenant dans la relation (3.56) :

$$\mathcal{Z}(l/L, \mathbb{R}_e, \mathcal{D}^E(h)) = \int_{-1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)}}{\left[1 + \left(\frac{l}{\eta(h)}\right)^{-2}\right]^{(\mathcal{D}^E(h)-1)/2}} dh \ . \tag{3.57}$$

Il est alors possible d'obtenir la densité de probabilité $\mathcal{P}(\delta_l^{(N)} u)$ de l'incrément longitudinal d'ordre N de la vitesse sous la forme :

$$\mathcal{P}(\delta_l^{(N)} u) = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}^{(N)}} \mathbb{P}_l(h) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_l u}{\beta_l^{(N)}(h)}\right) \frac{dh}{\beta_l^{(N)}(h)} \ . \tag{3.58}$$

La relation (3.58) fait intervenir les constantes $h_{\min}$ et $h_{\max}^{(N)}$ qui dépendent fortement de l'ondelette analysatrice. L'incrément d'ordre N de la vitesse $\delta_l^{(N)} u$ n'est pas adapté pour mesurer les exposants h négatifs. Il est orthogonal aux polynômes d'ordre N, ce qui permet d'accéder aux exposants $h \leq N$ [150]. Dans la suite de ce mémoire, l'utilisation des incréments d'ordre N nous permettra, si nécessaire, d'étendre le domaine d'intégration dans l'équation (3.58) aux valeurs de h comprises entre :

$$h_{\min} = 0 \quad \text{et} \quad h_{\max}^{(N)} = N \ . \tag{3.59}$$

Flatness des dérivées d'ordre supérieur de la vitesse longitudinale

L'utilisation des incréments d'ordre N permet de mesurer la flatness des dérivées $N^{\text{ième}}$ de la vitesse, étude déjà abordée par Nelkin [67] dans le cadre du formalisme multifractal. La relation (3.44) obtenue pour un incrément d'ordre 1 se généralise de la façon suivante

$$F_{\partial_x^{(N)} u}(\mathbb{R}_e) = \frac{\langle \left(\frac{\partial^N u}{\partial x^N}\right)^4 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial^N u}{\partial x^N}\right)^2 \rangle^2} = 3\mathcal{Z} \frac{\int_{h_{\min}}^{h_{\max}^{(N)}} \mathbb{R}_e^{-\frac{4(h-N)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh}{\left(\int_{h_{\min}}^{h_{\max}^{(N)}} \mathbb{R}_e^{-\frac{2(h-N)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh\right)^2} \ , \tag{3.60}$$

et la relation (3.45) devient

$$-\frac{\ln F_{\partial_x^{(N)} u}(\mathbb{R}_e)}{\ln \mathbb{R}_e} \approx \min_h \left(\frac{4(h-N)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}\right) - 2 \min_h \left(\frac{2(h-N)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}\right) \ . \tag{3.61}$$

Les cumulants du logarithme de la dérivée $N^{\text{ième}}$ de la vitesse

L'équation (3.47) se généralise de la façon suivante aux incréments d'ordre N :

$$\langle|\delta_l^{(N)}u|^q\rangle \underset{l\ll\eta^-}{\sim} l^{Nq}\langle|\partial_x^{(N)}u|^q\rangle = K_q\sigma^q\left(\frac{l}{L}\right)^{Nq}\frac{\int_{h_{\min}}^{h_{\max}^{(N)}}\mathbb{R}_e^{-\frac{q(h-N)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}}dh}{\int_{-1}^{+\infty}\mathbb{R}_e^{-\frac{1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}}dh}\ , \tag{3.62}$$

où $K_q(\sigma/L)^q$ est le moment (en valeur absolue) d'ordre q d'une Gaussienne centrée de variance $(\sigma/L)^2$ (Eq. (2.37)). On peut montrer que dans la limite $\mathbb{R}_e \to +\infty$, $C_{n,\partial_x^{(N)}u} = C_n^\infty(N) + C_{n,\delta}$, avec comme généralisation de l'équation (3.48) :

$$\begin{aligned}
C_1^\infty(N) &= \frac{N-c_1}{1+c_1}\ln\mathbb{R}_e\ ,\\
C_2^\infty(N) &= \frac{(N+1)^2c_2}{(1+c_1)^3}\ln\mathbb{R}_e\ ,\\
C_3^\infty(N) &= \frac{3(N+1)^3c_2^2}{(1+c_1)^5}\ln\mathbb{R}_e\ ,\\
C_n^\infty(N) &\propto \frac{(N+1)^nc_2^{n-1}}{(1+c_1)^{2n-1}}\ln\mathbb{R}_e \text{ pour } n\geq 2\ .
\end{aligned} \tag{3.63}$$

La **loi des 9/4** généralisée à une ondelette d'ordre N dans un cadre phénomènologique (Eq. (3.53)) stipule que le cumulant d'ordre 2 est multiplié par un facteur $(N+1)^2/(c_1+1)^2$ à la traversée du domaine dissipatif intermédiaire [66]. En reprenant les notations définies dans la section 3.3.1, il est naturel d'assimiler $C_{2,\beta_{\eta^-}}$ à $C_2^\infty(N)$. L'échelle η^+ est la plus petite échelle inertielle, donc $C_{2,\beta_{\eta^+}} = c_2\ln(L/\eta^+)$. En assimilant η^+ à $\eta(\langle h\rangle)$ (Eq. (3.3) avec $\langle h\rangle = c_1$), on retrouve bien :

$$\frac{C_{2,\beta_{\eta^-}}}{C_{2,\beta_{\eta^+}}} \approx \frac{(N+1)^2}{(1+c_1)^2}\ . \tag{3.64}$$

3.5 Analyse en cumulants des données expérimentales et numériques de vitesse longitudinale

Dans la figure 3.6, nous avons reporté les résultats de l'estimation statistique des trois premiers cumulants $C_n = C_{n,\delta_l u} - C_{n,\delta_L u}$, en fonction de $\ln(l/L)$, obtenus à partir du signal expérimental de Baudet et Naert [10–13, 142] ($\mathbb{R}_\lambda = 380$) et du signal numérique de Lévêque [105] ($\mathbb{R}_\lambda = 140$). En fait, nous avons effectué une étude comparative des cumulants obtenus à partir de l'incrément d'ordre un $\delta_l^{(1)}u(x) = u(x+l) - u(x)$ ($\circ$), avec ceux obtenus à partir de l'incrément d'ordre deux $\delta_l^{(2)}u(x) = u(x+2l) - 2u(x+l) + u(x)$ ($\square$). Dans le domaine inertiel ($\ln(l/L) \gtrsim -4.5$ pour l'expérience et $\ln(l/L) \gtrsim -2$ pour la DNS), les cumulants obtenus avec ces deux méthodes sont indiscernables, en parfaite

cohérence[22] avec la description théorique adoptée dans ce manuscrit. Nous renvoyons le lecteur à la section 2.4 pour une discussion détaillée du comportement des cumulants dans le domaine inertiel. Nous nous focalisons ici principalement sur les domaines dissipatifs intermédiaire et profond. Sur la figure 3.6, nous avons superposé sur les mêmes graphiques, les cumulants théoriques C_{n,β_l} obtenus à partir de l'équation (3.41), en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eqs. (3.55) et (3.56)), pour une ondelette d'ordre $N = 1$ (traits continus) et d'ordre 2 (traits discontinus). Un algorithme de minimisation des moindres carrés sur les deux premiers cumulants C_1 et C_2 donne, dans un cadre log-normal, un coefficient d'intermittence $c_2 = 0.023$ pour l'expérience et $c_2 = 0.029$ pour la DNS. Les nombres de Reynolds obtenus[23] par cette minimisation sont respectivement $\ln \mathbb{R}_e = 6.263$ pour l'expérience et $\ln \mathbb{R}_e = 3.1773$ pour la DNS. Remarquons que les échelles intégrales L utilisées dans cette description sont supérieures à celles traditionnellement définies à partir de la fonction d'auto-corrélation de la vitesse [1, 2] :

$$L > \mathcal{L} = \int_{l=0}^{+\infty} \frac{\langle u(x)u(x+l)\rangle}{\sigma_u^2} dl \ . \tag{3.65}$$

Dans le domaine dissipatif, le premier cumulant C_1 devient proportionnel à $\ln(l/L)$ avec l'incrément d'ordre un et proportionnel à $2\ln(l/L)$ avec l'incrément d'ordre 2, en bon accord avec nos prédictions théoriques. Le cumulant d'ordre 2 estimé à partir de $\delta_l^{(1)}u$ (resp. $\delta_l^{(2)}u$) est quant à lui multiplié par un facteur environ égal à 9/4 [15, 66] (resp. $(9/4)^2$) à la traversée du régime dissipatif intermédiaire. Cette amplification est correctement décrite par l'extension du formalisme multifractal (Eq. (3.64)) que nous avons présentée dans les sections précédentes. Nous voulons insister sur le fait que l'utilisation des incréments (ou ondelettes) d'ordre supérieur permet de distinguer clairement[24] les comportements dits inertiels (qui ne dépendent pas de l'ordre de l'ondelette), des comportements dits dissipatifs (qui en dépendent fortement). Le cumulant d'ordre 3 est présenté dans la figure 3.6(c) pour l'expérience et dans la figure 3.6(f) pour la DNS. Une description log-normale impose sa nullité dans le domaine inertiel, ainsi qu'un comportement non trivial dans les domaines dissipatifs intermédiaire et profond. Les résultats obtenus montrent clairement un écart aux statistiques log-normales (principalement pour les résultas numériques à bas Reynolds), aussi bien dans l'inertiel[25] que dans le domaine dissipatif. Les variations prédites par la présente description log-normale s'effectuent cependant dans le bon sens[26],

[22] Les exposants $h \geq 0.6$ sont infiniment peu probables ($\mathbb{P}_l^i(h) \approx 0$) ; de plus ni $\mathbb{P}_l^i(h)$, ni $\beta_l^i(h)$, ne dépendent de l'ordre N de l'ondelette.

[23] Les nombres de Reynolds obtenus sont cohérents avec l'existence d'un nombre de Reynolds critique $\mathbb{R}^* = 56$ [102, 103]. La relation (3.78) permet ainsi de calculer $\ln \mathbb{R}_e = \ln(380^2/(14 \times 56)) = 5.22$ pour l'expérience et $\ln \mathbb{R}_e = \ln(140^2/(14 \times 56)) = 3.22$ pour la DNS.

[24] Et surtout de façon beaucoup plus précise que l'étude du spectre de puissance. Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.7 consacrée au spectre de puissance.

[25] $C_3 = c_3 \ln(l/L)$ avec $c_3 \approx 0.005$, comportement d'autant moins soumis à des effets de courbure dans le domaine inertiel que l'ordre de l'incrément est élevé.

[26] Diminution puis augmentation du C_3 vers une saturation positive (Eq. (3.63)) dans le sens des échelles décroissantes.

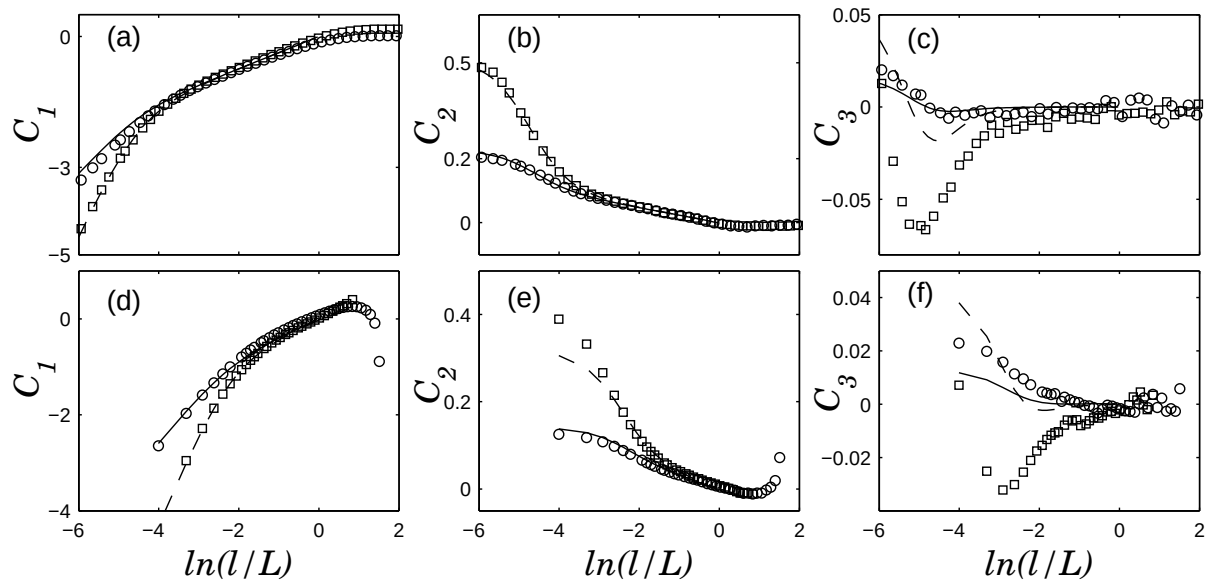

FIG. 3.6 – Représentation des trois premiers cumulants du logarithme $C_n = C_{n,\delta_l u} - C_{n,\delta_L u}$ des incréments d'ordre 1 ($\delta_l^{(1)} u(x) = u(x+l) - u(x)$)($\circ$) et d'ordre 2 ($\delta_l^{(2)} u(x) = u(x+2l) - 2u(x+l) + u(x)$)($\square$) en fonction de $\ln(l/L)$. *Signaux expérimentaux de Baudet-Naert* ($\mathbb{R}_\lambda = 380$) : (a) C_1, (b) C_2 et (c) C_3. Sur ces figures sont aussi représentés les cumulants théoriques C_{n,β_l} obtenus à partir de l'équation (3.41), en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eqs. (3.55) et (3.56)), pour une ondelette d'ordre $N = 1$ (traits continus) et d'ordre 2 (traits discontinus), dans un cadre log-normal de paramètres $c_2 = 0.023$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$, et pour un nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 6.263$. *Signaux numériques de DNS de Lévêque* ($\mathbb{R}_\lambda = 140$) : (d) C_1, (e) C_2 et (f) C_3. Les cumulants théoriques sont obtenus comme précédemment, dans un cadre log-normal de paramètres $c_2 = 0.029$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.38$, et pour un nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 3.1773$.

mais avec une amplitude plus faible que celle observée dans les données. En fait, le comportement de C_3 dans le domaine dissipatif intermédiaire dépend sensiblement de la forme du spectre $\mathcal{D}^E(h)$, et notament de son terme cubique. Alors que sa saturation dans le dissipatif profond ne dépend que de ce spectre (Eq. (3.63)), son "accélération" dans le régime dissipatif intermédiaire dépend aussi fortement de la forme empirique de la transition de Batchelor–Meneveau. Toutefois, les résultas présentés dans la figure 3.6 permettent de conclure que dans le cadre du formalisme multifractal [64, 66, 67], la description log-normale permet de très bien décrire les statistiques des amplitudes des incréments $|\delta_l u|$, avec une fonction $\mathcal{D}^E(h)$ parabolique qui ne dépend que faiblement de la géométrie de l'écoulement (c_2 universel) et qui pilote à la fois les comportements dissipatifs et inertiels, observés respectivement à des échelles plus petites ou plus grandes que l'échelle intrinsèque $\eta(h)$ [62, 63].

Nous nous intéresserons dans la suite de ce chapitre aux statistiques des incréments signés, $\langle(\delta_l u)^q\rangle$, q pouvant prendre désormais des valeurs impaires. Nous allons voir que le phénomène de "Skewness" [1, 2, 5], lié à l'asymétrie des densités de probabilité des incréments (Fig. 1.2), peut tout à fait être modélisé dans la présente description.

3.6 Notes sur la Skewness

La figure 1.2 montre clairement que les densités de probabilité des incréments de vitesse ne sont pas symétriques. Les incréments négatifs sont plus probables que les incréments positifs. C'est le phénomène de **Skewness** [1–3, 5].

3.6.1 Mesures expérimentales et numériques

Comme l'indique la relation de Kármán-Howarth-Monin [1, 3] dérivée directement des équations de Navier-Stokes et qui généralise en présence de viscosité finie la loi des 4/5 (Eq. (2.3)) :

$$\langle(\delta_l u)^3\rangle = -\frac{4}{5}\langle\epsilon\rangle l + 6\nu\frac{d\langle(\delta_l u)^2\rangle}{dl} \ , \tag{3.66}$$

le moment d'ordre 3 des incréments de vitesse est non nul. Remarquons dès à présent que cette relation contient en son sein l'approximation de la dissipation locale (Eq. (2.46)) [1, 145, 146] :

$$\langle\epsilon\rangle \approx 15\nu\langle(\partial_x u)^2\rangle \ , \tag{3.67}$$

puisque dans la limite[27] $l \to 0$, en approximant $d\langle(\delta_l u)^2\rangle/dl$ par $2l\langle(\partial_x u)^2\rangle$, l'équation (3.66) implique directement la relation (3.67). La Skewness $S(l)$ quantifie l'asymétrie des densités de probabilité des incréments de vitesse

$$S(l) = \frac{\langle(\delta_l u)^3\rangle}{\langle(\delta_l u)^2\rangle^{3/2}} \ , \tag{3.68}$$

et permet d'étudier, dans la limite des petites échelles, les statistiques des dérivées [1, 67],

$$\lim_{l\to 0} S(l) = S_{\partial_x u} = \frac{\langle(\partial_x u)^3\rangle}{\langle(\partial_x u)^2\rangle^{3/2}} \ . \tag{3.69}$$

Dans le domaine inertiel, l'intermittence[28] (Eq. (2.1)) des fluctuations de vitesse implique que cette quantité dépende de l'échelle :

$$S(l) \sim l^{\zeta_3^E - \frac{3}{2}\zeta_2^E} \ . \tag{3.70}$$

Nous présentons dans la figure 3.7, l'estimation à partir des signaux expérimentaux et

[27] $\langle(\delta_l u)^3\rangle \to 0$ dans la limite $l \to 0$.

[28] Dans la suite de ce manuscript, nous admettrons, comme une bonne approximation, que les moments signés $(\delta_l u)^q$ et non signés $|\delta_l u|^q$ se comporte dans le domaine inertiel comme $l^{\zeta_q^E}$ (Eq. (2.1)). Des mesures expérimentales [9, 148, 151–154] montrent toutefois que l'exposant de ces lois de puissance pourrait légèrement différer lorsque q est impair.

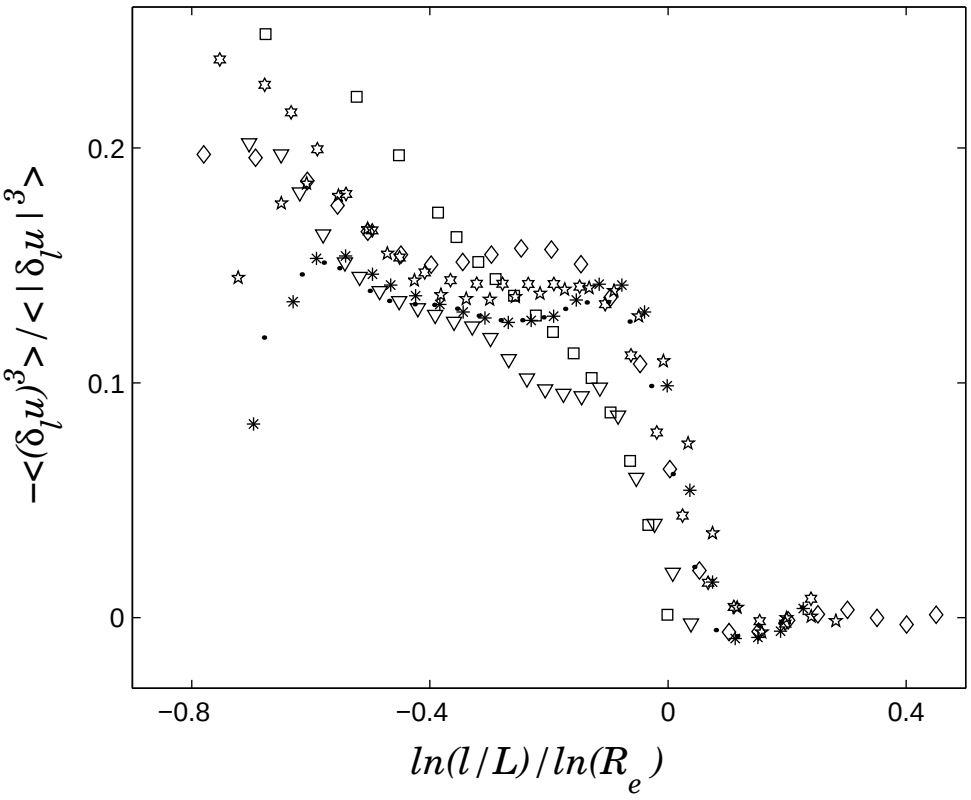

FIG. 3.7 – Représentation du facteur d'asymétrie $\mathcal{A}(l) = -\langle(\delta_l u)^3\rangle/\langle|\delta_l u|^3\rangle$ (Eq. (3.71)), en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$. Les symboles utilisés ont la même signification que dans la figure 2.3.

numériques du *facteur d'asymétrie* $\mathcal{A}(l)$ [102, 103] défini comme le rapport adimensionné :

$$\mathcal{A}(l) = -\frac{\langle(\delta_l u)^3\rangle}{\langle|\delta_l u|^3\rangle} \ . \tag{3.71}$$

Sur cette figure $\mathcal{A}(l)$ est en fait représenté en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$. Aux échelles plus grandes que l'échelle intégrale L, le facteur d'asymétrie est nul, en cohérence avec une statistique Gaussienne, $\langle(\delta_l u)^3\rangle = 0$. Dans le domaine inertiel, suivant les différentes configurations expérimentales ou numériques (effets de nombre de Reynolds fini, anisotropie à grande échelle, effets de statistiques finies[29]), $\mathcal{A}(l)$ varie faiblement avec l'échelle et le nombre de Reynolds. Remarquons que le signal numérique (□) se distingue par le fait qu'il présente une asymétrie qui dépend fortement de l'échelle, ce qui peut s'expliquer par le relativement faible nombre de Reynolds atteint dans les DNS et donc un domaine inertiel

[29]Du point de vue du traitement du signal, la statistique nécessaire à une bonne convergence du moment signé $\langle(\delta_l u)^3\rangle$ est plus importante que celle exigée par $\langle|\delta_l u|^3\rangle$.

peu étendu. On trouve ainsi

$$\mathcal{A}(l) \underset{L \gg l > \eta^+}{=} 0.14 \pm 0.02 \ , \tag{3.72}$$

indépendemment de l'échelle et du nombre de Reynolds. Dans le domaine dissipatif, où les effets de filtrage (numérique ou expérimental) ont une influence certaine, $\mathcal{A}(l)$ augmente pour saturer vers une valeur *a priori* supérieure à celle obtenue dans le domaine inertiel et donnée par la limite

$$\lim_{l \to 0} \mathcal{A}(l) = -\frac{\langle (\partial_x u)^3 \rangle}{\langle |\partial_x u|^3 \rangle} \ . \tag{3.73}$$

3.6.2 Interprétation et modélisation

Dans l'approche du propagateur [9, 92–98], qui implique l'indépendance des variables aléatoires $\beta_l > 0$ et δ (Eq. (2.32)), il est possible de modéliser l'asymétrie observée dans la densité de probabilité des incréments de vitesse en introduisant une asymétrie (qui va désormais dépendre de l'échelle l) dans la densité de probabilité de la variable aléatoire δ. L'hypothèse d'indépendance suffit en effet à prédire les comportements observés sur le facteur d'asymétrie $\mathcal{A}(l)$ (Fig. 3.7). Dans le domaine inertiel, les moments des amplitudes des incréments de vitesse, $\langle |\delta_l u|^q \rangle$, ou les cumulants des logarithmes, $C_{n,\delta_l u}$, s'interprètent sans faire intervenir les grandeurs dissipatives[30] de l'écoulement. Nous allons voir que dans ce même domaine d'échelles, la compréhension du moment d'ordre 3 signé, $\langle (\delta_l u)^3 \rangle$, nécessite la prise en compte d'une constante empirique, mesurée par Gagne *et al.* [103], et qui sera interprétée comme un nombre de Reynolds *critique* $\mathbb{R}^*$, séparant les nombres de Reynolds locaux dissipatifs et inertiels.

Le nombre de Reynolds critique $\mathbb{R}^*$

Dans la section 2.3.5, nous avons vu que le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ (Eq. (2.42)) caractérise la complexité du fluide à l'échelle l. A l'échelle dissipative[31] η, celui-ci atteint une valeur critique de "l'ordre" de l'unité (et non exactement l'unité comme stipulé par souci de simplicité dans l'équation (3.2)),

$$\mathbb{R}_\eta = \mathbb{R}^* \ . \tag{3.74}$$

Dans le cadre du formalisme multifractal, cette relation conduit à la reformulation de l'équation (3.3) :

$$\eta(h) = L \left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^*} \right)^{-\frac{1}{h+1}} \ . \tag{3.75}$$

[30] Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le propagateur $G_l(\ln \beta_l)$ du domaine inertiel ne dépend pas de la viscosité et donc du nombre de Reynolds (Eq. (2.33)) [9].

[31] Comme le nombre de Reynolds local fluctue, l'échelle dissipative η fluctue aussi (Eq. (3.3)).

Ceci entraine une nouvelle écriture des statistiques des gradients (Eq. (3.47)), et notament du moment d'ordre 2 :

$$\langle(\partial_x u)^2\rangle = \left(\frac{\sigma}{L}\right)^2 \frac{\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} (\mathbb{R}_e/\mathbb{R}^*)^{-\frac{2(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh}{\int_{-1}^{+\infty} (\mathbb{R}_e/\mathbb{R}^*)^{-\frac{1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh} \approx \left(\frac{\sigma}{L}\right)^2 \frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^*} \ , \tag{3.76}$$

où l'approximation effectuée résulte de la non prise en compte des corrections intermittentes[32]. Les mesures expérimentales [103] révèlent que l'échelle de Kolmogorov $\eta_K = \eta(h = 1/3)$ est effectivement **égale** à

$$\frac{\eta_K}{L} = \left(\frac{\mathbb{R}_\lambda}{28}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^*}\right)^{-\frac{3}{4}} \ . \tag{3.77}$$

L'expression de l'échelle de Taylor λ (Eq. (1.9)), qui fait intervenir la variance de la vitesse[33] $\sigma_u^2 = \langle u^2\rangle$ et du gradient $\langle(\partial_x u)^2\rangle$ (Eq. (3.76)), ainsi que les définitions du nombre de Reynolds à l'échelle intégrale (Eq. (1.5)) et à l'échelle de Taylor (Eq. (1.10)), permettent de calculer précisement le nombre de Reynolds critique et le coefficient de proportionnalité entre $\mathbb{R}_e$ et $(\mathbb{R}_\lambda)^2$:

$$\mathbb{R}^* = 2 \times 28 = 56 \text{ et } \ \mathbb{R}_e = \frac{1}{14}(\mathbb{R}_\lambda)^2 \ , \tag{3.78}$$

ce qui conforte l'utilisation de la prédiction dimensionnelle donnée par l'équation (2.48).

Prédictions du plateau inertiel

Afin de modéliser l'asymétrie des densités de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse, il nous faut généraliser l'écriture probabiliste de ces incréments (Eq. (2.32)) :

$$\delta_l u = \beta_l \times \Delta_l \ , \tag{3.79}$$

où β_l est la variable aléatoire donnée par les relations (3.32) et (3.33), et Δ_l est une variable aléatoire signée, indépendante de β_l, de densité de probabilité $\mathcal{P}_{\Delta_l}(\Delta_l)$ (qui dépend *a priori* de l'échelle). En admettant que (i) l'asymétrie de la densité de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse résulte entièrement de celle présente dans la densité de probabilité de Δ_l (Eq. (3.79)), et (ii) la partie symétrique $\mathcal{G}(\Delta_l) = \mathcal{G}(-\Delta_l)$ est Gaussienne et indépendante de l'échelle[34], on peut alors écrire

$$\mathcal{P}_{\Delta_l} = \mathcal{G} + \mathcal{F}_l \ , \tag{3.80}$$

où $\mathcal{F}_l(\Delta_l) = -\mathcal{F}_l(-\Delta_l)$ est antisymétrique. $\mathcal{F}_l$ est donc sensé complètement expliquer les moments signés $\langle(\delta_l u)^q\rangle$ d'ordre q impair :

$$\langle(\delta_l u)^{2q+1}\rangle = S_l(2q+1)\langle(\beta_l)^{2q+1}\rangle \ , \tag{3.81}$$

[32] C'est-à-dire $\mathcal{D}^E(h = 1/3) = 1$ et $\mathcal{D}^E(h \neq 1/3) = -\infty$. Le calcul numérique des intégrales impliquées dans le membre de droite de l'équation (3.76) justifie largement cette approximation.

[33] A ne pas confondre avec $\sigma^2 = \langle(\delta_L u)^2\rangle \approx 2\sigma_u^2$.

[34] Les mesures expérimentales et numériques confortent clairement cette hypothèse.

où on a utilisé la notation

$$S_l(2q+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta_l)^{2q+1} \mathcal{F}_l(\Delta_l) d\Delta_l \ . \tag{3.82}$$

Parallèlement, $\mathcal{G}(\Delta_l)$ contrôle le comportement des moments des incréments non signés :

$$\langle |\delta_l u|^q \rangle = K_q \sigma^q \langle (\beta_l)^q \rangle \tag{3.83}$$

où K_q est le moment d'ordre q d'une Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ (Eq. (2.37)). En utilisant l'expression approchée (3.67) de la dissipation locale et l'équation (3.76) du moment d'ordre 2 du gradient de vitesse, la relation de Kármán-Howarth-Monin (Eq. (3.66)) à viscosité nulle permet de calculer[35] le facteur d'asymétrie dans le domaine inertiel :

$$\mathcal{A}(l) = \frac{3\sqrt{2\pi}}{\mathbb{R}^*} \approx 0.134 \ , \tag{3.84}$$

en très bon accord avec les mesures expérimentales (Eq. (3.72) et Fig. 3.7) . Nous nous proposons maintenant d'étendre cette étude sur toute la gamme d'échelles (échelles dissipatives incluses), en utilisant la relation de Kármán-Howarth-Monin (Eq. (3.66)) pour une valeur finie de la viscosité ν.

Facteur d'asymétrie sur toute la gamme d'échelles

En reproduisant les précédentes approximations, il est possible d'écrire le facteur d'asymétrie $\mathcal{A}(l)$, en utilisant la relation (3.66) en présence de viscosité (ν finie) :

$$\mathcal{A}(l) = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2\langle (\beta_l)^3 \rangle \mathbb{R}_e} \left[2 \frac{\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} (\mathbb{R}_e/\mathbb{R}^*)^{-\frac{2(h-1)+1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh}{\int_{-1}^{+\infty} (\mathbb{R}_e/\mathbb{R}^*)^{-\frac{1-\mathcal{D}^E(h)}{h+1}} dh} \frac{l}{L} - \frac{d\langle (\beta_l)^2 \rangle}{d(l/L)} \right] \ , \tag{3.85}$$

où $\mathbb{R}^*$ est pris en compte dans l'expression des moments d'ordre q de β_l. L'évaluation numérique de $\mathcal{A}(l)$ en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$ est représentée dans la figure 3.8, pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. Nous constatons que le plateau inertiel dépend très faiblement du nombre de Reynolds et qu'il se situe à une valeur ≈ 0.13, très proche de la prédiction monofractale (3.84). Dans le domaine dissipatif, le facteur d'asymétrie augmente pour atteindre une valeur proche de 0.16, elle aussi indépendante du nombre de Reynolds. Les résultats de la figure 3.7 montrent qu'expérimentalement, le plateau dissipatif semble se situer à une valeur plus grande $\mathcal{A}(l \to 0) \approx 0.25$. Il s'avère qu'on peut démontrer (par exemple par un simple développement limité lorsque $l \to 0$ de la relation de Karman-Howarth-Monin (Eq. (3.85))) que la valeur de ce plateau dépend nécessairement et fortement du spectre $\mathcal{D}^E(h)$, mais aussi de la forme de la transition de Batchelor–Meneveau.

Ainsi, agir sur la hauteur du plateau de l'asymétrie dans le domaine dissipatif revient à agir sur la forme de la transition entre régime dissipatif et régime inertiel. La figure 3.7

[35] En négligeant les corrections intermittentes et en utilisant le fait que $\langle (\beta_l)^3 \rangle = l/L$ et $K_3 = 4/\sqrt{2\pi}$.

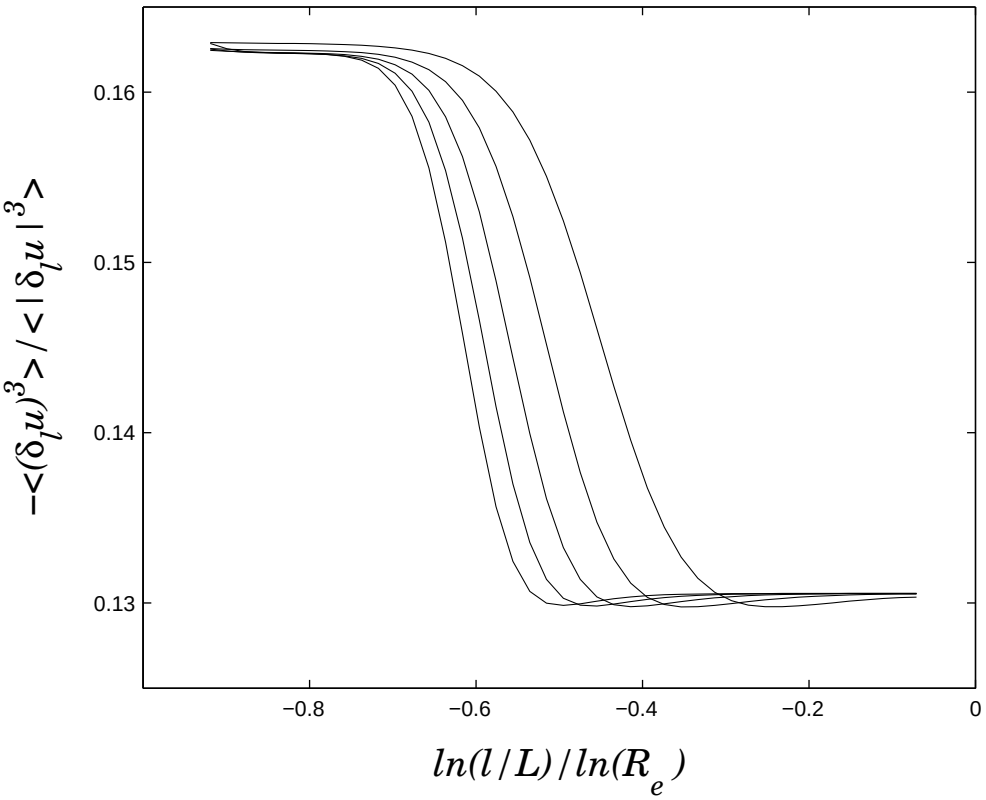

FIG. 3.8 – Représentation du facteur d'asymétrie $\mathcal{A}(l) = -\langle(\delta_l u)^3\rangle/\langle|\delta_l u|^3\rangle$ théorique donné par la relation (3.85), en fonction de $\ln(l/L)/\ln \mathbb{R}_e$ et ce, pour un nombre de Reynolds critique $\mathbb{R}^* = 56$. Les nombres de Reynolds représentés s'échelonnent de droite à gauche de $\mathbb{R}_e = e^{10}$ à $\mathbb{R}_e = e^{20}$. Les calculs ont été effectués dans un cadre log-normal ($\mathcal{D}^E(h)$ parabolique) avec comme paramètres $c_2 = 0.025$ et $c_1 = 1/3 + (3/2)c_2 = 0.37$, en utilisant la transition $\mathcal{C}^\infty$ de Batchelor–Meneveau (Eqs. (3.32) et (3.33)).

montre clairement que la saturation dissipative dépend aussi fortement de la géométrie de l'écoulement. Dans ce manuscrit, nous nous contenterons de la présente description qui se révèlera suffisante pour décrire, avec une très bonne qualité, les densités de probabilité des incréments de vitesse. Seule une étude expérimentale spécialement dédiée aux échelles dissipatives, permettra de déterminer la valeur du plateau observé dans le facteur d'asymétrie dans le régime dissipatif profond. Remarquons que celui-ci dépend aussi fortement de la dissipation locale moyenne $\langle\epsilon\rangle$ dont la valeur dépend elle-même de l'isotropie et l'homogénéité de l'écoulement (Eq. (2.46)).

Modélisation des densités de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse

Dans leur travail original, Castaing *et al.* [9, 92] ont proposé une modélisation possible de la densité de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse à l'échelle l dans le régime

inertiel. Cette modélisation est basée sur la forme suivante de la densité de probabilité de la variable Δ_l :

$$\mathcal{P}_{\Delta_l}(\Delta_l) = \frac{\exp\left[-\frac{\Delta_l^2}{2\sigma^2}\left(1 + a_S \frac{\frac{\Delta_l}{\sigma}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta_l}{\sigma}\right)^2}}\right)\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2}\left(1 + a_S \frac{\frac{u}{\sigma}}{\sqrt{1+\left(\frac{u}{\sigma}\right)^2}}\right)\right] du} \ , \tag{3.86}$$

où $a_S \approx 0.18$ est une constante universelle indépendante du nombre de Reynolds. Cette constante est cohérente avec le fait que le facteur d'asymétrie est indépendant du nombre de Reynolds dans le régime inertiel. Remarquons que la densité de probabilité (3.86) dépend de l'échelle[36] et qu'elle est bien Gaussienne à l'échelle intégrale L. L'inconvénient principal de cette densité de probabilité réside dans le fait qu'elle ne soit pas centrée[37]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\mathcal{P}_{\Delta_l}(u)du \neq 0. \tag{3.87}$$

De plus, sa partie symétrique $\mathcal{G}(\Delta_l)$ n'est pas Gaussienne.

Nous proposons donc ici une autre forme pour la densité de probabilité $\mathcal{P}_{\Delta_l}$, dont la partie symétrique est Gaussienne, et qui a le mérite de simplifier les calculs[38] et de respecter la stationnarité de la vitesse ($\langle \delta_l u \rangle = 0$). Nous proposons donc

$$\mathcal{P}_{\Delta_l} = \mathcal{G} + \mathcal{F}_l \ , \tag{3.88}$$

où $\mathcal{G}$ est une Gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 :

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \ , \tag{3.89}$$

et $\mathcal{F}_l$ est proportionnelle à la dérivée troisième d'une Gaussienne de variance α^2 :

$$\mathcal{F}_l(x) = -\mathcal{F}_l(-x) = -\frac{A(l)}{\alpha^7\sqrt{2\pi}} \times x\left(x^2 - 3\alpha^2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) \ . \tag{3.90}$$

Remarquons dès à présent que le moment d'ordre 3 est indépendant de α,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mathcal{P}_{\Delta_l}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mathcal{F}_l(x)dx = -6A(l) \ , \tag{3.91}$$

ce qui indique que cette constante intervient uniquement dans les valeurs des moments d'ordre supérieur. Nous présentons dans l'Annexe E, les fondements qui nous ont conduit

[36] Ainsi $a_S(l \leq L) = 0.18$ et $a_S(l \geq L) = 0$.

[37] Et donc que $\langle \delta_l u \rangle \neq 0$, ce qui n'est pas acceptable puisque le signal de vitesse est stationnaire.

[38] Les moments d'ordre q de cette densité de probabilité seront facilement calculables.

à choisir pour la partie antisymétrique de $\mathcal{P}_{\Delta_l}$, la dérivée troisième de Gaussienne. Ce choix doit être rapproché au développement de Edgeworth [155–158] d'une densité de probabilité quelconque. On peut ainsi calculer que, de manière générale, la densité $\mathcal{P}_{\Delta_l}$ s'exprime en fonction des dérivées d'ordre successif de la densité Gaussienne (Eq. (E.12)). Ne conserver que la dérivée troisième de la Gaussienne dans l'expression de la partie antisymétrique de $\mathcal{P}_{\Delta_l}$ revient à négliger les termes d'ordre supérieur dans le développement de Edgeworth. Nous renvoyons le lecteur aux références [155, 156] pour une interprétation de cette approximation. En conséquence, la variance α^2 intervenant dans l'équation (3.90) ne peut être que très proche de la variance σ^2 de la Gaussienne $\mathcal{G}$ (Eq. (3.89)). Remarquons enfin que la fonction $\mathcal{F}_l$ ne peut pas être interprétée comme une densité de probabilité puisque c'est une fonction antisymétrique.

Le facteur d'asymétrie $\mathcal{A}(l)$ est directement relié à l'amplitude de la fonction $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{A}(l) = \frac{3\sqrt{2\pi}A(l)}{2\sigma^3} \ . \tag{3.92}$$

A un nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ donné, moyennant une paramétrisation du spectre $\mathcal{D}^E(h)$, $A(l)$ peut donc être calculé à partir de l'expression (3.85) de $\mathcal{A}(l)$. La variance α^2 est complètement carcactérisée par le moment d'ordre 5 de Δ_l :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \mathcal{P}_{\Delta_l}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \mathcal{F}_l(x)dx = -60A(l)\alpha^2 \ . \tag{3.93}$$

L'étude expérimentale et numérique de la quantité $\langle(\delta_l u)^5\rangle / \langle|\delta_l u|^5\rangle$ (non reproduite dans ce manuscrit) montre que α reste très proche[39] de σ, puisque il est possible de calculer l'expression suivante :

$$-\frac{\langle(\delta_l u)^5\rangle}{\langle|\delta_l u|^5\rangle} = \frac{15A(l)\alpha^2\sqrt{2\pi}}{4\sigma^5} \ . \tag{3.94}$$

Nous voulons porter l'attention du lecteur sur le fait que l'inconvénient principal de cette modélisation (qui se résume à ne conserver que le premier terme du développement de Edgeworth, c.f. Annexe E) réside dans l'existence de valeurs négatives pour la probabilité $\mathcal{P}_{\Delta_l}(\Delta_l)$ pour les très grandes valeurs de Δ_l. Nous allons vérifier toutefois que les propriétes statistiques des signaux expérimentaux et numériques sont correctement décrites dans ce cadre empirique.

Nous présentons dans la figure 3.9, la description théorique des densités de probabilité des incréments longitudinaux de vitesse obtenues à partir des signaux expérimentaux ((a), (b) et (c)) et numériques ((d), (e) et (f)). Les amplitudes des incréments sont correctement décrites par l'approche multifractale présentée dans les sections précédentes, avec le même jeu de paramètres que dans la figure 3.6. De plus, afin de décrire correctement l'asymétrie des ces densités de probabilité, nous utilisons pour Δ_l une densité de probabilité (Eq. (3.88)), dont la partie symétrique est Gaussienne, et la partie antisymétrique

[39] Nous verrons que les données expérimentales et numériques suggèrent $\alpha = 0.9\sigma$

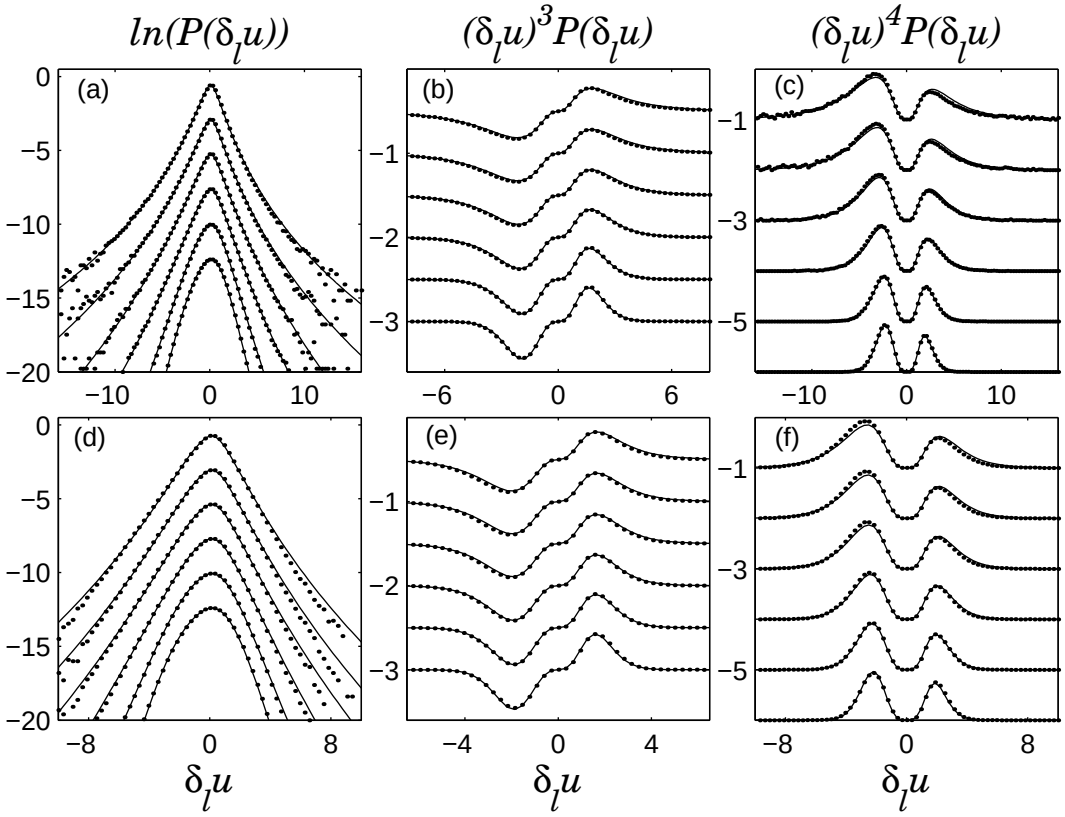

FIG. 3.9 – Représentation des densités de probabilité des incréments d'ordre 1 ($\delta_l^{(1)}u(x) = u(x+l) - u(x)$) pour plusieurs échelles l. *Signaux expérimentaux de Baudet-Naert* ($\mathbb{R}_\lambda = 380$). (a) $\ln \mathcal{P}(\delta_l u)$: de haut en bas, les données (•) correspondent aux échelles $l/L = 0.0009; 0.0035; 0.007; 0.014; 0.056$ et 0.22. Nous avons superposé sur ces données expérimentales, les densités de probabilité théoriques (traits continus) obtenues à partir de l'équation (3.36), en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eqs. (3.55) et (3.56)), une densité asymétrique pour le bruit Δ_l (Eq. (3.88)), de paramètres $A(l)$ donné par l'équation (3.92) et $\alpha = 0.9\sigma$, une ondelette d'ordre $N = 1$, dans un cadre log-normal de paramètres $c_2 = 0.023$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$, et pour un nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 6.263$. (b) $(\delta_l u)^3 \mathcal{P}_l(\delta_l u)$ et (c) $(\delta_l u)^4 \mathcal{P}_l(\delta_l u)$ estimés sur les mêmes signaux expérimentaux, aux mêmes échelles. *Signaux numériques de DNS* ($\mathbb{R}_\lambda = 140$). (d) $\ln \mathcal{P}(\delta_l u)$: les échelles représentées sont de haut en bas $l/L = 0.054; 0.073; 0.09; 0.14; 0.29$ et 0.58. Les prédictions théoriques (traits continus) ont été obtenues à partir des mêmes équations que pour les signaux expérimentaux, dans un cadre log-normal de paramètres $c_2 = 0.029$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.38$, et pour un nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 3.1773$. (e) $(\delta_l u)^3 \mathcal{P}_l(\delta_l u)$ et (f) $(\delta_l u)^4 \mathcal{P}_l(\delta_l u)$ obtenus pour ces mêmes signaux numériques. Dans toutes les figures, les courbes ont été arbitrairement décalées en ordonnée par souci de clarté et la variance de $P(\delta_l u)$ a été fixée à l'unité à toutes les échelles.

est modélisée par une dérivée troisième de Gaussienne (Eq. (3.90)). Le paramètre α intervenant dans cette dernière expression est fixé à la valeur $\alpha = 0.9\sigma$, en cohérence avec

l'estimation de la quantité $-\langle(\delta_l u)^5\rangle/\langle|\delta_l u|^5\rangle$ à partir de ces mêmes signaux (Eq. (3.93)). Dans la figure 3.9(a) est représenté $\ln \mathcal{P}(\delta_l u)$ à différentes échelles correspondant aux signaux expérimentaux de Baudet et Naert à $\mathbb{R}_\lambda = 140$ (•). Ces données sont comparées aux densités de probabilité théoriques (traits continus) obtenues à partir de l'équation (3.36), en utilisant (i) la transition de Batchelor–Meneveau ; (ii) une densité asymétrique pour le bruit Δ_l (Eq. (3.88)), de paramètres $A(l)$ donné par l'équation (3.92) et $\alpha = 0.9\sigma$; (iii) une ondelette analysatrice d'ordre $N = 1$; et (iv) un spectre $\mathcal{D}^E(h)$ log-normal de paramètres identiques à ceux donnés dans la figure 3.6. Pour mieux juger de l'accord entre les prédictions théoriques et les données expérimentales, principalement en ce qui concerne les queues des distributions, nous avons représenté $(\delta_l u)^3\mathcal{P}_l(\delta_l u)$ dans la figure 3.9(b) et $(\delta_l u)^4\mathcal{P}_l(\delta_l u)$ dans la figure 3.9(c) en décalant arbitrairement les courbes en ordonnée par souci de clarté. Nous constatons que s'il existe un léger écart entre les données et la description théorique aux plus petites échelles, ce qui est cohérent avec le fait que l'équation (3.85) ne décrit que partiellement la valeur du facteur d'asymétrie $\mathcal{A}(l)$ lorsque l'échelle l est dans le domaine dissipatif profond (Fig. 3.8), les distributions théoriques reproduisent de façon très satisfaisante les distributions expérimentales. Dans les figures 3.9(d), 3.9(e) et 3.9(f), nous avons reproduit la même analyse comparative entre nos prédictions théoriques et les densités de probabilité correspondant aux signaux numériques de DNS à $\mathbb{R}_\lambda = 140$. L'accord entre densités de probabilité théoriques et numériques est à nouveau spectaculaire bien qu'il subsiste un léger écart entre les mesures et la théorie, résultant du fait que $\mathcal{A}(l)$ est sensiblement perturbé par les effets de Reynolds finis.

Pour résumer cette première partie de thèse, nous mentionnerons que la statistique des amplitudes, $\langle|\delta_l u|^q\rangle$, peut être appréhendé indépendamment de la statistique des incréments signés, c'est-à-dire de la Skewness. Nous avons vu que la statistique des amplitudes, étudiée à travers les cumulants du logarithme des incréments longitudinaux ($C_{n,\delta_l u}$), se décrit très bien avec l'approche du propagateur [9, 15, 66, 80, 102], que nous avons généralisée, suite aux travaux de Nelkin [67] et Meneveau [64], aux échelles dissipatives profondes et intermédiaires [66]. Ceci nous a permis de mettre en évidence l'universalité du spectre de singularité $\mathcal{D}^E(h)$ dont une approximation quadratique log-normale permet de rendre compte des statistiques des amplitudes à toutes les échelles et à tous les nombres de Reynolds $\mathbb{R}_e$ explorés expérimentalement et numériquement. En ce qui concerne la statistique des incréments signés, et la description du phénomène de Skewness, nous avons proposé une modélisation de la partie anti-symétrique des densités de probabilité qui nous a permis de rendre compte de façon très satisfaisante des observations expérimentales. Il apparait toutefois nécessaire[40] de raffiner la transition de Batchelor–Meneveau, pour décrire avec plus de précision le comportement de l'asymétrie dans les échelles. C'est une étude expérimentale spécialement consacrée à l'étude des échelles dissipatives, à un nombre de Reynolds modéré, qui nous permettra de complètement modéliser cette asymétrie. Les signaux expérimentaux et numériques actuels n'étant pas suffisament résolus[41], ils ne permettent

[40] Comme nous l'avons vu, le plateau de C_{2,β_l} (Eq. (3.48)), ou celui de la Flatness (Eq. (3.45)), dans le domaine dissipatif profond, est indépendant de la forme de la transition.

[41] La résolution spatiale des signaux que nous étudions, n'est pas suffisante pour observer clairement un

pas de conclure quant à la forme précise de la transition entre statistiques inertielles et dissipatives.

3.7 Spectre de puissance

Jusqu'à présent, nous nous sommes essentiellement interessés à décrire les statistiques de vitesse en turbulence pleinement développée dans l'espace physique. Nous nous concentrerons dans cette section à étudier le signal de vitesse dans l'espace de Fourier [1], et plus particulièrement le comportement du spectre de puissance en fonction du vecteur d'onde k.

3.7.1 Définitions et principes du formalisme

Considérons le processus centré de vitesse $u(x)$ dont la variance a été ramenée à l'unité, $\sigma_u^2 = \langle u(x)^2 \rangle = 1$, et définissons sa transformée continue de Fourier [1, 157] de la manière suivante :

$$\tilde{u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} u(x) dx \ , \tag{3.95}$$

où la vitesse $u(x)$ est un processus stationnaire, c'est-à-dire que sa fonction d'auto-corrélation $\langle u(x)u(y) \rangle = \rho(|x-y|)$ ne dépend que de la distance[42] $|x-y|$. Nous nous intéressons ici à l'énergie moyenne $\langle |\tilde{u}(k)|^2 \rangle$ au vecteur d'onde k. Pour cela, calculons [157] :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}(k_1)\tilde{u}^*(k_2) \rangle &= \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_1 x - k_2 y)} \langle u(x)u(y) \rangle dx dy \ , \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_1-k_2)y} e^{-ik_1 l} \rho(l) dl dy \ , \\ &= 2\pi \delta(k_1 - k_2) \tilde{\rho}(k_1) \ , \end{aligned} \tag{3.96}$$

où δ est ici la distribution de Dirac, et $\tilde{\rho}(k)$ la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation[43]. Nous appelerons cette dernière le spectre de puissance $E(k)$. Nous résumons rapidement ses propriétés [2, 157] :

- $E(k) = \tilde{\rho}(k)$;
- $E(k)$ est paire car $\rho(l)$ est réelle ;
- $E(k)$ est réelle car $\rho(l)$ est paire ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} E(k) dk = \rho(0) = 1$;
- $E(k)$ positive car $\rho(l) \leq \rho(0)$.

plateau du cumulant d'ordre 2 C_{2,β_l} dans le domaine dissipatif profond. A l'échelle du pixel, le signal est fortement perturbé par le bruit expérimental ou numérique.

[42] La fonction d'auto-corrélation est une fonction paire.

[43] La fonction d'auto-corrélation et le spectre de puissance sont donc transformée de Fourier l'un de l'autre. Cette propriété est plus connue sous le nom de "relation de Wiener-Khinchin" [1].

Remarquons que la dernière propriété provient de l'inégalité de Schwartz. Nous pouvons donc faire un lien formel entre les statistiques de la vitesse dans l'espace physique et celles dans l'espace de Fourier. En effet la fonction d'auto-corrélation est directement reliée à la fonction de structure d'ordre 2 :

$$\rho(l) = \langle u(x)u(x+l)\rangle = \sigma_u^2 - \frac{1}{2}\langle(\delta_l u)^2\rangle = 1 - \langle(\beta_l)^2\rangle \ . \tag{3.97}$$

Il est alors possible de montrer [1, 63] que si $\langle(\delta_l u)^2\rangle$ varie comme une loi de puissance, $\langle(\delta_l u)^2\rangle \sim l^{\zeta_2^E}$ (Eq. 2.1), alors le spectre de puissance se comporte lui aussi en loi de puissance en fonction du vecteur d'onde, $E(k) \sim k^{-1-\zeta_2^E}$. Nous retrouvons ainsi les prédictions monofractales de K41 [5], puisque lorsque $\zeta_2^E = 2/3$ (Eq. (1.3)), alors $E(k) \sim k^{-5/3}$. Les propriétés de symétrie et de stationnarité de $\rho(l)$ permettent d'écrire

$$E(k) = 2\int_0^{+\infty} \cos(kl)\rho(l)dl \ . \tag{3.98}$$

Un modèle jouet : le mouvement Brownien stationnaire

L'approche que nous proposons ici ne tient pas compte de l'anisotropie observée à grande échelle [38–41] sous jacente au fait que la fonction d'auto-corrélation soit $\mathcal{C}^\infty$ partout, notament à l'échelle intégrale L à partir de laquelle celle-ci s'annule. Nous travaillerons dans la suite avec des échelles adimensionnées, l/L, en prenant l'échelle intégrale comme référence, $L = 1$. Le mouvement Brownien stationnaire [157], dont la fonction d'auto-corrélation s'écrit simplement sous la forme :

$$\rho(l) = \begin{cases} 1-l & \text{pour } |l| \leq 1 \ , \\ 0 & \text{sinon} \ , \end{cases} \tag{3.99}$$

a un spectre de puissance que nous pouvons calculer analytiquement, en utilisant la relation (3.98) :

$$E(k) = \frac{2(1-\cos(k))}{k^2} \ . \tag{3.100}$$

Nous voyons donc que la discontinuité de la dérivée première de la fonction d'auto-corrélation à l'échelle intégrale $l = L = 1$ implique des oscillations sur le spectre de puissance à tous les vecteurs d'ondes k. Nous proposons donc une modélisation simpliste du "cross-over" à l'échelle intégrale, sous la forme d'une *apodisation* [157] en utilisant une fenêtre de Hanning, de forme $(1-\cos[\pi(l-1)])/2$, qui permet "d'adoucir" le comportement de ρ vers l'échelle intégrale, sans pour autant agir sur son comportement aux petites échelles ($l \ll 1$). La fonction d'autocorrélation devient

$$\rho(l) = \begin{cases} (1-l)\frac{1-\cos(\pi(l-1))}{2} & \text{pour } |l| \leq 1 \ , \\ 0 & \text{sinon} \ , \end{cases} \tag{3.101}$$

et le spectre de puissance associé

$$E(k) = \frac{2k^4 - \pi^2k^2 + 3\cos(k)\pi^2k^2 - \cos(k)\pi^4 + \pi^4}{(-\pi^2+k^2)^2k^2} = \frac{2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \ , \tag{3.102}$$

qui n'est donc plus perturbé par des oscillations aux grands vecteurs d'onde. Dans la suite de cette présentation, les fonctions d'autocorrélation seront toutes apodisées de cette façon, et nous omettrons de le rappeler pas souci de clarté.

Estimation numérique - Transformée de Fourier discrète

Aux grands vecteurs d'ondes k, l'argument de l'intégrale dans l'équation (3.98) oscille très rapidement. En conséquence, les algorithmes numériques d'intégration convergent très lentement. Nous préfèrerons donc effectuer l'intégration par transformée de Fourier discrète (TFD). La TFD de la fonction d'auto-corrélation s'écrit, pour $n = 1, ..., N$:

$$E[n] = \sum_{m=1}^{N} \rho[m] e^{-i2\pi(m-1)(n-1)/N} \ , \tag{3.103}$$

où $\rho[m] = \rho(l_m)$, avec l_m correspondant aux N échelles intervenant dans la discrétisation[44] de l'intervalle $[0, 1 - 1/N]$. En utilisant des arguments de symétrie, on aboutit à une expression approchée du spectre de puissance (Eq. (3.98)) :

$$E(k_n) \approx \frac{2\mathcal{R}_e(E[n]) - \rho[1]}{N} \text{ et } \ k_n = 2\pi(n-1) \ , \tag{3.104}$$

où $\mathcal{R}_e$ signifie[45] "partie réelle".

3.7.2 Spectre de puissance dans le cadre log-normal

Nous avons représenté dans la figure 3.10, les spectres de puissance calculés par TFD (Eq. (3.104)), en utilisant la relation (Eq. (3.97)), pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds, $\ln \mathbb{R}_e = 5; 6; 7; 8; 9; 10$ et 11. La quantité $\langle(\beta_l)^2\rangle$ intervenant dans l'équation (3.97) a été calculée à partir de l'équation (3.39) en utilisant la transition $\mathcal{C}^\infty$ de Batchelor–Meneveau et dans un cadre log-normal de coefficients $c_2 = 0.025$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$. Dans la figure 3.10(a) est représenté $\ln E(k_n)$ en fonction de $\ln(k_n)$ (Eq. (3.104)) pour les sept nombres de Reynolds précedemment mentionnés. Aux petits vecteurs d'onde, le spectre de puissance est fortement conditionné par la forme de la fenêtre de Hanning que nous utilisons. Dans le domaine inertiel, dont l'étendue dépend du nombre de Reynolds, le spectre de puissance décroit comme une loi de puissance dont l'exposant est très proche de la prédiction monofractale $E(k) \sim k^{-5/3}$ de Kolmogorov (K41) [5]. Dans le domaine des échelles dissipatives, qui débute à des vecteurs d'onde k_n d'autant plus grands que le nombre de Reynolds est grand, le spectre de puissance décroit beaucoup plus vite[46] vers zéro. Nous avons représenté dans la figure 3.10(b), le logarithme du spectre compensé, $\ln\left[E(k_n)k_n^{5/3+c_2}\right]$, en fonction de $\ln(k_n\eta_K/L)$, où $\ln(\eta_K/L) = -(3/4)\ln \mathbb{R}_e$ (Eq. (1.6)).

[44] On obtient ainsi $l_1 = 0$, $l_2 = 1/N$, ..., $l_N = 1 - 1/N$.

[45] A ne pas confondre avec le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$.

[46] Dans le domaine dissipatif, $\langle(\delta_l u)^2\rangle \sim l^2$, ce qui correspond en première approximation à une décroissance du spectre en k^{-4}. Voir aussi la référence [159] pour un étude plus précise.

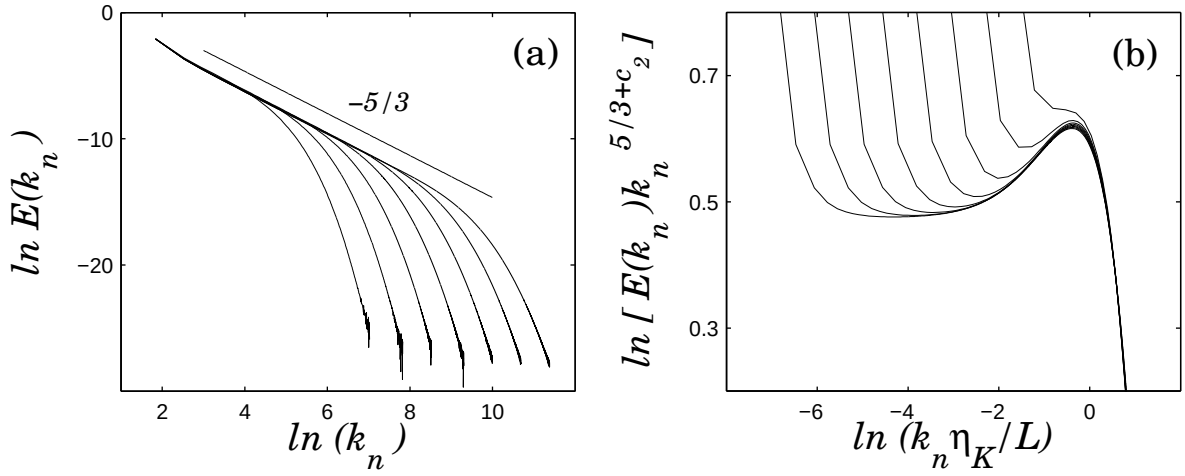

FIG. 3.10 – Représentation du spectre de puissance obtenu par TFD (Eq. (3.104)) à partir de la fonction d'auto-corrélation (Eq. (3.97)), évaluée sur $N = 2^{15}$ points, en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau (Eqs. (3.32) et (3.33)), dans le cadre log-normal de coefficients $c_2 = 0.025$ et $c_1 = 1/3 + 3c_2/2 = 0.37$ et pour plusieurs nombre de Reynolds, $\ln \mathbb{R}_e = 5; 6; 7; 8; 9; 10$ et 11. (a) $\ln E(k_n)$ en fonction de $\ln(k_n)$; la coupure dissipative apparait pour un vecteur d'onde d'autant plus grand que le nombre de Reynolds est grand. (b) $\ln \left[E(k_n)k_n^{5/3+c_2}\right]$, en fonction de $\ln(k_n)$.

Dans le domaine inertiel, cette représentation permet de constater les écarts ($c_2 \neq 0$) à une théorie monofractale puisque nous constatons l'apparition d'un plateau aux grands nombres de Reynolds . Nous rappelons que $\langle(\delta_l u)^2\rangle \sim l^{\zeta_2^E}$ implique une décroissance du spectre en $k^{-1-\zeta_2^E}$, que nous pouvons réécrire dans un cadre intermittent (log-normal) de la façon suivante

$$\ln \left[E(k)k^{5/3}\right] \sim -c_2 \ln(k) \ , \tag{3.105}$$

où $c_2 = 0.025$. Nous pouvons remarquer toutefois que les corrections intermittentes restent très faibles devant les prédictions monofractales de K41. A cela se rajoute le fait que, d'un point de vue du traitement du signal, le spectre de puissance est plus difficile à estimer que les fonctions de structure, et que l'intermittence se quantifie de manière beaucoup plus précise dans l'espace physique. Sur la figure 3.10(b) apparait un phénomène connu sous le nom de *Bottleneck Effect* [104]. Pour les vecteurs d'onde dissipatifs, le spectre compensé augmente légèrement avant de décroite rapidement vers zéro[47]. Dans la référence [104], Lohse et Muller-Groeling ont montré que ce phénomène peut être expliqué indépendemment du phénomène d'intermittence ; ils sont parvenus en effet à calculer analytiquement le spectre de puissance à partir de la modélisation de Batchelor [147] de la fonction de

[47] Aux très grands vecteurs d'onde, la décroissance du spectre étant plus rapide que $k^{-5/3-c_2}$, la quantité $E(k)k^{5/3+c_2}$ tend rapidement vers zéro.

structure d'ordre 2 :

$$\langle(\delta_l u)^2\rangle \propto \frac{l^2/3\eta^2}{\left[1+(1/3b)^{3/2}(l/\eta)^2\right]^{2/3}} \ , \tag{3.106}$$

où b et η sont les paramètres libres du modèle. Remarquons que cette formulation permet de décrire le comportement inertiel $l^{2/3}$ et le comportement dissipatif l^2. Ainsi, en supposant que $\langle(\delta_l u)^2\rangle$ transite de cette manière entre le domaine inertiel et le domaine dissipatif, Lohse et Muller-Groeling ont réussi à reproduire l'effet non trivial du *Bottleneck*. Notre approche permet cependant d'aller un peu plus en avant, notament en permettant d'étudier la dépendance de cet effet dans le nombre de Reynolds, en prenant en considération les corrections intermittentes à K41. Nous voulons donc attirer l'attention du lecteur sur le fait que cet effet dépend principalement de la forme de la transition de la fonction de structure d'ordre 2 entre le régime inertiel et le régime dissipatif. Ainsi, une même étude numérique effectuée avec la forme originale (transition $\mathcal{C}^0$) du propagateur que nous avons proposée (Eqs. (3.27) et (3.29)), exhibe un effet *Bottleneck* beaucoup plus prononcé. Encore une fois, ce seront les mesures expérimentales et les simulations numériques qui permettront d'attribuer une forme précise à la transition entre régime dissipatif et régime inertiel.

3.7.3 Approche de Frisch-Vergassola

Dans la référence [63], Frisch et Vergassola se sont intéressés au comportement du spectre de puissance dans le régime dissipatif intermédiaire. Comme nous l'avons vu, il y a autant d'information dans la fonction de structure d'ordre 2, $\langle(\delta_l u)^2\rangle$, que dans le spectre de puissance $E(k)$ (Eqs. (3.97) et (3.98)). L'équation (6) de la référence [63] donne une expression pour cette fonction de structure valable dans le domaine dissipatif intermédiaire[48] :

$$\langle(\delta_l u)^2\rangle \sim \int_{l>\eta(h)} d\mu(h) l^{2h+1-\mathcal{D}^E(h)} \ , \tag{3.107}$$

où $d\mu(h)$ représente un poids statistique[49] (non donné par le formalisme multifractal) et $\eta(h)$ est la coupure dissipative de Paladin et Vulpiani [62] (Eq. (3.3)). De manière phénoménologique, ces auteurs définissent le domaine inertiel comme le domaine d'échelles $\eta_K < l < L$ et le domaine dissipatif intermédiaire comme le domaine[50] $\eta_{\min} < l < \eta_K$, les échelles plus petites que $\eta_{\min}$ définissant le dissipatif profond dans lequel le spectre de puissance subit une décroissance très rapide[51]. Remarquons que ces définitions prédisent une étendue du domaine dissipatif intermédiaire se comportant comme $\ln(\eta_K/\eta_{\min}) \sim \ln \mathbb{R}_e$, contrairement à nos prédictions dimensionnelles et analytiques $\ln(\eta^+/\eta^-) \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$ (Eq.

[48] Dans la référence [63], le formalisme multifractal est utilisé pour une dimension d'espace $d = 3$. Dans ce mémoire, nous nous plaçons dans le cadre des profils spatiaux 1D de vitesse, donc dans un espace de dimension $d = 1$.

[49] Typiquement, $d\mu(h) = dh/\mathcal{Z}$, où la "constante" de normalisation $\mathcal{Z}$ dépend de l'échelle et du spectre de singularités $\mathcal{D}^E(h)$.

[50] η_K est l'échelle de Kolmogorov, et $\eta_{\min} = \eta(h = h_{\min})$, où $h_{\min}$ est la plus petite valeur de l'exposant h telle que $\mathcal{D}^E(h_{\min}) = 0$.

[51] De type exponentielle, comme suggérée dans la référence [160].

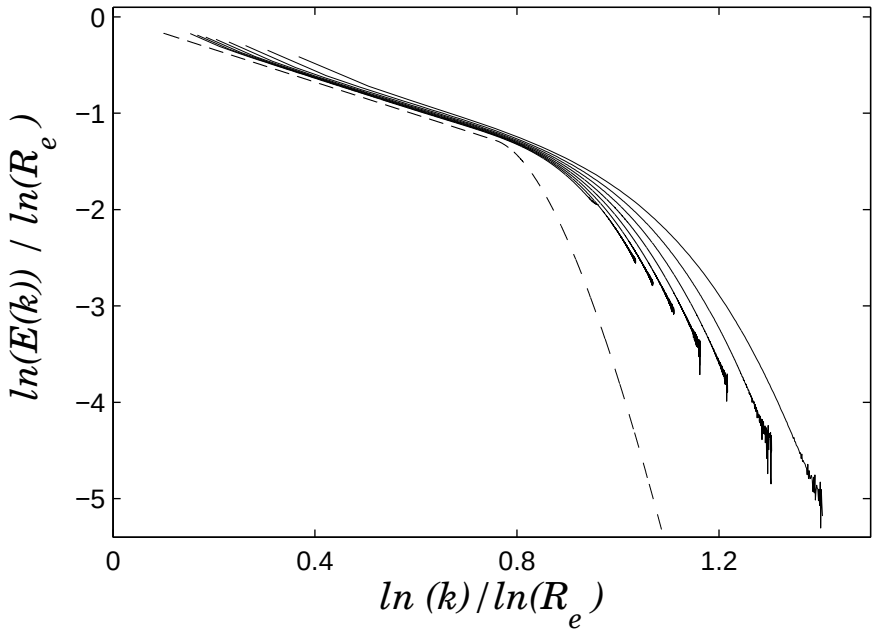

FIG. 3.11 – Représentation du logarithme du spectre de puissance normalisé par le logarithme du nombre de Reynolds, $\ln E(k)/\ln \mathbb{R}_e$, en fonction de $\ln(k)/\ln \mathbb{R}_e$. Les traits continus correspondent aux spectres calculés avec notre formalisme dans la figure 3.10. Le trait discontinu correspond à la prédiction asymptotique (Eq. (3.110)) de Frisch et Vergassola [63] à partir de la même forme quadratique (log-normale) du spectre $\mathcal{D}^E(h)$ que celle utilisée dans la figure 3.10.

(3.12)) [66]. En appliquant le théorême du col à l'intégrale présente dans la relation (3.107), et en admettant que la contribution dominante dans le domaine dissipatif intermédiaire provient de l'exposant $h^*(l/L, \mathbb{R}_e)$ défini par l'équation (3.23), Frisch et Vergassola concluent aux différents comportements de la fonction de structure d'ordre 2 suivants :

$$\langle (\delta_l u)^2 \rangle \sim \begin{cases} l^{\zeta_2^E} , & \text{pour } l > \eta_K , \\ l^{2h^*+1-\mathcal{D}^E(h^*)} , & \text{pour } \eta_K > l > \eta_{\min} . \end{cases} \tag{3.108}$$

En conséquence, le spectre de puissance $E(k)$ se comporterait de la manière suivante :

$$E(k) \sim \begin{cases} k^{-1-\zeta_2^E} , & \text{pour } k < (\eta_K)^{-1} , \\ k^{-1-[2h^*+1-\mathcal{D}^E(h^*)]} , & \text{pour } (\eta_K)^{-1} < k < (\eta_{\min})^{-1} . \end{cases} \tag{3.109}$$

Le résultat majeur de l'étude de Frisch et Vergassola [63] peut être résumé de la manière suivante : la fonction $F(k) = \ln E(k)/\ln \mathbb{R}_e$ est une fonction universelle de $\theta(k) = \ln k/\ln \mathbb{R}_e$ aux très grands nombres de Reynolds. Plus précisemment, $F(\theta)$ est prédite se comporter comme :

$$F(\theta) = \begin{cases} (-1-\zeta_2^E)\theta , & \text{pour} \quad \theta < \frac{1}{1+h_K} , \\ -2+\theta \mathcal{D}^E\left(-1+\frac{1}{\theta}\right) , & \text{pour} \quad \frac{1}{1+h_K} < \theta < \frac{1}{1+h_{min}} , \end{cases} \tag{3.110}$$

où h_K est très proche de 1/3. Nous avons représenté dans la figure 3.11, le logarithme du spectre de puissance normalisé par le logarithme du nombre de Reynolds, $\ln E(k)/\ln \mathbb{R}_e$, en fonction de $\ln(k)/\ln \mathbb{R}_e$. En traits continus sont représentés les spectres obtenus dans la section précédente dont les caractéristiques sont données dans la figure 3.10 ; en trait discontinu est représentée pour comparaison la fonction $F(\theta)$ donnée par la relation (3.110). Nous voyons ainsi clairement que la prédiction phénomènologique de Frisch et Vergassola [63] pour $F(\theta)$ ne correspond pas à la forme asymptotique ($\mathbb{R}_e \to +\infty$) de $\ln E(k)/\ln \mathbb{R}_e$ en fonction de $\ln(k)/\ln \mathbb{R}_e$ lorsque $E(k)$ est déduit de notre formalisme. Cette divergence résulte de plusieurs différences fondamentales entre notre approche [66] et celle de Frisch-Vergassola [63]. Premièrement, Frisch et Vergassola ne prennent pas en compte, dans l'expression de la fonction de structure d'ordre 2 (Eq. (3.107)), les échelles purement dissipatives $l < \eta(h)$. La contribution au spectre d'un terme proportionnel à l^2 est en k^{-4} et apparaît donc négligeable devant la contribution spectrale des échelles $l > \eta(h)$; toutefois, à la vue de nos résultats, ce terme dissipatif pourrait bien expliquer le fait que la décroissance rapide du spectre dans ce domaine s'effectue à des vecteurs d'onde plus grands que ceux mis en jeu dans la décroissance de la fonction F. D'autre part, de nombreuses approximations ont été effectuées par Frisch et Vergassola dans la dérivation de l'expression (3.110), notamment celle d'assimiler le vecteur d'onde k à l'inverse de l'échelle l dans le domaine dissipatif intermédiaire. De plus, l'effet "Bottleneck" n'est pas présent dans la fonction F qui est une fonction strictement décroissante. Toutefois, l'approche de Frisch et Vergassola a le mérite de faire comprendre avec des arguments simples que la coupure visqueuse s'effectue sur un continuum de vecteurs d'onde, contrairement à la description monofractale de K41 [5] qui prédit que le spectre de puissance s'annule à partir d'un vecteur d'onde $k_\eta \sim \eta_K^{-1}$.

Troisième partie

Turbulence Lagrangienne

Chapitre 4

L'intermittence inertielle Lagrangienne

4.1 Généralités

La description Lagrangienne des fluides turbulents consiste en l'étude systématique des observables (vitesse, accélération, pression, dissipation, ...) le long des trajectoires des particules fluides [3, 6, 42, 161, 162]. Elle est en particulier au cœur des problèmes de mélange et de transport dans les flots turbulents [163]. Cette description est strictement équivalente à la description Eulérienne puisque ces deux approches caractérisent le même objet physique, qu'il soit considéré comme un champ (continu) de particules fluides (Euler) ou comme l'ensemble (statistique) de toutes ces particules (Lagrange). Les équations de Navier-Stokes dans le cadre d'un écoulement incompressible peuvent être formulées pour la vitesse Lagrangienne $\vec{v}(t)$ et font intervenir des non-linéarités [3, 27, 161–163] et des couplages entre le gradient de pression et la vitesse que les mathématiques actuelles ne permettent pas de résoudre. On peut toutefois se convaincre facilement que le mouvement d'une particule dans un champ turbulent s'effectue le long d'une trajectoire complexe, fortement chaotique, et non reproductible. Il apparait alors naturel de décrire de manière probabiliste les observables d'une particule fluide, située à l'instant t_0 à la position $\vec{r_0}$, avec pour vitesse $\vec{v}(t_0, \vec{r_0}) = \vec{v}(t_0)$, et qui se retrouve à la position $\vec{r}$ à un temps t ultérieur avec une vitesse $\vec{v}(t, \vec{r_0}) = \vec{v}(t)$. L'hypothèse d'ergodicité, largement discutée dans la référence [2], permet de simplifier l'étude statistique des observables Lagrangiennes en assimilant les moyennes d'ensemble sur différentes trajectoires à des moyennes temporelles le long de la trajectoire d'une particule.

Les travaux précurseurs de Richardson [6] et de Kolmogorov [5, 43] montrent clairement que les fluctuations de vitesse d'un écoulement turbulent peuvent être caractérisées à partir du comportement dans les échelles de l'incrément spatial de vitesse Eulérienne $\delta_l u(x) = u(x+l) - u(x)$ ou de l'incrément temporel de vitesse Lagrangienne $\delta_\tau v(t) = v(t+\tau) - v(t)$. Le postulat d'isotropie statistique des petites échelles spatiales ($l \ll L$), comme temporelles ($\tau \ll T$), de la turbulence de Kolmogorov (K41) repose sur l'indépendance de ces petites échelles vis-à-vis du mécanisme d'injection d'énergie à grande échelle L ou T. En d'autres

mots, la statistique des petites échelles ne dépendrait que du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e = \sigma L/\nu$ (Eq. (1.5)), où $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\delta_L u)$. Dans la référence [2], Tennekes et Lumley montrent[1] que dans un écoulement homogène, isotrope et incompressible

$$\sigma_u^2 = \mathrm{Var}(u) = \sigma_v^2 = \sigma^2/2 \ . \tag{4.1}$$

En admettant[2] qu'il existe une échelle intégrale spatiale L, on peut alors définir l'échelle intégrale temporelle

$$T = \frac{L}{\sigma} \ , \tag{4.2}$$

et réécrire le nombre de Reynolds (Eq. (1.5)) avec des grandeurs typiquement Lagrangiennes

$$\mathbb{R}_e = \frac{\sigma^2 T}{\nu} \ . \tag{4.3}$$

Remarquons que la définition de l'échelle intégrale temporelle (Eq. (4.2)) est purement dimensionnelle ; en fait, il faudrait prendre en compte l'existence d'une constante multiplicative (que nous avons prise égale à l'unité) et qui est *a priori* difficile à déterminer. Des considérations spectrales de Corrsin [164] sur les échelles intégrales $\mathcal{L}$ (Eq. (3.65)) et $\mathcal{T}$ définie à partir de la fonction d'auto-corrélation de la vitesse[3],

$$\mathcal{T} = \int_{\tau=0}^{+\infty} \frac{\langle v(t)v(t+\tau)\rangle}{\sigma_v^2} d\tau \ , \tag{4.4}$$

dont le lien avec les échelles L et T n'est pas trivial, montrent plutôt que $\mathcal{T} = \mathcal{L}/(3\sigma_u) = \sqrt{2}\mathcal{L}/(3\sigma)$ (page 229 de la référence [2]).

Ce n'est que très récemment que les expérimentateurs sont parvenus à mesurer la vitesse Lagrangienne $\overrightarrow{v}(t)$ (ou l'une de ses composantes) dans un écoulement de laboratoire caractéristique d'une turbulence homogène, isotrope et pleinement développée[4]. La première équipe à être parvenue à suivre de manière distincte des *tracers*[5] dans de tels écoulements est celle de Bodenschatz à l'université de Cornell [23–26]. La technique repose sur des détecteurs optiques, issus de la physique des particules, qui permettent de mesurer, à haute fréquence, la position et la vitesse d'une particule dans le temps. Etant donnée que l'échelle de résolution temporelle est très petite, cette expérience permet d'accéder aux échelles dissipatives $\tau \simeq O(10^{-1})\tau_{\eta_K}$, et donc de mesurer l'accélération $\vec{a}(t) \simeq \delta_\tau v(t)/\tau$ de la particule fluide avec une assez bonne précision. L'échelle temporelle dissipative τ_{η_K} est l'équivalent

[1] Nous reviendrons largement sur ce point dans la quatrième partie de ce manuscrit consacrée au lien entre intermittence Eulérienne et intermittence Lagrangienne.

[2] La description multifractale de l'intermittence Eulérienne implique l'existence d'une échelle intégrale (Annexe A).

[3] Nous verrons que l'analyse des données expérimentales et numériques révèlent que les trajectoires Lagrangiennes sont compatibles avec une échelle intégrale $T > \mathcal{T}$ [27, 28, 139].

[4] Typiquement une machine de von Kármán [16–22].

[5] Des billes de silicon de quelques dizaines de μm de diamètre.

temporel de l'échelle de longueur dissipative de Kolmogorov η_K (Eq. (1.6)) et ne dépend donc que des seules grandeurs qui caractérisent l'écoulement à ces échelles, à savoir la dissipation locale moyenne $\langle\epsilon\rangle$ (Eq. (1.1)) et la viscosité ν. Un argument aux dimensions donne

$$\tau_{\eta_K} \sim \left(\frac{\nu}{\langle\epsilon\rangle}\right)^{1/2} \sim T\mathbb{R}_e^{-1/2} \ , \tag{4.5}$$

où nous avons utilisé le fait que $\langle\epsilon\rangle \sim \sigma^3/L$. Comme dans le cadre de la turbulence Eulérienne, cette échelle sépare les échelles de temps dissipatives $\tau < \tau_{\eta_K}$, des échelles $T \gg \tau > \tau_{\eta_K}$ inertielles, ce dernier domaine ayant une étendue, $\ln(\tau_{\eta_K}/T) \sim -(1/2)\ln\mathbb{R}_e$ (Eq. (4.5)), bien inférieure à celle du domaine inertiel Eulérien, $\ln(\eta_K/L) \sim -(3/4)\ln\mathbb{R}_e$ (Eq. (1.6)). Ainsi, à nombre de Reynolds fixé, le domaine inertiel de la turbulence Lagrangienne est beaucoup moins étendu que celui de la turbulence Eulérienne, ou de manière équivalente, pour des nombres de Reynolds finis, le domaine dissipatif occupe une plus grande partie du domaine d'échelles accessible à l'expérience. La deuxième expérience a été réalisée par Mordant, Pinton et leurs collaborateurs [27–31] au laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon. Les mesures de vitesse des *tracers* sont effectuées en exploitant le phénomène Doppler à des fréquences bien inférieures à celles utilisées par l'équipe de Cornell, mais le dispositif permet d'accéder à des échelles de temps inertielles $\tau \in [O(1)\tau_{\eta_K}; O(1)T]$. Ainsi, les deux dispositifs expérimentaux évoqués ci-dessus sont complémentaires et donnent accès à toutes les échelles de la turbulence Lagrangienne.

Les premières simulations numériques de la turbulence Lagrangienne ont été effectuées en 1989 par Yeung et Pope [34]. Elles consistent à suivre des points mathématiques advectés par un champ 3D simulé en résolvant les équations de Navier-Stokes. Dans ce manuscrit, nous analyserons les trajectoires simulées en DNS par Lévêque [31, 105] et dont le champ Eulérien ($\mathbb{R}_\lambda = 140$) correspondant est celui qui a été étudié dans la deuxième partie de ce manuscrit consacrée à la turbulence Eulérienne. Nous avons représenté dans la figure 4.1, une trajectoire typique d'une particule fluide dans un écoulement à $\mathbb{R}_\lambda = 740$.

4.2 Evidences expérimentales et numériques de la nature intermittente des fluctuations de vitesse Lagrangienne

Dans une première approche monofractale à la K41 [5], c'est-à-dire en négligeant les fluctuations de la dissipation locale[6], les fonctions de structure de la vitesse Lagrangienne $M_q(\tau) = \langle(\delta_\tau v)^q\rangle$ se comportent comme des lois de puissance dans le domaine inertiel :

$$\langle(\delta_\tau v)^q\rangle \sim \langle\epsilon\rangle^{q/2}\tau^{\zeta_q^L} \ , \tag{4.6}$$

[6]Dans le cadre Lagrangien, la dissipation locale $\epsilon(t)$ est la dissipation vue par la particule Lagrangienne qui se trouve au point $\vec{r}(t)$ à l'instant t. Elle correspond à la dissipation $\epsilon(\vec{r})$ définie par l'équation (1.1) évaluée au point $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

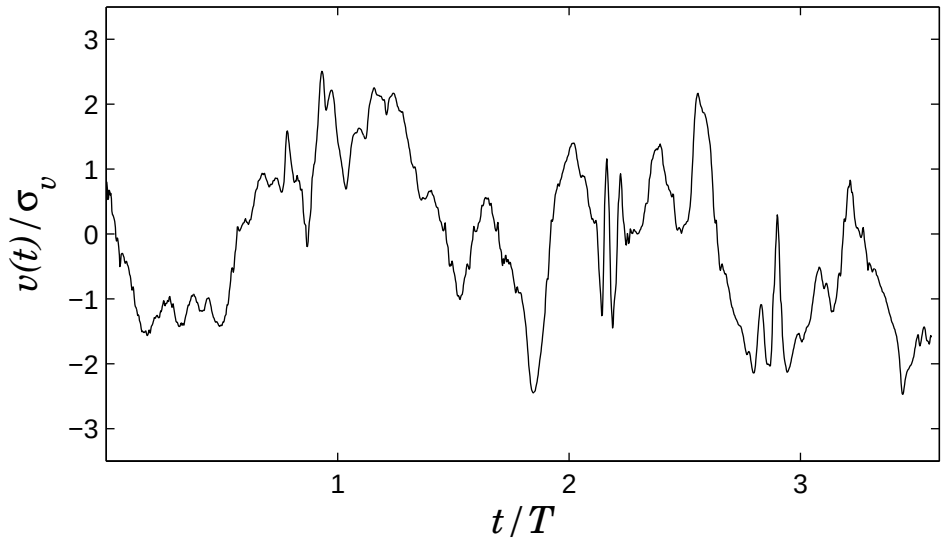

FIG. 4.1 – Représentation d'une trajectoire typique de l'expérience de Mordant *et al.* [27–31] : $v(t)/\sigma_v$ en fonction de t/T.

avec

$$\zeta_q^L = \frac{q}{2} \, . \tag{4.7}$$

Le formalisme multifractal permet d'interpréter le comportement global des fonctions de structure en termes de singularités locales du signal de vitesse étudié [1, 45], dont la force est caractérisée par la valeur de l'exposant de Hölder h. Ainsi, à un spectre linéaire $\zeta_q^L = q/2$ (Eq. (4.7)) correspond une singularité $h = 1/2$ unique présente *a priori* en tous les points du signal. De manière générale, à un spectre d'exposants ζ_q^L non-linéaire[7] correspond un spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h)$ (section 2.2), obtenu par simple transformation de Legendre :

$$\mathcal{D}^L(h) = \min_q \left[qh + 1 - \zeta_q^L \right] \, . \tag{4.8}$$

En suivant la stratégie développée dans la première partie consacrée à la turbulence Eulérienne, on peut tout à fait généraliser l'approche du propagateur de Castaing *et al* [9, 92–97] aux incréments de vitesse Lagrangienne. Cela va consister à interpréter $\delta_\tau v(t) = v(t+\tau) - v(t)$ comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes, $\delta_\tau v \equiv \beta_\tau \times \delta$, où β_τ rend compte de la dépendance dans les échelles (et dans le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$) et δ est assimilée à une variable aléatoire Gaussienne (en cohérence avec les mesures expérimentales et numériques). Ainsi, comme dans le cas Eulérien, si les densités de probabilité des incréments de vitesse Lagrangienne dépendent de l'échelle τ, alors les fluctuations de vitesse à travers les échelles sont intermittentes, ce qui se traduit par un spectre ζ_q^L non linéaire et, via la transformation de Legendre (Eq. (4.8)), à un spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h)$ en forme de cloche dont le support est un intervalle fini de valeurs de h.

[7] Remarquons que dans le cadre monofractal de K41, la transformée de Legendre (Eq. (4.8)) conduit au spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h = 1/2) = 1$ et $\mathcal{D}^L(h \neq 1/2) = -\infty$.

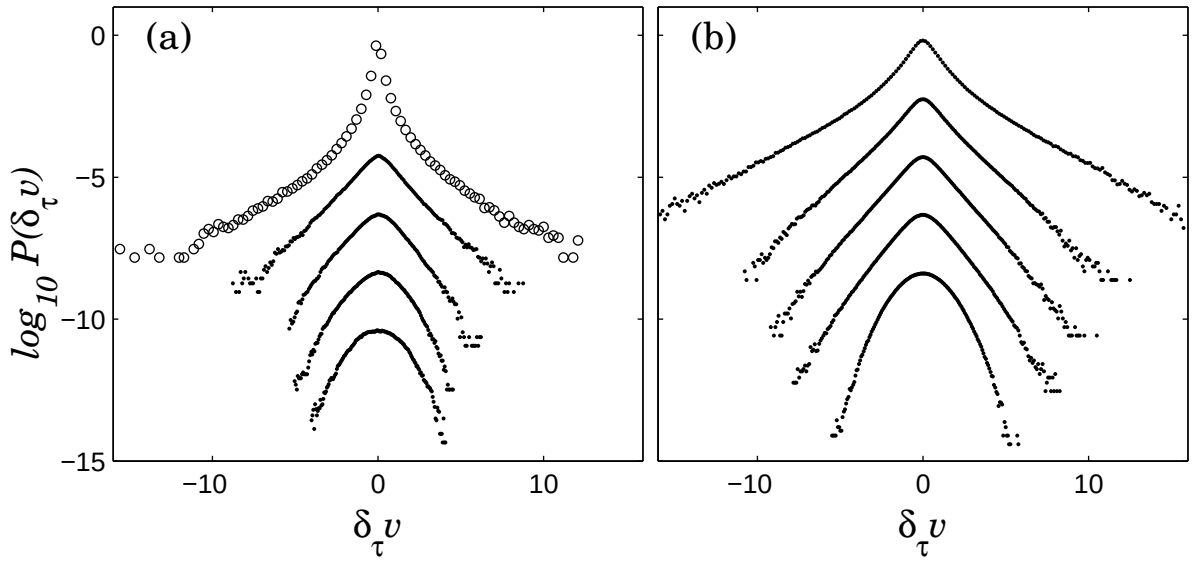

FIG. 4.2 – Représentation des densités de probabilité des incréments d'ordre 1 de vitesse Lagrangienne $\delta_\tau^{(1)} = v(t+\tau) - v(t)$. (a) $\log_{10} \mathcal{P}(\delta_\tau v)$ pour (•) l'expérience de l'ENS Lyon ($\mathbb{R}_\lambda = 740$) aux échelles (de haut en bas) $\tau/T = 0.07, 0.16, 0.35, 1$ et (∘) l'expérience de l'université de Cornell ($\mathbb{R}_\lambda = 690$) à l'échelle $\tau \simeq O(10^{-1})\tau_{\eta_K}$ et où les absisses ont été divisées par un facteur 4 par commodité de représentation. (b) $\log_{10} \mathcal{P}(\delta_\tau v)$ pour les *DNS* ($\mathbb{R}_\lambda = 140$) aux échelles (de haut en bas) $\tau/T = 0.05, 0.11, 0.17, 0.25$ et 1. En (a) et (b), les courbes ont été arbitrairement décalées en ordonnée par souci de clarté et la variance de $\mathcal{P}(\delta_\tau v(t))$ a été fixée à l'unité à toutes les échelles.

Nous représentons dans la figure 4.2, le logarithme (en base 10) des densités de probabilité (pdf) des incréments de vitesse sur une échelle τ, $\log_{10} \mathcal{P}(\delta_\tau v)$, estimées à partir des signaux expérimentaux (Fig. 4.2(a)) et numériques (Fig. 4.2(b)) précédemment évoqués. Les densités présentées sont de variance unité et ont été arbitrairement décalées par souci de clarté. Tout d'abord, en ce qui concerne les mesures de l'équipe expérimentale de Cornell, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à celles décrites dans la référence [26] dans laquelle l'accélération est approximée par $\delta_\tau v/\tau$, avec $\tau \simeq 0.17\tau_{\eta_K}$; nous précisons que, par commodité de représentation, nous avons divisé par 4 les abcisses. Il est important de remarquer que cette densité dévie très fortement d'une Gaussienne, exhibant des probabilités significatives pour des évènements très violents[8] et qu'elle est symétrique. Les mesures de l'équipe de l'ENS-Lyon permettent de se représenter l'évolution dans les échelles des densités de probabilité des incréments de vitesse Lagrangienne depuis l'échelle intégrale jusqu'au domaine dissipatif via le domaine inertiel. Les densités de probabilité des incréments de vitesse sont de la même manière fortement non-Gaussiennes mais sy-

[8]L'accélération peut prendre des valeurs supérieures à cinquante fois son écart-type. Nous verrons que ce phénomène est directement relié à une intermittence Lagrangienne beaucoup plus importante que celle observée dans les expériences et simulations de turbulence Eulérienne.

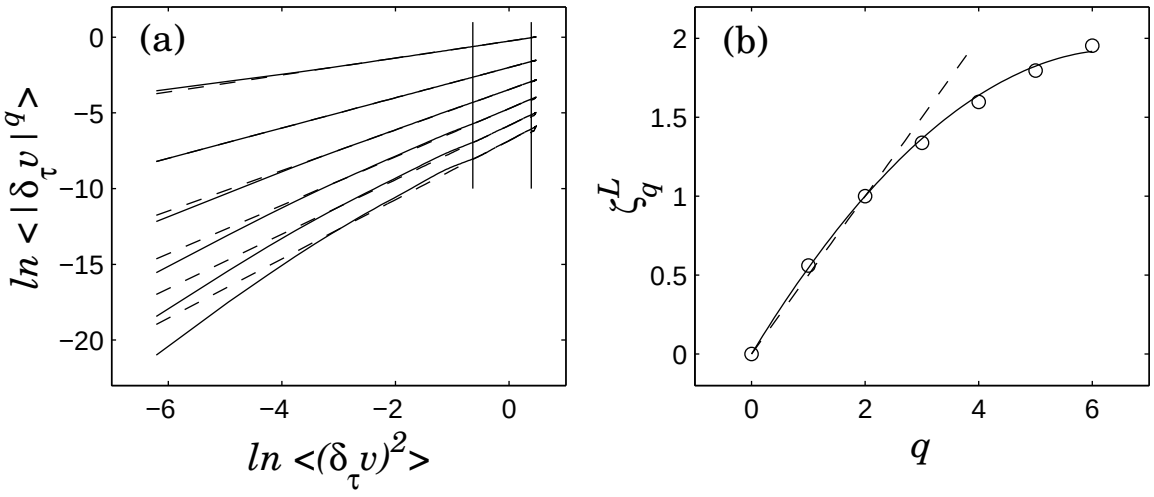

FIG. 4.3 – Estimation du spectre d'exposants ζ_q^L à partir des signaux expérimentaux de vitesse Lagrangienne de l'équipe de l'ENS Lyon ($\mathbb{R}_\lambda = 740$). (a) Représentation (trait continu) de $\ln\langle|\delta_\tau v|^q\rangle$ en fonction de $\ln\langle|\delta_\tau v|^2\rangle$, pour les valeurs de q suivantes (de haut en bas) : $q = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6. Les courbes ont été arbitrairement décalées en ordonnée. Nous avons indiqué par deux traits verticaux le domaine sur lequel sont effectuées les régressions linéaires ; les traits discontinus correspondent aux résultats de ces régressions. (b) ζ_q^L en fonction de q : ($\circ$) valeurs estimées par régression linéaire dans (a) ; ($--$) prédiction monofractale $\zeta_q^L = q/2$ (Eq. (4.7)) et (—) modèle quadratique log-normal (Eq. (4.9)) de paramètre $c_2^L = 0.09$.

métriques et ne présentent pas le phénomène de Skewness observé pour les statistiques des incréments longitudinaux de vitesse Eulérienne (Section 3.6). Les échelles analysées dans la figure 4.2(a) sont (de haut en bas) $\tau/T = 0.07; 0.16; 0.35$ et 1. Remarquons que la densité de probabilité à l'échelle intégrale $\tau = T$ est statistiquement indiscernable d'une Gaussienne. Nous pouvons en conclure, étant données la dépendance dans les échelles et la symétrie des densités, que la vitesse Lagrangienne est **intermittente** et non skewnée. L'estimation des fonctions de structure sur ces derniers signaux confortent largement cette conclusion puisque celles-ci exhibent des comportements en loi de puissance dont le spectre d'exposants ζ_q^L est significativement non-linéaire [27, 28, 31]. Dans la figure 4.3 est illustrée l'estimation de ce spectre à partir des signaux expérimentaux de l'ENS Lyon en adoptant une méthode traditionnelle consistant à mesurer ζ_q/ζ_2^L, en estimant la pente de $\ln\langle|\delta_\tau v|^q\rangle$ en fonction de $\ln\langle|\delta_\tau v|^2\rangle$ (Fig. 4.3(a)), afin d'adoucir les effets d'anisotropie à grande échelle. De haut en bas sont représentées les différentes courbes obtenues pour $q = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6. Une régression linéaire de ces courbes dans le domaine indiqué par les deux traits verticaux conduit à $\zeta_1^L = 0.56$, $\zeta_3^L = 1.34$, $\zeta_4^L = 1.60$, $\zeta_5^L = 1.80$ et $\zeta_6^L = 1.95$, où l'on a supposé $\zeta_2^L = 1$ par analogie[9] avec la condition $\zeta_3^E = 1$ en turbulence Eulérienne (Section 2). Nous

[9]La condition $\zeta_2^L = 1$ est empirique et n'est pas supportée, aux jours d'aujourd'hui, par des arguments analytiques basés sur les équations de Navier-Stokes, comme cela est le cas pour $\zeta_3^L = 1$ en turbulence

avons représenté ces résultats (∘) dans la figure 4.3(b), en superposant (trait discontinu) la prédiction monofractale $\zeta_q^L = q/2$ (Eq. (4.7)). L'estimation du spectre ζ_q^L à partir des signaux expérimentaux dévie donc significativement de la prédiction monofractale linéaire. Nous avons indiqué pour comparaison un modèle quadratique (trait continu) pour ζ_q^L, qui respecte les deux valeurs fondamentales de cet exposant, $\zeta_0^L = 0$ et $\zeta_2^L = 1$:

$$\zeta_q^L = \left(\frac{1}{2} + c_2^L\right) q - c_2^L \frac{q^2}{2} \ , \tag{4.9}$$

avec $c_2^L = 0.09 \pm 0.02$. Nous tenons à faire remarquer que le domaine d'échelles dans lequel $\ln\langle|\delta_\tau v|^q\rangle$ se comporte linéairement en fonction de $\ln\langle|\delta_\tau v|^2\rangle$ demeure limité, ce qui explique l'erreur importante avec laquelle nous mesurons l'exposant ζ_q^L. Nous constatons toutefois que le phénomène d'intermittence est significativement plus important[10] que dans le cas Eulérien, puisque le coefficient d'intermittence c_2^L mesuré est environ quatre fois plus grand que celui estimé dans les expériences et les simulations de turbulence Eulérienne, $c_2^E = 0.025 \pm 0.003$ (Eq. (2.66)).

Dans la figure 4.2(b) sont représentées les densités de probabilité des incréments de vitesse Lagrangienne estimées à partir des signaux numériques de Lévêque aux échelles (de haut en bas) $\tau/T = 0.05, 0.11, 0.17, 0.25$ et 1. Ainsi, l'étude des signaux numériques obtenus par DNS conduit aux mêmes conclusions que l'étude des signaux expérimentaux (Fig. 4.2(a)), en ce qui concerne l'existence du phénomène d'intermittence : les densités de probabilité dépendent fortement de l'échelle et demeurent symétriques. De la même manière, les évènements violents sont beaucoup plus probables que dans le cas Eulérien, puisqu'en comparant les figures 3.9(d) et 4.2(b), on constate que les incréments $\delta_\tau v$ de forte amplitude (plusieurs fois l'écart-type) sont beaucoup plus fréquents que les incréments de vitesse Eulérienne $\delta_l u$ de forte amplitude. Enfin, on retrouve bien le fait qu'à l'échelle intégrale, les densités de probabilité des incréments de vitesse Eulérienne ($l = L$) et Lagrangienne ($\tau = T$) sont indiscernables d'une Gaussienne.

4.3 Hypothèse de similarité raffinée en turbulence Lagrangienne

Comme nous venons de le voir, les fluctuations de vitesse Lagrangienne évoluent dans les échelles de manière intermittente (Fig 4.2), dont une conséquence est l'écart observé (Fig. 4.3) dans l'estimation du spectre des exposants des fonctions de structure relativement à la prédiction monofractale linéaire $\zeta_q^L = q/2$ (Eq. (4.7)). Kolmogorov [43] et Obukhov [44], dans le contexte de la turbulence Eulérienne, expliquent que l'intermittence de la vitesse est une conséquence des fluctuations de la dissipation locale (Eq. (1.1)) au travers de la relation

Eulérienne.

[10] Nous verrons, dans la quatrième partie de ce manuscrit, que $c_2^L \simeq (3/2)^3 c_2^E$, où c_2^L et c_2^E sont respectivement les coefficients d'intermittence dans une description de type log-normal des fluctuations de vitesses Lagrangienne et Eulérienne.

de similiarité raffinée (RSH) (Eqs. (2.9) et (2.10)) qui prend en compte les statistiques de la dissipation moyennée sur une boule de rayon l. Ces concepts s'appliquent également de manière tout à fait naturelle aux fluctuations de vitesse Lagrangienne et conduisent à une expression quadratique (statistique log-normale de la dissipation ϵ_τ moyennée sur un intervalle de temps τ) pour le spectre des exposants des fonctions de structure :

$$\zeta_q^L = c_1^L q - c_2^L \frac{q^2}{2} \ , \tag{4.10}$$

où les coefficients $c_1^L = 1/2 + c_2^L$ et c_2^L sont des coefficients positifs contraints par la prédiction dimensionnelle $\zeta_2^L = 1$. L'approche multifractale de la dissipation lagrangienne est largement discutée par Borgas dans la référence [108] ; toutefois celui-ci[11] se concentre uniquement sur la dissipation et n'étend pas son approche aux fluctuations de vitesse Lagrangienne sur toute la gamme d'échelles[12] explorée par les expériences et les DNS.

Considérons une particule fluide qui se situe au point $\vec{r}(t)$ à l'instant t. Elle subit la dissipation locale[13]

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2}\nu \sum_{i,j} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{\vec{r}(t)} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\vec{r}(t)} \right]^2 \ , \tag{4.11}$$

où u_i est la ième composante cartésienne du champ de vitesse Eulérien. Durant un temps τ, la particule voyage selon une trajectoire complexe depuis la position $\vec{r}(t)$ à la position $\vec{r}(t+\tau)$, le long de la laquelle elle subit une dissipation moyenne, par analogie avec la dissipation moyennée sur une boule de taille l (Eq. (2.8)),

$$\epsilon_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \epsilon(t')dt' \ . \tag{4.12}$$

Dans le contexte de la turbulence Eulérienne, l'hypothèse de similarité raffinée (Eq. (2.10)) [1, 43, 44] permet de relier les fluctuations de l'incrément $\delta_l u$ aux fluctuations de la dissipation moyennée ϵ_l [1, 95, 98]. Dans le cadre lagrangien, cette relation devient :

$$\forall q \ , \ \langle (\delta_\tau v)^q \rangle \sim \langle (\epsilon_\tau)^{q/2} \rangle \tau^{q/2} \ , \tag{4.13}$$

où $\epsilon_\tau(t)$ est une quantité qui va dépendre de manière non triviale du temps t et de l'échelle τ. En présupposant l'invariance d'échelle de la dissipation moyennée à l'échelle τ, au travers du spectre d'exposants τ_q^L :

$$\langle (\epsilon_\tau)^q \rangle \sim \tau^{\tau_q^L} \ , \tag{4.14}$$

[11] Borgas [108] s'intéresse plus directement au spectre multifractal $f^L(\kappa)$ de la dissipation. Nous renvoyons le lecteur à la quatrième partie de ce manuscrit qui traite du lien entre statistiques Lagrangiennes et Eulériennes.

[12] Une extension aux fluctuations de vitesse inertielles est néanmoins présente dans la référence [109].

[13] Le principe d'ergodicité de Tennekes et Lumley [2] permet de montrer que les fonctions caractéristiques de $\epsilon(t)$ et $\epsilon(\vec{r})$ sont identiques. Nous reviendrons longuement sur ce point dans la quatrième partie de ce manuscrit.

on en déduit la relation suivante entre les exposants ζ_q^L et τ_q^L :

$$\zeta_q^L = \frac{q}{2} + \tau_{q/2}^L \ . \tag{4.15}$$

Un modèle log-normal pour la variable aléatoire ϵ_τ conduit en première approximation à un spectre τ_q^L (Eq. (4.14)) quadratique et suffit à expliquer l'intermittence des fluctuations de vitesse :

$$\mathcal{P}_{\epsilon_\tau}(\epsilon_\tau)d\epsilon_\tau = \mathcal{P}_{\ln\epsilon_\tau}(\ln\epsilon_\tau)d\ln\epsilon_\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\tau^2}}\exp\left[\frac{(\ln\epsilon_\tau - \mathrm{m}_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}\right]d\ln\epsilon_\tau \ , \tag{4.16}$$

où les paramètres m_τ et σ_τ^2 définissent respectivement la moyenne et la variance de $\ln\epsilon_\tau$. Ces paramètres sont alors complètement déterminés par le fait que $\langle\epsilon_l\rangle = \langle\epsilon\rangle$ et par le comportement en loi de puissance des moments de ϵ_τ (Eq. (4.14)) :

$$m_\tau = (1/2 + c_2^L)\ln(\tau/T) \text{ et } \ \sigma_\tau^2 = -4c_2^L\ln(\tau/T) \ , \tag{4.17}$$

où $c_2^L > 0$ est le coefficient d'intermittence. Les équations (4.16) et (4.17) conduisent alors à l'expression :

$$\tau_q^L = 2c_2^L q(1-q) \ . \tag{4.18}$$

Via la relation (4.15), on obtient bien un spectre ζ_q^L quadratique pour les exposants des fonctions de structure de la vitesse Lagrangienne [27–29, 31]

$$\zeta_q^L = (1/2 + c_2^L)q - c_2^L\frac{q^2}{2} \ , \tag{4.19}$$

qui comme nous l'avons vu dans la Section 4.2, est en bon accord avec les données expérimentales du groupe de l'ENS Lyon. Ainsi, nous obtenons comme estimation du coefficient d'intermittence la valeur $c_2^L = 0.09 \pm 0.02$.

4.4 Généralisation de la méthode du propagateur aux fluctuations inertielles de vitesse Lagrangienne

La généralisation combinée de l'approche du propagateur de Castaing *et al.* [9, 92–97] et du formalisme multifractal de Parisi et Frisch [1, 45] permet d'interpréter localement le comportement de l'incrément de vitesse Lagrangienne $\delta_\tau v(t)$ dans les échelles τ inertielles, comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes :

$$\delta_\tau v \equiv \beta_\tau \times \delta \ , \tag{4.20}$$

où δ est une variable aléatoire de densité Gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = \mathrm{Var}(\delta_T v))$ et

$$\beta_\tau(h) = (\tau/T)^h \tag{4.21}$$

est une variable aléatoire positive dont le logarithme est de densité de probabilité $G_\tau(\ln\beta_\tau)$ (ou propagateur) :

$$G_\tau(\ln\beta_\tau)d\ln\beta_\tau = \mathbb{P}_\tau(h)dh = \frac{\left(\frac{\tau}{T}\right)^{1-\mathcal{D}^L(h)}}{\int\left(\frac{\tau}{T}\right)^{1-\mathcal{D}^L(\gamma)}d\gamma}dh\ , \tag{4.22}$$

où $\mathcal{D}^L(h)$ sera assimilé au spectre des singularités de la vitesse Lagrangienne dans la limite $\tau/T \to 0$. Il est alors possible de calculer la densité de probabilité $\mathcal{P}(\delta_\tau v)$ des incréments à l'échelle τ :

$$\mathcal{P}(\delta_\tau v) = \int G_\tau(\ln\beta_\tau)\mathcal{G}\left(\frac{\delta_\tau v}{\beta_\tau}\right)\frac{d\ln\beta_\tau}{\beta_\tau} = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}}\mathbb{P}_\tau(h)\mathcal{G}\left(\frac{\delta_\tau v}{\beta_\tau(h)}\right)\frac{dh}{\beta_\tau(h)}\ , \tag{4.23}$$

où $\mathcal{G}(x)$ est la fonction Gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2 traitant des fluctuations de vitesse Eulérienne, les bornes d'intégration $h_{\min}$ et $h_{\max}$ intervenant dans l'équation (4.23) dépendent de la nature de "l'ondelette" utilisée. Pour résumer la discussion de l'Annexe C, nous prendrons $h_{\min} = 0$ et $h_{\max} = N$, où N est le nombre de moments nuls de l'ondelette utilisée ($N = 1$ pour l'incrément d'ordre 1, $\delta_\tau^{(1)}v(t) = v(t+\tau) - v(t)$, et $N = 2$ pour l'incrément d'ordre 2, $\delta_\tau^{(2)}v(t) = v(t+2\tau) - 2v(t+\tau) + v(t)$). L'étude des fonctions de structure signées ($\langle(\delta_\tau v)^q\rangle$) est totalement équivalente dans le cas Lagrangien à celle des cumulants du logarithme des incréments de vitesse (C_{n,β_τ}) définis dans l'Annexe D, puisque la symétrie des densités de probabilité (Fig. 4.2) implique $\mathcal{P}(\delta_\tau v) = \mathcal{P}(-\delta_\tau v) = \mathcal{P}(|\delta_\tau v|)$.

A ce point de la discussion, il est important de mentionner que la principale différence entre la turbulence Eulérienne et la turbulence Lagrangienne est que pour cette dernière, l'exposant de Hölder le plus probable déduit d'arguments dimensionels, est $h = 1/2$, c'est-à-dire une valeur significativement plus grande que l'exposant de Kolmogorov (K41) $h = 1/3$ pour les signaux de vitesse Eulérienne (Section 2.2). Le signal temporel de vitesse Lagrangienne est ainsi globalement moins "rugueux" [112] que le signal spatial de vitesse longitudinale Eulérienne. Par contre, l'intermittence Lagrangienne est beaucoup plus importante que l'intermittence Eulérienne dans la mesure ou le coefficient d'intermittence $c_2^L \gg c_2^E$, ce qui équivaut à dire que le spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h)$ est beaucoup plus large que $\mathcal{D}^E(h)$ et donc que la gamme des valeurs de h présentes dans les signaux de vitesse Lagrangienne est beaucoup plus grande que celles des valeurs de h présentes dans les signaux de vitesse Eulérienne. Ceci atteste de l'existence d'évènements rares et violents, qui se traduisent dans l'écoulement, par des accélérations (effectivement probables et observées) gigantesques des particules Lagrangiennes de l'ordre de plusieurs dizaines de fois l'accélération de la pesanteur g. A l'aide d'arguments dimensionels simples, nous établirons dans la quatrième partie de cette thèse une relation analytique entre c_2^L et c_2^E qui confortera les observations expérimentales. L'une des conséquences majeures de cet élargissement notable du spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h)$ relativement à $\mathcal{D}^E(h)$ et de la translation de son maximum de $h^E = 1/3$ à $h^L = 1/2$, est le fait que désormais des exposants $h \gtrsim 1$ sont

associés à des probabilités d'apparation $\mathbb{P}_\tau(h) \sim (\tau/T)^{1-\mathcal{D}^L(h)}$ non négligeables ($\mathcal{D}(h) \geq 0$) [106]. Comme nous l'avons discuté dans la Section 3.4.6, l'ondelette du pauvre [149, 150], à savoir l'incrément d'ordre 1, $\delta_\tau v = \delta_\tau^{(1)} v$, ne permet pas d'identifier et de mesurer les exposants $h \gtrsim 1$. En effet, comme cela est démontré dans les Annexes B et C, une ondelette d'ordre N permet uniquement d'estimer les exposants $h < N$. Ceci explique pourquoi il nous sera nécessaire, dans le Chapitre 5, d'utiliser l'incrément d'ordre $N = 2$

$$\delta_\tau^{(2)} v(t) = v(t+2\tau) - 2v(t+\tau) + v(t) \ , \tag{4.24}$$

pour caractériser statistiquement l'intermittence de la vitesse Lagrangienne.

4.5 Les cumulants du logarithme des incréments

Comme nous l'avons vu dans le cadre Eulérien (Section 2.3.4), la moyenne et la variance de $\ln|\delta_l^{(N)} u|$ sont reliées à la moyenne et à la variance de $\ln \beta_l^{(N)}$, c'est-à-dire à la moyenne et à la largeur à mi-hauteur du propagateur $G_l(\ln \beta_l^{(N)})$ (Fig. 2.1). De la même manière dans le cas Lagrangien, la moyenne et la variance de $\ln|\delta_\tau^{(N)} v|$ sont reliées à la moyenne et à la variance de $\ln \beta_\tau^{(N)}$, c'est-à-dire à la moyenne et à la largeur à mi-hauteur du propagateur $G_\tau(\ln \beta_\tau^{(N)})$:

$$\begin{aligned}
C_{1,\beta_\tau^{(N)}} &= \langle \ln \beta_\tau^{(N)} \rangle = C_{1,\delta_\tau^{(N)} v}(\tau) - C_{1,\delta} = \int \ln \beta_\tau^{(N)} G_\tau(\ln \beta_\tau^{(N)}) d \ln \beta_\tau^{(N)} \ , \\
C_{2,\beta_\tau^{(N)}} &= \mathrm{Var}(\ln \beta_\tau^{(N)}) = C_{2,\delta_\tau^{(N)} v}(\tau) - C_{2,\delta} = \int (\ln \beta_\tau^{(N)})^2 G_\tau(\ln \beta_\tau^{(N)}) d \ln \beta_\tau^{(N)} - \left(C_{1,\beta_\tau^{(N)}} \right)^2 \ .
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Les cumulants d'ordre supérieur sont donnés par l'équation (D.5) en annexe D, l'équation (D.7) correspondant aux cumulants de la Gaussienne. Le fait que le propagateur soit centré en $C_{1,\beta_\tau^{(N)}}$ et que sa largeur à mi-hauteur soit $2\sqrt{C_{2,\beta_\tau^{(N)}}}$ est exact dans le cadre du modèle log-normal. Retenons simplement que la largeur non nulle du propagateur est liée au phénomène d'intermittence, et que dans une première approche, nous caractériserons cette largeur par l'écart-type du propagateur, qu'il soit log-normal ou autre (par exemple log-Poisson [51–53]). Dans le domaine inertiel, l'invariance d'échelle impose que les cumulants du logarithme se comportent comme le logarithme de l'échelle, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
C_{1,\beta_\tau^{(N)}} &= c_1^L \ln(\tau/T) \ , \\
C_{2,\beta_\tau^{(N)}} &= -c_2^L \ln(\tau/T) \ ,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

où $c_2^L = 0.09 \pm 0.02$ et $c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.59 \pm 0.02$.

Chapitre 5

Trajectoires Lagrangiennes dans le domaine dissipatif

5.1 Le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_\tau$

5.1.1 Définition dimensionnelle

Dans le cadre temporel de la turbulence Lagrangienne, le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ (Eq. (4.3)) caractérise la complexité des trajectoires des particules à grande échelle T. Il est formé à partir des quantités qui caractérisent complètement ces trajectoires à cette échelle, à savoir un temps T, la viscosité ν du fluide considéré et une fluctuation caractéristique de vitesse $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\delta_T^{(1)} v)$. De manière générale, pour une ondelette d'ordre N quelconque[1], une fluctuation de vitesse caractéristique à l'échelle T est donnée par $\sigma_N^2 = \mathrm{Var}(\delta_T^{(N)} v)$, ce qui introduit une dépendance du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e^{(N)} = \sigma_N^2 T/\nu$ en fonction de l'ordre N (et donc de la normalisation) de l'ondelette. Il suffit alors de choisir une normalisation appropriée des incréments d'ordre N (Annexe B) de telle sorte que σ_N devienne indépendante de l'ordre N. Cette discussion concerne exclusivement l'amplitude du cumulant d'ordre 1, $C_{1,\delta_\tau^{(N)} v}$, puisqu'il est évident de montrer que les cumulants du logarithme d'ordre supérieur sont indépendants de la normalisation de l'ondelette. Sans perte de généralité, nous considèrerons donc que $\sigma_N = \sigma$ et que donc $\mathbb{R}_e^{(N)} = \mathbb{R}_e$.

Expérimentalement, les statistiques de $\delta_T^{(N)} v(t)$ à l'échelle T sont indiscernables de celles d'une variable aléatoire Gaussienne [28]. A des échelles plus petites, la trajectoire révèle une structure particulière, *a priori* fortement conditionnée par celle du champ Eulérien[2]. La vitesse d'une particule fluide au temps $t + \tau$ est fortement conditionnée à sa vitesse à

[1] Nous allons justifier *a posteriori* dans la suite de ce chapitre, l'utilisation des "ondelettes" d'ordre N quelconque, l'ondelette d'ordre $N = 1$ étant indaptée à l'étude des signaux expérimentaux et numériques de turbulence Lagrangienne.

[2] Malgré des conditions d'isotropie et d'homogénéité, le champ Eulérien présente des structures de type vortex [16–22, 35], dans lesquelles les particules fluides subissent de fortes variations de vitesse, aussi bien en amplitude qu'en direction [23, 28].

l'instant t, comme l'atteste l'existence de corrélations à longue portée (que nous étudierons dans la cinquième partie de ce manuscript) [29, 31]. Par analogie avec l'expression proposée en turbulence Eulérienne (Eq. (2.42)), nous définissons le nombre de Reynolds local en turbulence Lagrangienne de la façon suivante :

$$\mathbb{R}_\tau = \frac{(\sigma\beta_\tau^{(N)})^2\tau}{\nu} \ . \tag{5.1}$$

A une échelle τ inertielle, $\mathbb{R}_\tau$ va fluctuer et sa valeur moyenne va diminuer avec l'échelle. Dans le cadre du formalisme multifractal [45, 62], on peut réexprimer $\mathbb{R}_\tau$ dans le domaine inertiel de manière formelle en fonction de l'exposant de Hölder $h(t)$ le long d'une trajectoire Lagrangienne :

$$\mathbb{R}_\tau(t) = \left(\frac{\tau}{T}\right)^{2h(t)+1} \mathbb{R}_e \ . \tag{5.2}$$

En analogie avec les travaux de Paladin et Vulpiani [62], le nombre de Reynolds local caractéristique des échelles dissipatives τ_η est de l'ordre de l'unité[3], $\mathbb{R}_{\tau_\eta} = 1$, ce qui conduit à l'expression suivante[4] de τ_η en fonction de $\mathbb{R}_e$ et de l'exposant h :

$$\tau_\eta(h) = T\mathbb{R}_e^{-1/(2h+1)} \ . \tag{5.3}$$

La relation (5.3) montre clairement que si les fluctuations inertielles de vitesse Lagrangienne sont intermittentes, c'est-à-dire si l'exposant h fluctue temporellement le long d'une trajectoire d'une particule Lagrangienne et prend des valeurs dans un intervalle de longueur finie, alors les effets de lissage dûs à la viscosité finie du fluide, se manifestent dans un domaine continu d'échelles $[\tau_\eta^-, \tau_\eta^+]$, que nous appellerons le domaine dissipatif intermédiaire, et que nous nous attacherons à décrire dans la suite de ce chapitre. L'échelle τ_η^+ est définie comme la plus petite échelle inertielle (en analogie avec l'échelle η^+ du contexte Eulérien définie dans la Section 3.3.1) alors que τ_η^- correspond à la plus grande échelle du domaine dissipatif profond (en analogie avec l'échelle η^- du contexte Eulérien définie dans la Section 3.3.1). Remarquons dès à présent qu'en analogie avec l'étude des fluctuations de vitesse Eulérienne (Eq. (2.45) et Fig. 2.2), le maximum du propagateur se déplace à la "vitesse"

$$\left(\frac{\partial\langle\ln\mathbb{R}_\tau\rangle}{\partial\ln(\tau/T)}\right)_{\tau\geq\tau_\eta^+} \simeq 2\frac{\partial C_{1,\beta_\tau^{(N)}}}{\partial\ln(\tau/T)} + 1 = 2c_1^L + 1 \simeq 2 \ . \tag{5.4}$$

où $C_{1,\beta_\tau^{(N)}}$ est définie dans l'équation (4.25) et le coefficient c_1^L dans l'équation (4.26). La relation (5.4) est indépendante de l'ordre[5] N de l'ondelette, et la largeur du propagateur à mi-hauteur est en première approximation bien décrite par $2\sqrt{C_{2,\beta_\tau^{(N)}}}$.

[3]En première approximation, nous prendrons $\mathbb{R}_{\tau_\eta} = 1$. En fait, comme nous l'avons vu dans le contexte Eulérien, il est plus correct de prendre en compte la valeur précise $\mathbb{R}^\dagger$ de cette constante, ce qui revient à renormaliser le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ (Eq. (4.3)).

[4]Remarquons que l'on retrouve bien dans une description monofractale *à la* K41 ($h = 1/2$ unique), l'expression de l'échelle dissipative $\tau_{\eta_K} = \tau_\eta(h = 1/2)$ obtenue par des arguments dimensionels (Eq. (4.5)).

[5]Que nous prendrons supérieur ou égal à 2 dans cette discussion, l'incrément d'ordre 1 étant inadapté à l'étude des exposants $h \geq 1$ qui sont *a priori* relevants dans la description des fluctuations de vitesse Lagrangienne.

5.1.2 Le régime dissipatif intermédiaire

Dans le domaine dissipatif profond, $\tau \leq \tau_\eta^-$, la dépendance dans les échelles de $\delta_\tau^{(N)} v$ est trivialement donnée par le développement de Taylor (Annexe C) :

$$\delta_\tau^{(N)} v(t) \propto \tau^N \frac{\partial^N v}{\partial t^N} \ . \tag{5.5}$$

Les deux premiers cumulants du logarithme des incréments de vitesse se comportent alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_{1,\beta_\tau^{(N)}} &= N \ln(\tau/\tau_\eta^-) + C_{1,\beta_{\tau_\eta^-}^{(N)}} \ , \\ C_{2,\beta_\tau^{(N)}} &= C_{2,\beta_{\tau_\eta^-}^{(N)}} \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Par analogie avec l'équation (3.52), le maximum du propagateur se déplace désormais à "la vitesse" :

$$\left(\frac{\partial \langle \ln \mathbb{R}_\tau \rangle}{\partial \ln(\tau/T)} \right)_{\tau \leq \tau_\eta^-} \simeq 2 \frac{\partial C_{1,\beta_\tau^{(N)}}}{\partial \ln(\tau/T)} + 1 = 2N + 1 \ . \tag{5.7}$$

A la traversée du domaine dissipatif intermédiaire, le cumulant d'ordre 2 est alors multiplié, (par analogie avec l'équation (3.53)), par un facteur de l'ordre de

$$\frac{C_{2,\beta_{\tau_\eta^-}^{(N)}}}{C_{2,\beta_{\tau_\eta^+}^{(N)}}} \simeq \left(\frac{2N+1}{2c_1^L + 1} \right)^2 \ . \tag{5.8}$$

De façon plus ou moins inattendue, on retrouve la loi des 9/4 obtenue en turbulence Eulérienne (Section 3.4.5) [66] puisque la relation (5.8) implique un facteur d'amplification de l'ordre de 9/4 pour une ondelette d'ordre $N = 1$ et sous l'approximation monofractale $c_1^L \simeq 1/2$. Avec les mêmes raisonnements que ceux développés pour la turbulence Eulérienne, on montre de la même manière (Eq. (3.50)) que l'étendue du domaine dissipatif intermédiaire varie de façon non triviale avec le nombre de Reynolds [15, 66, 106], c'est-à-dire $\ln(\tau_\eta^-/\tau_\eta^+) \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$. Les implications de cette prédiction sont nombreuses et ont été largement discutées dans le chapitre 3.

5.2 Description multifractale des fluctuations de vitesse Lagrangienne

5.2.1 Statistiques de l'accélération et des dérivées temporelles d'ordre supérieur de la vitesse Lagrangienne

A cause du phénomène de lissage induit par les effets visqueux, le signal temporel de vitesse Lagrangienne est $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire que l'incrément d'ordre N se comporte dans le

domaine dissipatif profond ($\tau \leq \tau_\eta^-$) comme τ^N (Eq. (5.5)). L'approche probabiliste permet de prendre en compte cette propriété fondamentale du signal physique, qui implique que la vitesse ne peut pas varier de façon significative sur des temps infiniment courts. Le processus aléatoire $\partial_t^{(N)} v(t)$ peut donc être modélisé comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes

$$\partial_t^{(N)} v \equiv \delta \times \lim_{\tau \to 0} \frac{\beta_\tau^{(N)}}{\tau^N} \ , \tag{5.9}$$

c'est-à-dire une Gaussienne (δ) pondérée par un "poids" lui même stochastique. Pour un exposant h fixé, le "poids" $\beta_\tau^{(N)}$ qui se comportait comme $(\tau/T)^h$ dans le domaine inertiel $\tau \geq \tau_\eta(h)$ (Eq. (4.21)), devient proportionnel à τ^N à des échelles $\tau \leq \tau_\eta(h)$ dans le domaine dissipatif. En imposant la continuité à la traversée de $\tau_\eta(h)$, en analogie avec les travaux de Nelkin [67], on obtient aux échelles $\tau \leq \tau_\eta(h)$:

$$\beta_\tau^{(N)}(h) = \left(\frac{\tau}{T}\right)^N \left(\frac{\tau_\eta(h)}{T}\right)^{h-N} \ , \tag{5.10}$$

avec comme densité de probabilité de l'exposant h à l'échelle τ :

$$\mathbb{P}_\tau(h) \sim \left(\frac{\tau_\eta(h)}{T}\right)^{1-\mathcal{D}^L(h)} \ . \tag{5.11}$$

Les équations (5.3), (5.9), (5.10) et (5.11) permettent alors de calculer la densité de probabilité de $\partial_t^{(N)} v$, et donc les moments ($\langle (\partial_t^{(N)} v)^q \rangle$) et les cumulants du logarithme des dérivées temporelles d'ordre supérieur de la vitesse Lagrangienne $C_{n,\partial_t^{(N)} v}$ (Annexe D). Par exemple, les moments d'ordre q s'expriment de la façon suivante :

$$\langle (\partial_t^{(N)} v)^q \rangle \sim \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mathbb{R}_e^{-\frac{q(h-N)+1-\mathcal{D}^L(h)}{2h+1}} dh \ . \tag{5.12}$$

Dans la limite $\mathbb{R}_e \to +\infty$, l'intégrale intervenant dans l'expression précédente se simplifie en appliquant la méthode du col. On trouve ainsi que

$$\langle (\partial_t^{(N)} v)^q \rangle \sim \mathbb{R}_e^{\chi^L_{q,N}} \ , \tag{5.13}$$

avec

$$\chi^L_{q,N} = \min_h \left[-\frac{q(h-N)+1-\mathcal{D}^L(h)}{2h+1} \right] \ . \tag{5.14}$$

Les cumulants $C_{n,\partial_t^{(N)} v}$ sont alors obtenus en développant en série entière (en fonction de q) la fonction $\chi^L_{q,N} \ln \mathbb{R}_e$.

Dans l'hypothèse où le spectre des singularités est quadratique (hypothèse qui semble tout à fait réaliste comme nous l'avons vu dans la Section 4.2) :

$$\mathcal{D}^L(h) = 1 - \frac{(h - c_1^L)^2}{2c_2^L} \ , \tag{5.15}$$

avec $c_2^L = 0.09$ et $c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.59$, il est alors possible d'obtenir une expression analytique (complexe) de la fonction $\chi_{q,N}^L$. En ce qui concerne l'accélération $a = \partial_t v$ ($N = 1$), on obtient les comportements en fonction du nombre de Reynolds suivants pour sa variance

$$\langle a^2 \rangle \sim \mathbb{R}_e^{0.58} \ , \tag{5.16}$$

et sa *Flatness*

$$\frac{\langle a^4 \rangle}{\langle a^2 \rangle^2} \sim \mathbb{R}_e^{0.90} \ . \tag{5.17}$$

Remarquons que ces comportements sont cohérents aves les résultats obtenus par Sawford *et al.* [110], en supposant que le spectre des singularités de la dissipation locale Eulérienne est celui du "p-modèle" de Meneveau et Sreenivasan [50], et en remontant aux statistiques de l'accélération Lagrangienne via la transformation donnée par l'équation (6.44) que nous discuterons dans la quatrième partie de ce manuscrit. De manière générale, les cumulants du logarithme des dérivées N$^{\text{ième}}$ de la vitesse s'expriment de la façon suivante :

$$C_{2,\partial_t^{(N)} v} = \mathrm{Var}\left[\ln |\partial_t^{(N)} v|\right] = \frac{(1+2N)^2 c_2^L}{(1+2c_1^L)^3} \ln \mathbb{R}_e \ , \tag{5.18}$$

et

$$C_{n,\partial_t^{(N)} v} \underset{n\geq 2}{\propto} \frac{(1+2N)^n (c_2^L)^{n-1}}{(1+2c_1^L)^{2n-1}} \ln \mathbb{R}_e \ . \tag{5.19}$$

On retrouve bien la relation (5.8) et donc la loi des 9/4 pour $N = 1$ [66] : le cumulant d'ordre 2 du logarithme de l'accéleration ($C_{2,a} = C_{2,\beta^1_{\eta^-}}$) est multiplié par un facteur de l'ordre de 9/4 par rapport à celui de l'incrément de vitesse à la plus petite échelle inertielle τ_η^+ ($C_{2,\beta^1_{\eta^+}} \simeq (c_2^L/(1+2c_1^L)) \ln \mathbb{R}_e$). En fait, si l'on utilise l'approximation monofractale K41 $c_1^L = 1/2$, on obtient exactement l'égalité :

$$\frac{C_{2,a}}{C_{2,\beta^1_{\eta^+}}} = \frac{9}{(1+2c_1^L)^2} = \frac{9}{4} \ . \tag{5.20}$$

5.2.2 Statistiques des incréments d'ordre N de la vitesse Lagrangienne sur toute la gamme d'échelles

L'approche du propagateur permet d'interpréter $\delta_\tau^{(N)} v$ comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes ; en généralisant l'équation (4.20) on obtient :

$$\delta_\tau^{(N)} v \equiv \beta_\tau^{(N)} \times \delta \ , \tag{5.21}$$

où δ est Gaussienne de variance $\sigma_N^2 = \mathrm{Var}(\delta_T^{(N)} v)$, et $\beta_\tau^{(N)}$ contient toute la dépendance dans les échelles que nous allons modéliser dans le cadre du formalisme multifractal [106]. La relation (5.3) montre que l'échelle dissipative τ_η fluctue le long de la trajectoire d'une particule Lagrangienne, reflétant par là les fluctuations de l'exposant h. A une échelle τ

donnée, on peut définir, comme nous l'avons fait dans la Section 3.4 pour la turbulence Eulérienne, un exposant caractéristique de transition :

$$h^*(\tau/T, \mathbb{R}_e) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln \mathbb{R}_e}{\ln(\tau/T)}\right) \ , \tag{5.22}$$

qui sépare les comportements inertiaux ($h \leq h^*$), pour lesquels $\beta_\tau^{(N)}(h) = (\tau/T)^h$ (Eq. (4.21)) avec comme densité de probabilité d'un exposant h, $\mathbb{P}_\tau^i(h) \sim (\tau/T)^{1-\mathcal{D}^L(h)}$ (Eq. (4.22)), des comportements dissipatifs ($h \geq h^*$), pour lesquels cette fois-ci $\beta_\tau^{(N)}(h) = (\tau/T)^{(N)}(\tau_\eta(h)/T)^{h-N}$ (Eq. (5.10)) et $\mathbb{P}_\tau^d(h) \sim (\tau_\eta(h)/T)^{1-\mathcal{D}^L(h)}$ (Eq. (5.11)). Remarquons que

$$\lim_{\tau/T \to 0^+} h^*(\tau/T, \mathbb{R}_e) = -1/2 \ , \tag{5.23}$$

et

$$\lim_{\tau/T \to 1^-} h^*(\tau/T, \mathbb{R}_e) = +\infty \ . \tag{5.24}$$

Pour l'objet physique qu'est une trajectoire Lagrangienne, il apparaît alors plus réaliste de faire intervenir une transition de type Batchelor–Meneveau [64, 147], qui impose un comportement $\mathcal{C}^\infty$ à $\beta_\tau^{(N)}$ et $\mathbb{P}_\tau$ vis à vis de l'échelle[6] τ, tout en respectant les statistiques du domaine inertiel ($\tau \geq \tau_\eta^+$) et du domaine dissipatif profond ($\tau \leq \tau_\eta^-$). Nous nous proposons d'utiliser la modélisation suivante :

$$\beta_\tau^{(N)}(h, \mathbb{R}_e) = \frac{\left(\frac{\tau}{T}\right)^h}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_\eta(h)}\right)^{-\gamma}\right]^{(N-h)/\gamma}} \ , \tag{5.25}$$

et

$$\mathbb{P}_\tau(h, \mathbb{R}_e, \mathcal{D}^L(h)) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\left(\frac{\tau}{T}\right)^{1-\mathcal{D}^L(h)}}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_\eta(h)}\right)^{-\gamma}\right]^{(\mathcal{D}^L(h)-1)/\gamma}} \ , \tag{5.26}$$

où nous avons introduit un paramètre libre γ qui reflète en quelque sorte la force de la transition entre domaine inertiel et domaine dissipatif. Par exemple, la modélisation de la fonction de structure d'ordre 2 de la vitesse Eulérienne (Eq. (3.106)) de Batchelor [147] correspond au choix $\gamma = 2$; dans ce cas les équations (5.25) et (5.26) peuvent être considérées comme l'analogue Lagrangien de la coupure de Batchelor–Meneveau dans le contexte Eulérien (Eqs. (3.32) et (3.33)). Remarquons que le choix $\gamma = +\infty$ permet de retrouver l'analogue Lagrangien de la coupure $\mathcal{C}^0$, formalisée dans l'approche du propagateur Eulérien par les relations (3.27) et (3.29). La constante de normalisation $\mathcal{Z}$ dans l'équation

[6] Notamment à l'échelle de transition $\tau = \tau_\eta(h)$.

(5.26) est obtenue en intégrant sur tous les exposants $h \geq -1/2$:

$$\mathcal{Z}(\tau/T, \mathbb{R}_e) = \int_{-1/2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\tau}{T}\right)^{1-\mathcal{D}^L(h)}}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_\eta(h)}\right)^{-\gamma}\right]^{(\mathcal{D}^L(h)-1)/\gamma}} dh \ . \tag{5.27}$$

Les équations (5.25) et (5.26) permettent de calculer, pour un nombre de Reynolds donné, les moments et les cumulants du logarithme de la variable aléatoire $\beta_l^{(N)}$ à toutes les échelles τ, moyennant une fonction paramètrable $\mathcal{D}^L(h)$ qui sera assimilée au spectre des singularités dans la limite des nombres de Reynolds infiniment grands. De plus, l'équation (5.21) permet directement de calculer la densité de probabilité des incréments de vitesse :

$$\mathcal{P}(\delta_\tau^{(N)} v) = \int G_\tau(\ln \beta_\tau^{(N)}) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_\tau^{(N)} v}{\beta_\tau^{(N)}}\right) \frac{d \ln \beta_\tau^{(N)}}{\beta_\tau^{(N)}} = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mathbb{P}_\tau(h) \mathcal{G}\left(\frac{\delta_\tau^{(N)} v}{\beta_\tau^{(N)}(h)}\right) \frac{dh}{\beta_\tau^{(N)}(h)} \ , \tag{5.28}$$

où $\mathcal{G}$ est la densité de probabilité d'une variable Gaussienne centrée de variance σ_N^2. La relation (5.28) est la généralisation de la relation (4.23) à toutes les échelles et pour une ondelette d'ordre N quelconque. Dans ce manuscrit, nous rappelons que nous avons fait le choix $h_{\min} = 0$ et $h_{\max} = N$ pour les bornes d'intégration. L'incrément d'ordre $N = 1$ a une place toute particulière dans le contexte de la turbulence Lagrangienne puisqu'un modèle quadratique pour $\mathcal{D}(h)$ de paramètre $c_2^L = 0.09$ (Eq. (5.15)) montre que $\mathcal{D}^L(h) \lesssim 0$ pour des exposants $h \gtrsim 1$. Ainsi, à une échelle τ telle que $h^*(\tau/T, \mathbb{R}_e) \rangle 1$ (Eq. (5.22)), les exposants inertiels $h \in [1, h^*]$ relativement peu probables (mais pas infiniment peu probables comme cela était le cas en turbulence Eulérienne) ne sont pas pris en compte dans l'intégration de l'équation (5.28) lorsqu'on utilise une ondelette d'ordre $N = 1$. Plus précisemment, en utilisant un modèle quadratique pour $\mathcal{D}^L(h)$ (Eq. (5.15)), de paramètres $c_2^L = 0.09$ et $c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.59$ en accord avec les observations expérimentales (Eq. (4.26)), on peut alors vérifier que $\mathcal{D}^L(0.95) = 0.28$, $\mathcal{D}^L(1) = 0.07$ et $\mathcal{D}^L(1.05) = -0.18$, ce qui montre que négliger les exposants $h \geq 1$ dans le calcul de la densité de probabilité des incréments d'ordre $N = 1$ (Eq. (5.28)) demeure aventureux et approximatif. De plus, si au regard de la précision expérimentale, on ne peut pas exclure le fait que c_2^L puisse être supérieur à la valeur estimée avec les fonctions de structure, alors $\mathcal{D}^L(1)$ pourrait être significativement positif, ce qui hypothèquerait définitivement la validité du calcul de la densité de probabilité des incréments d'ordre 1. Cette discussion justifie donc l'utilisation des ondelettes analysatrice d'ordre $N > 1$ pour lesquelles les exposants $h > N \geq 2$ correspondent à des valeurs définitivement négatives de $\mathcal{D}^L(h)$ et donc ne contribuent pas de façon significative au calcul de l'intégrale dans le membre de droite de l'équation (5.28).

Nous avons représenté dans la figure 5.1, les deux premiers cumulants de $\ln \beta_\tau^{(N)}$, $C_{1,\beta_\tau^{(N)}}(\tau) = \langle \ln \beta_\tau^{(N)} \rangle$ et $C_{2,\beta_\tau^{(N)}}(\tau) = \mathrm{Var}(\ln \beta_\tau^{(N)})$ normalisés par $\ln \mathbb{R}_e$, en fonction de $\ln(\tau/T)/\ln \mathbb{R}_e$, calculés respectivement avec les ondelettes d'ordre $N = 1$ et $N = 2$. En

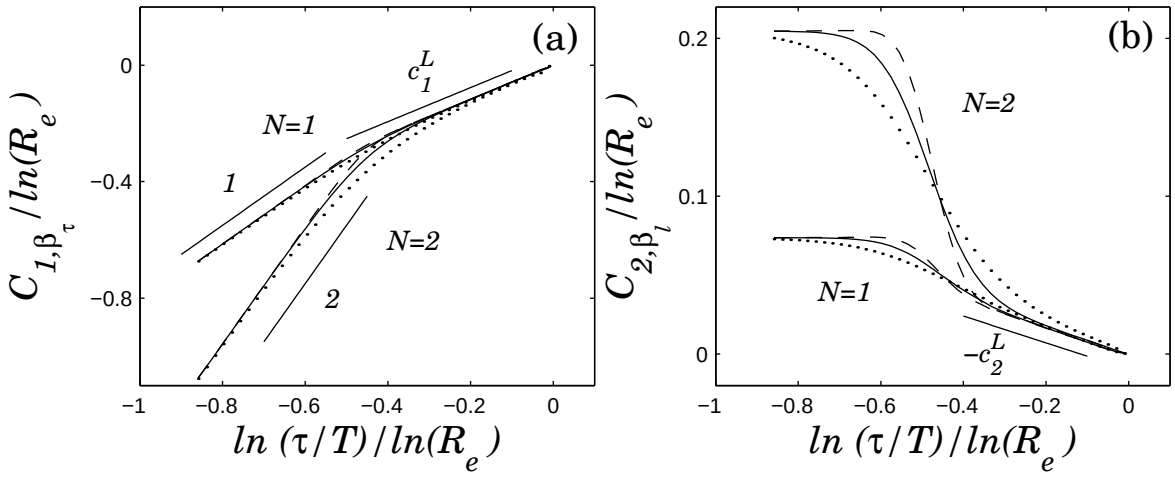

FIG. 5.1 – Représentation des cumulants du logarithme des incréments de vitesse Lagrangienne $C_{1,\beta_\tau^{(N)}}$ (a) et $C_{2,\beta_\tau^{(N)}}$ (b) normalisés par $\ln \mathbb{R}_e$, en fonction de $\ln(\tau/T)/\ln(R_e)$. Les calculs ont été effectués à partir des équations (5.25) et (5.26) avec les ondelettes d'ordre $N = 1$ et 2, en utilisant l'expression quadratique du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ donnée par l'équation (5.15)), avec les valeurs des paramètres $c_2^L = 0.09$ et $c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.59$. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats obtenus avec la transition dite de Batchelor–Meneveau ($\gamma = 2$), en trait discontinu ceux obtenus avec la transition $\mathcal{C}^0$ ($\gamma = +\infty$), et en pointillés ceux correspondant à la transition douce ($\gamma = 1$). Le nombre de Reynolds est égal à $\mathbb{R}_e = \exp(10)$.

trait continu sont représentés les cumulants calculés à partir des expressions (5.25) et (5.26) en utilisant la transition de Batchelor–Meneveau ($\gamma = 2$), en trait discontinu la transition $\mathcal{C}^0$ ($\gamma = +\infty$) et en pointillés ceux correspondants à la transition "douce" ($\gamma = 1$). Ces résultats ont été établis pour un nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e = \exp(10)$, en supposant la validité de la description log-normale du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ donné par l'équation (5.15). Le domaine inertiel $-0.4 \ln \mathbb{R}_e \leq \ln(\tau/T) \leq 0$ de la turbulence Lagrangienne apparaît donc beaucoup plus petit que celui de la turbulence Eulérienne (Fig. 3.4), en cohérence avec la prédiction dimensionnelle[7] $\ln(\tau_{\eta_K}/T) = -0.5 \ln \mathbb{R}_e$. Nous constatons de plus que ce domaine d'échelles apparait fortement perturbé par les effets visqueux, puisque en particulier dans le cas de la transition douce ($\gamma = 1$), on ne retrouve pas un comportement linéaire clair des cumulants en fonction de $\ln(\tau/T)$, ce qui témoigne d'un écart significatif à l'invariance d'échelle. Ainsi, l'étendue $\ln(\tau_\eta^+/\tau_\eta^-)$ du domaine dissipatif intermédiaire apparaît d'autant plus grande[8] que le paramètre γ est petit. Nous allons voir dans la Section 5.3.1 que ce paramètre peut être utilisé pour modéliser les effets de taille finie des particules (*tracers*)

[7]Dans la description Eulérienne du fluide, on avait $\ln(\eta_K/L) = -0.75 \ln \mathbb{R}_e$ (Eq. (1.6)).

[8]Remarquons que les comportements limites des cumulants sont bien respectés aux échelles $\tau \gg \tau_\eta^-$ et $\tau \ll \tau_\eta^+$. Aux grands nombres de Reynolds, on retrouve que $\ln(\tau_\eta^+/\tau_\eta^-) \sim \sqrt{\ln \mathbb{R}_e}$.

utilisées dans les dispositifs expérimentaux. En effet, il sera très difficile d'observer, expérimentalement comme numériquement, des comportements inertiels sur un domaine d'échelle suffisamment étendu. En ce qui concerne le domaine dissipatif, le cumulant d'ordre 2 (Fig. 5.1(b)) "accèlère" d'autant plus sur un domaine d'autant plus petit que γ est grand. En accord avec l'équation (5.8), $C_{2,\beta_\tau^{(N)}}$ est bien multiplié par un facteur[9] de l'ordre de 9/4 pour $N = 1$, et de l'ordre de 25/4 pour $N = 2$. Le cumulant d'ordre 1 (Fig. 5.1(a)) transite bien vers le comportement trivial du domaine dissipatif $\sim N \ln(\tau/T)$ aux échelles $\tau \leq \tau_\eta^-$, l'échelle τ_η^- étant d'autant plus petite que γ est petit.

5.3 Description probabiliste des données expérimentales et numériques

5.3.1 Les cumulants du logarithme des incréments d'ordre N de la vitesse Lagrangienne

Nous avons représenté dans la figure 5.2, les résultats du calcul des trois premiers cumulants du logarithme des incréments d'ordre N de vitesse Lagrangienne (Annexe D) [106],

$$C_n = C_{n,\delta_\tau^{(N)}v} - C_{n,\delta_T^{(N)}v} \ . \tag{5.29}$$

Les incréments d'ordre $N = 1$, $\delta_\tau^{(1)}v(t) = v(t+\tau) - v(t)$ ($\circ$), et d'ordre $N = 2$, $\delta_\tau^{(2)}v(t) = v(t+2\tau) - 2v(t+\tau) + v(t)$ ($\square$) ont été estimés à partir des signaux expérimentaux de l'ENS Lyon [28] (Figs. 5.2(a-c)), obtenus dans un écoulement de von Kármán à $\mathbb{R}_\lambda = 740$. Pour comparaison, nous rapportons dans les figures 5.2(d-f), les résultats obtenus à partir des données numériques de Lévêque [31] issus de DNS des équations de Navier-Stokes à $\mathbb{R}_\lambda = 140$. Sur la figure 5.2, nous avons aussi représenté les prédictions théoriques pour $C_{n,\beta_\tau^{(1)}}$ en trait continu, $C_{n,\beta_\tau^{(2)}}$ en trait discontinu. Ces prédictions sont issues des relations (5.25) et (5.26), où les paramètres $c_2^L, \mathbb{R}_e, T$ et γ ont été estimés (par la méthode des moindres carrés) à partir des deux premiers cumulants de $\ln|\delta_\tau^{(2)}v|$.

En ce qui concerne les données expérimentales (Figs. 5.2(a-c)), les cumulants calculés à partir de l'ondelette d'ordre $N = 2$ sont très bien décrits dans l'approche multifractale que nous avons développée dans la Section 5.2, avec le jeu de paramètres suivants :

$$c_2^L = 0.0753 \ , \ c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.5753 \tag{5.30}$$

et

$$\ln \mathbb{R}_e = 9.24 \ , \ \gamma = 1.08 \ . \tag{5.31}$$

Le cumulant d'ordre 1 (Fig. 5.2(a)) ne présente pas de véritable comportement linéaire en fonction de $\ln(\tau/T)$, en particulier à grande échelle ($\tau \sim T$) où les effets d'anisotropie des

[9] Indépendant de γ.

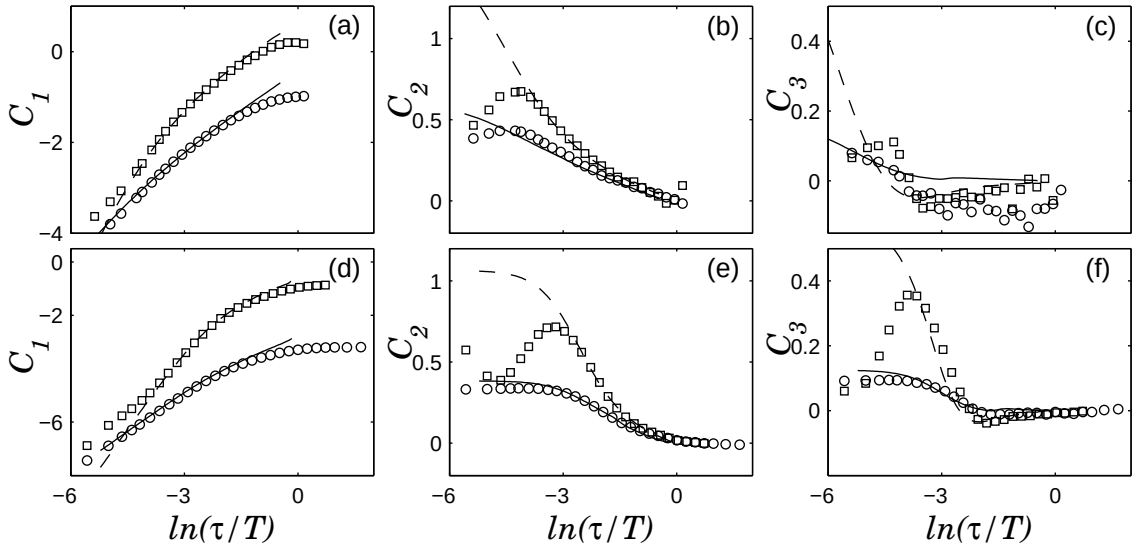

FIG. 5.2 – Représentation des trois premiers cumulants du logarithme $C_n = C_{n,\delta_\tau v} - C_{n,\delta_T v}$ des incréments d'ordre 1 ($\delta_\tau^{(1)} v(t) = v(t+\tau) - v(t)$) ($\circ$) et d'ordre 2 ($\delta_\tau^{(2)} v(t) = v(t+2\tau) - 2v(t+\tau) + v(t)$) ($\square$) en fonction de $\ln(\tau/T)$. *Signaux expérimentaux de l'ENS Lyon* ($\mathbb{R}_\lambda = 740$) : (a) C_1, (b) C_2 et (c) C_3. Les cumulants théoriques sont obtenus à partir des équations (5.25) et (5.26) pour une ondelette d'ordre $N = 1$ (traits continus) et d'ordre 2 (traits discontinus), dans un cadre log-normal de paramètres $c_2^L = 0.075$ et $c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.575$, pour un nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 9.24$ et pour une valeur du paramètre de transition $\gamma = 1.08$ (voir texte). *Signaux numériques de DNS* ($\mathbb{R}_\lambda = 140$) : (d) C_1, (e) C_2 et (f) C_3. Les cumulants théoriques sont obtenus à partir des mêmes équations (5.25) et (5.26), dans un cadre log-normal de paramètres $c_2^L = 0.086$ et $c_1^L = 1/2 + c_2 = 0.586$, et pour un nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 5.22$ et la valeur $\gamma = 1.98$.

grandes échelles (que nous n'avons pas pris en compte dans notre modélisation), sont susceptibles de briser l'invariance d'échelle. Comme nous l'avons vu précédemment, les effets dissipatifs en turbulence Lagrangienne se manifestent "très tôt", c'est-à-dire à des échelles ($\ln(\tau/T) \approx -0.4 \ln \mathbb{R}_e$), ce qui limite fortement l'étendue du domaine inertiel. En conséquence, C_1 n'exhibe pas de comportement linéaire clair en fonction de $\ln(\tau/T)$, alors que le modèle multifractal prédit $C_1 = c_1^L \ln(\tau/T)$ (Eq. (4.26)) dans le domaine inertiel. Remarquons toutefois que les échelles dissipatives sont quant à elles très bien décrites et ceci aussi bien lorsqu'on utilise les incréments d'ordre $N = 1$ que ceux d'ordre $N = 2$. Le cumulant d'ordre 2 (Fig. 5.2(b)) apparait beaucoup moins sensible aux effets d'anisotropie à grande échelle [80], et est quant à lui très bien décrit par notre approche. Nous voulons porter l'attention du lecteur sur le fait que le formalisme que nous proposons permet de très bien modéliser les statistiques des incréments d'ordre $N \geq 2$, car la forme du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ que nous obtenons à partir des données expérimentales, montre que la physique liée aux valeurs de l'exposant h proches de l'unité ($\mathcal{D}^L(h \simeq 1) \gtrsim 0$) ne peut être négligée contrairement au cas de la vitesse Eulérienne ($\mathcal{D}^L(h \simeq 1) \ll 0$). Nous rappelons que dans cette situa-

tion, l'incrément d'ordre $N = 1$ n'est pas adapté (Annexe C) [112, 150]. Les données pour le cumulant d'ordre 3 (Fig. 5.2(c)) sont soumises à une forte dispersion statistique et se comportent de manière non triviale dans la partie du domaine dissipatif accessible à l'expérience. La description log-normale que nous proposons (Eqs. (5.25) et (5.26)) se révèle être en bon accord avec le comportement de C_3 aussi bien dans le domaine inertiel que dans le domaine dissipatif. Les effets dissipatifs viennent cependant perturber les statistiques inertielles, puisque nous constatons que le cumulant théorique $C_{3,\beta_\tau^{(2)}}$ est significativement négatif ($C_3 \simeq -0.1$) aux échelles dites inertielles ($\tau \geq \tau_\eta^+$). Cette observation est la conséquence probable d'un effet de nombre de Reynolds fini. L'équation (3.78) permet de calculer le nombre de Reynolds à partir de $\mathbb{R}_\lambda$: $\mathbb{R}_e = (\mathbb{R}_\lambda)^2/14$. Nous rappellons ici que le nombre de Reynolds (Eq. (4.3)) est défini à une constante multiplicative près dont la valeur précise est difficile à déterminer. Cette constante provient de l'échelle intégrale T définie à partir de l'échelle intégrale L (Eq. (4.2)). De plus, il est très difficile de mesurer le nombre de Reynolds $\mathbb{R}_\lambda$ à l'échelle de Taylor dans un écoulement de von Kármán, ce qui peut entrainer aussi l'existence de facteurs multiplicatifs [165]. Si l'on appelle $\mathbb{R}^\dagger$ cette constante multiplicative, on réalise que la valeur du nombre de Reynolds utilisée pour décrire les données expérimentales (Eq. (5.31)), $\ln \mathbb{R}_e = 9.24 = \ln[\mathbb{R}_\lambda^2/(14 \times \mathbb{R}^\dagger)] = \ln[740^2/(14 \times \mathbb{R}^\dagger)]$, conduit à un nombre de Reynolds critique $\mathbb{R}^\dagger = 3.5$, c'est-à-dire à une valeur 16 fois plus petite que le nombre de Reynolds critique de la turbulence Eulérienne $\mathbb{R}^* = 56$ (Eq. (3.78)).

En ce qui concerne les signaux numériques, obtenus pour un nombre de Reynolds beaucoup plus petit ($\mathbb{R}_\lambda = 140$), comme nous pouvons le constater sur les figures 5.2(d-f), le domaine inertiel est largement pollué par les effets d'anisotropie à grande échelle et les effets visqueux. En fait, on n'observe pas clairement de statistiques inertielles. Cependant, les DNS permettent d'accéder à de très petites échelles $\tau \sim \tau_\eta^-$. L'approche théorique que nous avons développée dans la Section 5.2, fournit une très bonne description du comportement à travers les échelles des cumulants obtenus avec l'ondelette d'ordre $N = 2$. Comme précedemment pour les résultats expérimentaux, le meilleur jeu de paramètres obtenu est cohérent avec une description log-normale du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ (Eq. (5.15)) :

$$c_2^L = 0.086 \ , \ c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.586 \ , \tag{5.32}$$

et

$$\ln \mathbb{R}_e = 5.22 \ , \ \gamma = 1.98 \ . \tag{5.33}$$

Remarquons que la valeur obtenue pour le paramètre γ est désormais très proche de 2, en analogie avec la turbulence Eulérienne (Eqs. (3.55) et (3.56)). Nous voyons donc que le paramètre γ permet de façon phénoménologique de rendre compte de la taille finie des particules *tracers*, puisque dans le cas des mesures expérimentales, ce paramètre est estimé voisin de l'unité, alors que dans le cas des DNS, qui consite à suivre des points mathématiques dans le flot Eulérien, γ est trouvé plus consistant avec la valeur 2 de Batchelor–Meneveau [64, 147]. Des mesures expérimentales supplémentaires avec des billes de tailles différentes confortent largement cette interprétation [165]. Le nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = \ln[140^2/(14 \times \mathbb{R}^\dagger)] = 5.22$ est quand à lui cohérent avec un nombre de Reynolds

critique $\mathbb{R}^\dagger = 7$, c'est-à-dire une valeur 8 fois plus petite que le $\mathbb{R}^*$ Eulérien. Remarquons pour finir que le cumulant d'ordre 3 (Fig. 5.2(f)) est de la même manière très bien décrit par notre approche, nottament dans le domaine dissipatif dans lequel son comportement est non trivial, aussi bien avec l'incrément d'ordre $N = 1$ que d'ordre $N = 2$.

5.3.2 Les densités de probabilité des incréments

Nous avons représenté dans la figure 5.3 les densités de probabilités des incréments d'ordre 1 (déjà présentées dans la figure 4.2), $\mathcal{P}(\delta_\tau^{(1)}v)$, ainsi que les quantités $(\delta_\tau^{(1)}v)^2\mathcal{P}(\delta_\tau^{(1)}v)$ et $(\delta_\tau^{(1)}v)^4\mathcal{P}(\delta_\tau^{(1)}v)$ dont les intégrales correspondent respectivement aux moments d'ordre 2 et d'ordre 4 de $\mathcal{P}(\delta_\tau^{(1)}v)$. Les densités sont de variance unité, et ont été arbitrairement décalées en ordonnée. En ce qui concerne les mesures de l'ENS Lyon (Figs. 5.3(a-c)) et les simulations numériques (Figs. 5.3(d-f)), nous avons superposé les prédictions théoriques pour les mêmes jeux de paramètres que ceux utilisés dans la description des cumulants dans la Figure 5.2. Qu'il s'agisse de l'expérience ou de la simulation, force est de constater que notre modélisation des densités de probabilité est tout à fait remarquable et ce principalement en ce qui concerne l'évolution à travers les échelles des queues de ces distributions qui est reproduite de façon quantitative avec une grande précision.

Nous avons aussi représenté dans les figures 5.3(a-c) les mesures expérimentales ($\circ$) de "l'accélération" effectuées à l'université de Cornell ($\mathbb{R}_\lambda = 690$), ainsi que les courbes théoriques obtenue avec le jeu de paramètres suivant :

$$c_2^L = 0.079 \ , \ c_1^L = 0.579 \ , \tag{5.34}$$

et

$$\ln \mathbb{R}_e = 8.96 \ , \ \gamma = 1.3 \ . \tag{5.35}$$

A nouveau l'accord est excellent pour ne pas dire spectaculaire. Il est intéressant de remarquer que les billes utilisées dans cette expérience étant plus petites que celles utilisées dans l'expérience de l'ENS Lyon, la valeur obtenue pour γ est légèrement supérieure que celle estimée précedemment dans l'équation (5.31), confirmant par là que γ croit lorsqu'on diminue la taille des billes pour éventuellement converger vers la valeur 2 de Batchelor à la limite ponctuelle. Le nombre de Reynolds $\ln \mathbb{R}_e = 8.96 = \ln[690^2/(14 \times \mathbb{R}^\dagger)]$ est lui aussi cohérent avec un nombre de Reynolds critique $\mathbb{R}^\dagger \simeq 3.5$.

Nous voyons donc que les statistiques de vitesse Lagrangienne s'interprètent de la même manière que les statistiques de vitesse Eulérienne. L'ensemble des données expérimentales et numériques que nous avons à notre disposition sont compatibles avec un spectre des singularités quadratique,

$$\mathcal{D}^L(h) = 1 - \frac{(h - c_1^L)^2}{2c_2^L} \ , \tag{5.36}$$

où

$$c_1^L = 1/2 + c_2^L = 0.58 \pm 0.01 \quad \text{et} \quad c_2^L = 0.08 \pm 0.01 \ . \tag{5.37}$$

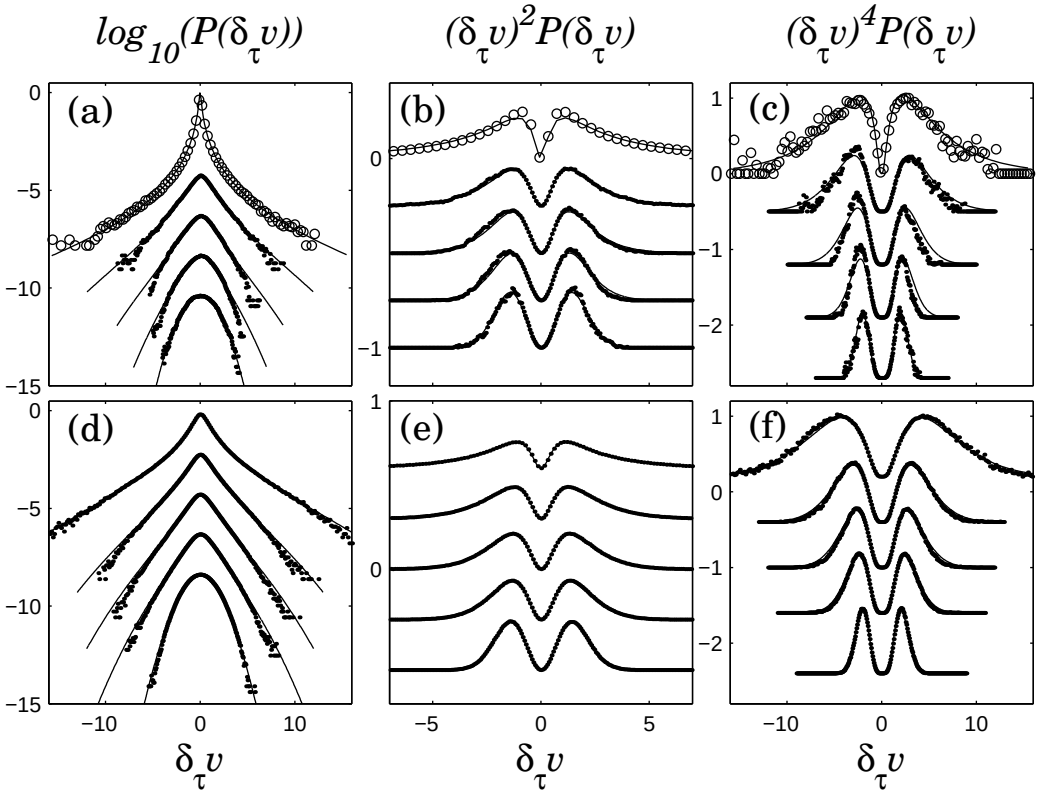

FIG. 5.3 – Représentation des densités de probabilité des incréments d'ordre 1 de vitesse Lagrangienne $\delta_\tau^{(1)} = v(t+\tau) - v(t)$. (a) $\log_{10}\mathcal{P}(\delta_\tau v)$ pour (•) l'expérience de l'ENS Lyon ($\mathbb{R}_\lambda = 740$) aux échelles (de haut en bas) $\tau/T = 0.07, 0.16, 0.35, 1$ et (∘) l'expérience de l'université de Cornell ($\mathbb{R}_\lambda = 690$) à l'échelle $\tau \simeq O(10^{-1})\tau_{\eta_K}$; (b) (•) $(\delta_\tau v)^2\mathcal{P}(\delta_\tau v)$ et (∘) $2(\delta_\tau v)^2\mathcal{P}(\delta_\tau v)$; (c) $(\delta_\tau v)^4\mathcal{P}(\delta_\tau v)$. (d) $\log_{10}\mathcal{P}(\delta_\tau v)$ pour les DNS ($\mathbb{R}_\lambda = 140$) aux échelles (de haut en bas) $\tau/T = 0.05, 0.11, 0.17, 0.25$ et 1 ; (e) (•) $(\delta_\tau v)^2\mathcal{P}(\delta_\tau v)$; (f) $(\delta_\tau v)^4\mathcal{P}(\delta_\tau v)$. En (a-f), les courbes ont été arbitrairement décalées en ordonnée par souci de clarté et la variance de $\mathcal{P}(\delta_\tau v)$ a été fixée à l'unité à toutes les échelles. Pour les données d'accélération (∘), les absisses ont été divisées par un facteur 4 par commodité de représentation. Nous avons superposé (traits continus) les courbes théoriques, dont les paramètres pour la DNS et les données expérimentales de l'ENS-Lyon sont donnés dans la figure 5.2. Nous avons utilisé les paramètres $c_2^L = 0.079$, $c_1^L = 0.579$, $\ln \mathbb{R}_e = 8.96$ et $\gamma = 1.3$ pour les données d'accélération de l'université de Cornell.

Quatrième partie

Formalisme multifractal et description probabiliste unificatrice des fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne

Chapitre 6

Description multifractale unificatrice des dissipations moyennées Eulérienne ϵ_l et Lagrangienne $\epsilon_\mathcal{T}$

6.1 Approche de Tennekes-Lumley

6.1.1 Hypothèse d'ergodicité

Dans le chapitre 7 de leur ouvrage [2], Tennekes et Lumley proposent une formalisation brillante d'une constatation physique simple : dans un écoulement turbulent stationnaire, homogène, isotrope et incompressible, de volume V macroscopique, les particules fluides remplissent et explorent complètement le champ Eulérien des vitesses. En d'autres termes, les observables ponctuelles du fluide (vitesse, dissipation, pression, gradient de pression, etc.) sont statistiquement indiscernables, qu'elles soient appréhendées en espace (champ Eulérien) ou le long des trajectoires des particules fluides (vision Lagrangienne). Il s'agit là des fondements de l'équivalence des descriptions Eulérienne et Lagrangienne.

Plus formellement, considérons une observable $\mathcal{F}$ quelconque[1] de l'écoulement. Dans une approche Eulérienne du fluide, cette observable dépend des coordonnées cartésiennes (x, y, z) et du temps t. Etant donnée la grande complexité de l'écoulement à un grand nombre de Reynolds, la fonction $\mathcal{F}(x, y, z, t)$, à un temps t fixé, peut prendre une large gamme de valeurs et sera modélisée par une variable aléatoire stationnaire. Le principe fondamental d'ergodicité permet d'assimiler sa moyenne d'ensemble à sa moyenne spatiale, c'est-à-dire

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \lim_{V \to +\infty} \frac{1}{V} \iiint_V \mathcal{F}(x, y, z, t) dx dy dz \ , \tag{6.1}$$

indépendemment du temps t puisque la grandeur $\mathcal{F}$ est par hypothèse stationnaire. Alternativement, cette observable peut aussi être appréhendée dans le cadre Lagrangien. De la

[1] On suppose que cette observable ne dépend que de l'espace et du temps, et non pas de l'échelle.

même manière, elle peut prendre une large gamme de valeurs le long des trajectoires des particules fluides. Considérons une particule fluide de l'écoulement. A l'instant $t = t_0$, cette particule se situe à la position $\vec{r}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$, et "voit" l'observable $\mathcal{F}(\vec{r}_0)$. Comme le fluide est homogène et incompressible[2], il peut être assimilé à un champ continu de particules fluides repérées[3] par leur volume élémentaire $dX_0 dY_0 dZ_0$. L'hypothèse d'ergodicité consiste alors à assimiler la moyenne d'ensemble[4] de l'observable $\mathcal{F}$, à la moyenne de cette observable sur toutes les positions initiales des particules fluides :

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \lim_{V \to +\infty} \frac{1}{V} \iiint_V \mathcal{F}(X_0, Y_0, Z_0, t_0) dX_0 dY_0 dZ_0 \ . \tag{6.2}$$

Nous pouvons tout aussi bien appliquer l'hypothèse d'ergodicité en raisonnant sur une seule particule fluide qui se situe en $\vec{r}_0$ à l'instant t_0, et qui se retrouve à un instant t à la position

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\vec{r}_0, t') dt' \ , \tag{6.3}$$

où elle "voit" l'observable $\mathcal{F}(\vec{r}(t))$. Sous ces mêmes hypothèses (homogénéité, isotropie, incompressibilité), une particule fluide explore en un temps infini l'ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$, ce qui permet de réécrire le principe ergotique sous la forme suivante :

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{T} \mathcal{F}(\vec{r}(t)) dt \ . \tag{6.4}$$

Remarquons que l'approche que nous présentons est purement probabiliste ($\mathcal{F}$ est modélisée par une variable aléatoire) et l'hypothèse de stationnarité implique que l'observable $\mathcal{F}$ visite tout son paysage de valeurs possibles durant un temps infini le long d'une seule trajectoire (Eq. (6.4)). Sans faire appel à l'hypothèse de stationnarité, l'hypothèse d'ergodicité de Tennekes et Lumley [2] est formalisée au même temps t, en cohérence avec la constation qu'à chaque instant, les particules fluides occupent tout le volume du fluide considéré. Ainsi, l'ensemble des valeurs prises par l'observable $\mathcal{F}$ à l'instant t, en chaque point de l'espace, $\mathcal{F}(x, y, z, t)$ ou sur l'ensemble des particules fluides de positions initiales (X_0, Y_0, Z_0) remplissant l'espace à l'instant initial $t_0 < t$, est le même, c'est-à-dire

$$\lim_{V \to +\infty} \frac{1}{V} \iiint_V \mathcal{F}(x, y, z, t) dx dy dz = \lim_{V \to +\infty} \frac{1}{V} \iiint_V \mathcal{F}(X_0, Y_0, Z_0, t) dX_0 dY_0 dZ_0 \ . \tag{6.5}$$

[2]Deux particules fluides ne peuvent se trouver au même endroit au même temps.
[3]Les particules fluides sont dénombrables.
[4]Cette moyenne sera indépendante de l'instant t_0 puisque l'observable est stationnaire.

6.1.2 Conséquences de l'hypothèse d'ergodicité sur la fonction caractéristique de la vitesse turbulente

La transformée de Fourier de la densité de probabilité $\mathcal{P}_u(x)$ d'un processus aléatoire u est appellée fonction caractéristique $\varphi_u(k)$ du processus aléatoire u [1, 2, 157] :

$$\varphi_u(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ikx}\mathcal{P}_u(x)dx = \langle \mathrm{e}^{iku} \rangle \ . \tag{6.6}$$

Les moments de u sont directement reliés à $\varphi_u(k)$,

$$\varphi_u(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle u^n \rangle \frac{(ik)^n}{n!} \ , \tag{6.7}$$

qui n'est rien d'autre que son développement de Taylor (Annexe E).

Intéressons nous à une observable particulière de l'écoulement, par exemple la vitesse, qui a la valeur $\vec{u}(\vec{x},t)$ au point $\vec{x}$ du champ Eulérien à l'instant t. Considérons une particule fluide de ce champ, qui se trouve en $\vec{r}_0$ et se meut à la vitesse $\vec{v}_0$ à l'instant initial t_0, et qui se retrouve en $\vec{r}(t)$ avec une vitesse $\vec{v}(\vec{r}_0,t)$ à un instant $t \rangle t_0$. Etant donnée la grande complexité de l'écoulement, les vitesses $\vec{u}(\vec{x},t)$ et $\vec{v}(\vec{r}_0,t)$ seront assimilées à des variables aléatoires de moyenne nulle et de densité de probabilité respective $\mathcal{P}_u$ et $\mathcal{P}_v$. Les relations (6.1) et (6.2), valables pour toutes les observables, permettent d'écrire l'égalité suivante [2] :

$$\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \ , \ \langle \exp\left[i\vec{k}.\vec{u}(\vec{x},t)\right] \rangle = \langle \exp\left[i\vec{k}.\vec{v}(\vec{r}_0,t)\right] \rangle \ , \tag{6.8}$$

et donc de conclure que les fonctions caractéristiques (Eq. (6.6)) de la vitesse Eulérienne $\vec{u}$ et de la vitesse Lagrangienne $\vec{v}$ sont identiques. Grace aux relations (6.7) et (6.8), on en déduit que les moments des composantes des vitesses sont égaux :

$$\forall q \ , \ \langle u_i^q \rangle = \langle v_i^q \rangle \ , \ i = 1,2,3 \tag{6.9}$$

où i est l'indice du repère cartésien. Comme la fonction caractéristique et la densité de probabilité sont transformées de Fourier l'une de l'autre, alors de manière générale, on en conclue que les processus u et v sont égaux en loi,

$$\mathcal{P}_u = \mathcal{P}_v \ . \tag{6.10}$$

De plus, si l'on suppose que les échelles intégrales L et T sont respectivement très proches des échelles de décorrélation spatiale et temporelle [2], on peut montrer que la variance de l'incrément d'ordre N de vitesse Eulérienne à l'échelle intégrale L est égale à celle de l'incrément d'ordre N de vitesse Lagrangienne à l'échelle intégrale T :

$$\sigma_N^2 = \mathrm{Var}(\delta_L^{(N)}u) = \mathrm{Var}(\delta_T^{(N)}v) \ . \tag{6.11}$$

6.1.3 Conséquences de l'hypothèse d'ergodicité sur la fonction caractéristique de la dissipation locale

Dans la section précédente, nous avons montré que les fonctions caractéristiques de la vitesse Eulérienne $\varphi_u(k)$ et de la vitesse Lagrangienne $\varphi_v(k)$ sont les mêmes (Eq. (6.8)). Il en va de même en ce qui concerne la dissipation locale ϵ (Eq. (1.1)). Dans la description Eulérienne du fluide, la dissipation locale $\epsilon(\vec{x},t)$ dépend de l'espace et du temps. Une particule fluide, initialement en $\vec{r}_0$ à l'instant t_0, se retrouve à l'instant t' à la position $\vec{r}(t')$ (Eq. (6.3)), subissant une dissipation visqueuse $\epsilon(\vec{r}_0,t')$. L'approche ergodique de Tennekes et Lumley [2] permet ainsi de montrer, en utilisant les relations (6.1) et (6.2), que

$$\forall k \in \mathbb{R}\ ,\ \langle \exp\left[ik\epsilon(\vec{x},t)\right]\rangle = \langle \exp\left[ik\epsilon(\vec{r}_0,t')\right]\rangle\ . \tag{6.12}$$

Remarquons que cette relation est indépendante des instants t et t' étant donnée la (fondamentale) stationnarité de la dissipation locale. Nous allons voir, dans la suite de ce chapitre, que le formalisme multifractal s'applique naturellement à la dissipation moyennée ϵ_l sur une boule de taille l (Eq. (2.8)). Historiquement, l'approche multifractale [46–49, 111–115] a été formalisée pour les mesures[5], à savoir des grandeurs définies positives telles que ϵ_l. Dans cette description Eulérienne du fluide, Meneveau et collaborateurs [50, 73, 74, 111, 166] ont largement contribué à convaincre la communauté de la turbulence de l'apport du formalisme multifractal à la compréhension du comportement dans les échelles de la dissipation d'énergie.

Dans l'approche Lagrangienne, nous définissons la dissipation moyenne sur un temps τ vue par une particule fluide, initialement à la position $\vec{r}_0$, de la façon suivante :

$$\epsilon_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \epsilon(\vec{r}_0,t')dt'\ . \tag{6.13}$$

Nous renvoyons le lecteur au travail de Borgas [108] pour une description multifractale en termes de singularités de ϵ_τ. En s'inspirant de ce travail, nous allons, dans cette quatrième partie de thèse, établir un lien formel entre les spectres des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ et $\mathcal{D}^L(h)$ des vitesses Eulérienne et Lagrangienne [106]. Pour ce faire, nous allons utiliser l'hypothèse de similarité raffinée (Eqs. (2.10) et (4.15)) tout en remarquant qu'à la limite $l \to 0$, la dissipation moyennée correspond exactement à la dissipation locale

$$\lim_{l\to 0} \epsilon_l(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r})\,; \tag{6.14}$$

de même, dans la limite $\tau \to 0$, nous pourrons utiliser la relation :

$$\lim_{\tau\to 0} \epsilon_\tau(t) = \epsilon(\vec{r}_0,t)\ . \tag{6.15}$$

[5] Par exemple les mesures invariantes de systèmes dynamiques.

6.2 Approche multifractale de la dissipation moyennée Eulérienne ϵ_l

C'est en prenant en compte les fluctuations non triviales de la dissipation moyennée ϵ_l (Eqs. (2.8), (2.16) et (2.17)) que Kolmogorov [43] et Obukhov [44] proposèrent le modèle KO62 de cascade log-normale pour expliquer le caractère intermittent des fluctuations de vitesse dans les échelles. Nous allons voir comment étendre aux échelles dissipatives les notions de loi de puissance sur ϵ_l observées dans le régime inertiel [108, 111].

6.2.1 Spectre d'exposants τ_q^E et spectre des singularités $f^E(\alpha)$

Les fluctuations de la dissipation moyennée ϵ_l présentent, dans le domaine inertiel, des propriétés d'invariance d'échelle (Eq. (2.16)) :

$$\langle (\epsilon_l)^q \rangle = \langle \epsilon \rangle^q \left(\frac{l}{L} \right)^{\tau_q^E} , \tag{6.16}$$

où (Eq. (2.17)) :

$$\tau_q^E = \frac{1}{2} \mu^E q(1-q) , \tag{6.17}$$

dans l'approche log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44]. Le coefficient μ^E est appelé coefficient d'intermittence[6] du modèle log-normal. Le formalisme multifractal [46–49, 111–115] fournit une interprétation locale du comportement en loi de puissance (Eq. (6.16)), c'est-à-dire :

$$\epsilon_l = \langle \epsilon \rangle \left(\frac{l}{L} \right)^{\alpha - 1} , \tag{6.18}$$

où α un exposant qui dépend *a priori* de la position spatiale et caractérise la force des singularités de la mesure ϵ_l. Si nous appelons $\mathbb{P}_l^i(\alpha)$ la densité de probabilité de α dans le domaine inertiel, alors il est possible d'exprimer cette densité de probabilité en fonction du spectre des singularités $f^E(\alpha)$ de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_l^i(\alpha) \sim \left(\frac{l}{L} \right)^{1 - f^E(\alpha)} . \tag{6.19}$$

Le résultat central du formalisme multifractal est la démonstration que le spectre des singularités $f^E(\alpha)$ (Eq. (6.19)) et le spectre d'exposants τ_q^E (Eq. (6.16)) sont transformées de Legendre l'un de l'autre [111] :

$$\tau_q^E = \min_\alpha \left[q(\alpha - 1) + 1 - f^E(\alpha) \right] \Leftrightarrow f^E(\alpha) = \min_q \left[q(\alpha - 1) + 1 - \tau_q^E \right] . \tag{6.20}$$

[6] Nous verrons dans la suite que μ^E est simplement relié au coefficient d'intermittence du modèle log-normal c_2^E de la vitesse longitudinale Eulérienne via l'hypothèse de similarité raffinée (Eq. (2.10)) : $\mu^E = 9 c_2^E \simeq 0.225$ (Eq. (2.17)).

Dans l'approche log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44], on peut alors facilement montrer que le spectre des singularités est quadratique :

$$f^E(\alpha) = 1 - \frac{\left[\alpha - (1 + \mu^E/2)\right]^2}{2 \times \mu^E} \ , \tag{6.21}$$

et a pour support ($f^E(\alpha) \geq 0$) l'intervalle $\alpha \in [1 + \mu^E/2 - \sqrt{2\mu^E}, 1 + \mu^E/2 + \sqrt{2\mu^E}]$; remarquons que cet intervalle se réduit à un point unique $\alpha = 1$ dans la version monofractale originale de K41 ($\mu^E = 0$) [5].

6.2.2 Les échelles dissipatives Eulériennes

La prise en compte de la physique des échelles dissipatives nécessite l'introduction du nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ (Eq. (2.42)). Nous avons vu dans le Chapitre 3 que l'échelle dissipative $\eta(h)$ (Eq. (3.3)) fluctue lorsque les fluctuations des incréments de vitesse longitudinale sont intermittentes, c'est-à-dire lorsque l'exposant h fluctue spatialement (Eq. (2.44)). Il est tout à fait possible de paramétrer de façon alternative l'échelle dissipative en fonction de l'exposant α. Il nous faut pour cela raisonner avec ϵ_l, et non plus avec $\delta_l u$. Le nombre de Reynolds (Eq. (1.5)) est défini à partir des grandeurs qui caractérisent l'écoulement à l'échelle intégrale L, c'est-à-dire une vitesse caractéristique $\langle\epsilon\rangle^{1/3}L^{1/3}$, l'échelle L et la viscosité ν. On obtient ainsi :

$$\mathbb{R}_e = \frac{\langle\epsilon\rangle^{1/3}L^{4/3}}{\nu} \ . \tag{6.22}$$

Le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_l$ (Eq. (2.42)) s'écrit, en utilisant les équations (6.18) et (6.22),

$$\mathbb{R}_l = \frac{\epsilon_l^{1/3} l^{4/3}}{\nu} = \left(\frac{l}{L}\right)^{\frac{3+\alpha}{3}} \mathbb{R}_e \ , \tag{6.23}$$

ce qui contraint l'échelle dissipative η à fluctuer, puisqu'à cette échelle, le nombre de Reynolds local est égal à une constante $\mathbb{R}^* = 56$ (Eqs. (3.74) et (3.78)). On obtient[7] donc :

$$\eta(\alpha) = L\left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^*}\right)^{-\frac{3}{3+\alpha}} \ . \tag{6.24}$$

Dans la limite des échelles l infiniment petites, la dissipation moyennée ϵ_l coincide avec la dissipation locale ϵ (Eq. (6.14). Ainsi, la statistique de ϵ_l sature dans le domaine dissipatif. Cette limite intrinsèque dans les échelles est prise en compte par le formalisme multifractal

[7] On remarquera que $\eta(\langle\alpha\rangle \approx 1) \sim L\mathbb{R}_e^{-3/4}$, en cohérence avec la prédiction monofractale K41 (Eq. (1.6)).

en respectant la continuité de ϵ_l (Eq. (6.18)) en $l = \eta(\alpha)$. On obtient alors la prédiction du formalisme multifractal sur la dissipation locale :

$$\lim_{l \to 0^+} \epsilon_l = \epsilon(\alpha, \mathbb{R}_e) = \langle \epsilon \rangle \left(\frac{\eta(\alpha)}{L} \right)^{\alpha - 1} , \tag{6.25}$$

où α est un exposant dont la densité de probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}_l^d(\alpha, \mathbb{R}_e, f^E(\alpha)) \sim \left(\frac{\eta(\alpha)}{L} \right)^{1 - f^E(\alpha)} . \tag{6.26}$$

6.3 Approche multifractale de la dissipation moyennée Lagrangienne ϵ_τ

Nous nous intéressons, dans cette section, aux fluctuations de la dissipation ϵ_τ vue par une particule fluide le long de sa trajectoire pendant un temps τ (Eq. (4.12)).

6.3.1 Spectre d'exposants τ_q^L et spectre des singularités $f^L(\kappa)$

De la même manière que dans le cas Eulérien (Section 6.2.1), les fluctuations dans les échelles de la dissipation moyennée ϵ_τ présentent, dans le domaine inertiel, des propriétés d'invariance d'échelle (Eq. (4.14)) :

$$\langle (\epsilon_\tau)^q \rangle = \langle \epsilon \rangle^q \left(\frac{\tau}{T} \right)^{\tau_q^L} , \tag{6.27}$$

où τ_q^L prend la forme quadratique suivante (Eq. (4.18)) :

$$\tau_q^L = \frac{1}{2} \mu^L q(1 - q) , \tag{6.28}$$

dans l'approche log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44]. Le coefficient μ^L est appelé coefficient d'intermittence[8] du modèle log-normal. Le formalisme multifractal [108] fournit une interprétation locale du comportement en loi de puissance des moments de la dissipation moyennée (Eq. (6.27)), c'est-à-dire :

$$\epsilon_\tau = \langle \epsilon \rangle \left(\frac{\tau}{T} \right)^{\kappa - 1} , \tag{6.29}$$

où κ est un exposant qui fluctue temporellement et dont la densité de probabilité $\mathbb{P}_\tau^i(\kappa)$ dans le domaine inertiel est donnée en fonction du spectre des singularités $f^L(\kappa)$ de ϵ_τ de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_\tau^i(\kappa) \sim \left(\frac{\tau}{T} \right)^{1 - f^L(\kappa)} . \tag{6.30}$$

[8] Nous verrons dans la suite que le coefficient μ^L est simplement relié au coefficient d'intermittence du modèle log-normal c_2^L de la vitesse Lagrangienne via l'hypothèse de similarité raffinée (Eq.(4.15)) : $\mu^L = 4c_2^L \simeq 0.32$ (Eq. (4.18)).

Comme dans le cas Eulérien (Section 6.2.1), le spectre des singularités $f^L(\kappa)$ et le spectre d'exposants τ_q^L sont transformées de Legendre l'un de l'autre [108] :

$$\tau_q^L = \min_\kappa \left[q(\kappa-1)+1-f^L(\kappa)\right] \Leftrightarrow f^L(\kappa) = \min_q \left[q(\kappa-1)+1-\tau_q^L\right] \ . \tag{6.31}$$

Dans l'approche log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44], on retrouve bien un spectre des singularités de forme quadratique

$$f^L(\kappa) = 1 - \frac{\left[\kappa-(1+\mu^L/2)\right]^2}{2\times\mu^L} \ , \tag{6.32}$$

et dont le support ($f^L(\kappa)\geq 0$) s'étale sur l'intervalle $\kappa \in [1+\mu^L/2-\sqrt{2\mu^L}, 1+\mu^L/2+\sqrt{2\mu^L}]$. Remarquons que l'exposant κ fluctue autour de $\langle\kappa\rangle \approx 1$, valeur qui correspond à la prédiction de la théorie monofractale originale de K41 ($\mu^L=0$) [5].

6.3.2 Les échelles dissipatives Lagrangiennes

La prise en compte de la physique des échelles dissipatives nécessite l'introduction du nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_\tau$ (Eq. (5.1)). Nous avons vu que l'échelle dissipative $\tau_\eta(h)$ (Eq. (5.3)) fluctue lorsque les fluctuations des incréments de vitesse sont intermittentes, c'est-à-dire lorsque l'exposant h fluctue temporellement (Eq. (5.2)). Il est tout à fait possible de paramétrer de façon alternative l'échelle dissipative en fonction de l'exposant κ. Il nous faut pour cela raisonner avec ϵ_τ et non plus avec $\delta_\tau v$. Le nombre de Reynolds (Eq. (4.3)) est défini à partir des grandeurs qui caractérisent l'écoulement à l'échelle intégrale T, c'est-à-dire une vitesse au carré caractéristique $\langle\epsilon\rangle T$, l'échelle T et la viscosité ν. On obtient ainsi :

$$\mathbb{R}_e = \frac{\langle\epsilon\rangle T^2}{\nu} \ . \tag{6.33}$$

Le nombre de Reynolds local $\mathbb{R}_\tau$ (Eq. (5.1)) s'écrit, en utilisant les équations (6.29) et (6.33),

$$\mathbb{R}_\tau = \frac{\epsilon_\tau \tau^2}{\nu} = \left(\frac{\tau}{T}\right)^{\kappa+1} \mathbb{R}_e \ , \tag{6.34}$$

ce qui contraint l'échelle dissipative τ_η à fluctuer, puisqu'à cette l'échelle, le nombre de Reynolds local est égal à une constante que nous prendrons égale à $\mathbb{R}^\dagger$. On obtient[9] donc :

$$\tau_\eta(\kappa) = T\left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^\dagger}\right)^{-\frac{1}{1+\kappa}} \ . \tag{6.35}$$

Dans la limite des échelles τ infiniment petites, la dissipation moyennée ϵ_τ coincide avec la dissipation locale ϵ (Eq. (6.15)). Ainsi, la statistique de ϵ_τ sature dans le domaine dissipatif.

[9] On remarquera que $\tau_\eta(\langle\kappa\rangle \approx 1) \sim T\mathbb{R}_e^{-1/2}$, en cohérence avec la prédiction monofractale K41 (Eq. (4.5)).

Cette limite intrinsèque dans les échelles est prise en compte par le formalisme multifractal en respectant la continuité de ϵ_τ (Eq. (6.29)) en $\tau = \tau_\eta(\kappa)$. On obtient alors la prédiction du formalisme multifractal sur la dissipation locale Lagrangienne :

$$\lim_{\tau \to 0^+} \epsilon_\tau = \epsilon(\kappa, \mathbb{R}_e) = \langle \epsilon \rangle \left(\frac{\tau_\eta(\kappa)}{T} \right)^{\kappa - 1} , \tag{6.36}$$

où κ est un exposant dont la densité de probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}_\tau^d(\kappa, \mathbb{R}_e, f^L(\kappa)) \sim \left(\frac{\tau_\eta(\kappa)}{T} \right)^{1 - f^L(\kappa)} . \tag{6.37}$$

6.4 Unification des spectres des singularités $f^E(\alpha)$ et $f^L(\kappa)$ des dissipations moyennées Eulérienne et Lagrangienne

L'hypothèse d'ergodicité de Tennekes-Lumley [2] (Eqs. (6.1) et (6.2)) implique que la fonction caractéristique de la dissipation locale Eulérienne $\epsilon(\vec{x}, t)$ et la fonction caractéristique de la dissipation locale Lagrangienne $\epsilon(\vec{r}_0, t)$ sont égales (Eq. (6.12)). Nous pouvons donc en déduire que les moments d'ordre q de ces deux quantités sont eux aussi égaux :

$$\langle [\epsilon(\vec{x}, t)]^q \rangle = \langle [\epsilon(\vec{r}_0, t)]^q \rangle . \tag{6.38}$$

Les équations (6.24), (6.25) et (6.26) permettent alors de calculer la moment d'ordre q de $\epsilon(\vec{x}, t)$:

$$\langle [\epsilon(\vec{x}, t)]^q \rangle \sim \langle \epsilon \rangle^q \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^*} \right)^{-3 \frac{q(\alpha-1)+1-f^E(\alpha)}{3+\alpha}} d\alpha \sim \left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^*} \right)^{\min\limits_\alpha \left[-3 \frac{q(\alpha-1)+1-f^E(\alpha)}{3+\alpha} \right]} . \tag{6.39}$$

De la même manière, les équations (6.35), (6.36) et (6.37) permettent de calculer le moment d'ordre q de $\epsilon(\vec{r}_0, t)$:

$$\langle [\epsilon(\vec{r}_0, t)]^q \rangle \sim \langle \epsilon \rangle^q \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_{\max}} \left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^\dagger} \right)^{-\frac{q(\kappa-1)+1-f^L(\kappa)}{1+\kappa}} d\kappa \sim \left(\frac{\mathbb{R}_e}{\mathbb{R}^\dagger} \right)^{\min\limits_\kappa \left[-\frac{q(\kappa-1)+1-f^L(\kappa)}{1+\kappa} \right]} . \tag{6.40}$$

Définissons alors les exposants $\alpha'(q)$ et $\kappa'(q)$ comme les solutions aux problèmes de minimisation intervenant dans les relations (6.39) et (6.40) :

$$\min_\alpha \left[-3 \frac{q(\alpha-1)+1-f^E(\alpha)}{3+\alpha} \right] = -3 \frac{q(\alpha'-1)+1-f^E(\alpha')}{3+\alpha'} , \tag{6.41}$$

et

$$\min_\kappa \left[-\frac{q(\kappa-1)+1-f^L(\kappa)}{1+\kappa} \right] = -\frac{q(\kappa'-1)+1-f^L(\kappa')}{1+\kappa'} . \tag{6.42}$$

L'équation (6.38) permet facilement de montrer [108] que si, $\forall q$,

$$\frac{\kappa'(q)-1}{\kappa'(q)+1} = 3\frac{\alpha'(q)-1}{\alpha'(q)+3} \quad \text{et} \quad \frac{1-f^L(\kappa'(q))}{\kappa'(q)+1} = 3\frac{1-f^E(\alpha'(q))}{\alpha'(q)+3} \ , \tag{6.43}$$

alors, $\forall \kappa$, les spectres des singularités f^L et f^E sont reliés de la manière suivante :

$$f^L(\kappa) = -\frac{1}{2}\kappa + \left(1+\frac{1}{2}\kappa\right) f^E\left(\frac{3\kappa}{2+\kappa}\right) \ . \tag{6.44}$$

Pour conclure la démonstration, il faut maintenant montrer que l'équation (6.44) implique la validité des équations (6.38) et (6.43). La démonstration a été effectuée par Borgas et nous renvoyons le lecteur à la référence [108] pour plus de détails. Remarquons enfin que la relation (6.44) est facilement inversible, un calcul rapide conduit à la relation :

$$f^E(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha + \left(1-\frac{1}{3}\alpha\right) f^L\left(\frac{2\alpha}{3-\alpha}\right) \ . \tag{6.45}$$

Remarque

L'équation (6.44) montre clairement que les spectres des singularités de la dissipation moyennée, dans les contextes Eulérien et Lagrangien, sont reliés via une équation non-linéaire. En particulier, il est facile de se persuader que si $f^E(\alpha)$ est quadratique (Eq. (6.21)), alors $f^L(\kappa)$ ne peut l'être. Ainsi, les équations (6.21) et (6.32) ne sont pas images l'une de l'autre par la transformation (6.44) et la description log-normale ne peut s'appliquer simultanément à la dissipation moyennée Eulérienne et à sa contre-partie Lagrangienne.

Chapitre 7

Liens statistiques entre fluctuations de vitesse Eulérienne et de vitesse Lagrangienne

Comme nous l'avons vu dans le deuxième partie de ce manuscrit de thèse, l'étude des signaux expérimentaux et numériques de vitesse Eulérienne confirme que les fluctuations de la vitesse longitudinale sont intermittentes et parfaitement modélisables par une description log-normale (Eq. (2.27)) avec comme valeur du paramètre d'intermittence $c_2^E = 0.025 \pm 0.003$ (Eq. (2.66)), valeur apparemment universelle dans le sens où elle ne semble pas dépendre du nombre de Reynolds ni du dispositif expérimental [15, 79, 80, 102].

L'étude des signaux expérimentaux et numériques de vitesse Lagrangienne effectuée dans la troisième partie de ce manuscrit, indique que les fluctuations de vitesse le long des trajectoires de particules sont elles aussi intermittentes et compatibles avec une description log-normale (Eq. (5.15)) de paramètre $c_2^L = 0.08 \pm 0.01$ (Eq. (5.37)) [27–29, 31]. Nous allons voir dans ce chapitre comment expliquer le fait que la turbulence Lagrangienne apparaisse beaucoup plus intermittente que la turbulence Eulérienne.

7.1 Arguments dimensionnels

Dans cette section, nous allons essayer d'établir un lien dimensionnel simple entre les coefficients d'intermittence des vitesses Eulérienne et Lagrangienne, à savoir c_2^E et c_2^L. L'intermittence caractérise l'évolution dans les échelles des statistiques des observables (vitesse, dissipation, ...). Nous devons donc commencer par établir un lien entre l'échelle spatiale l et l'échelle temporelle τ pour lesquelles l'écoulement exhibe une même complexité. Ceci revient à chercher les échelles l et τ telles que les nombres de Reynolds locaux (Eqs. (6.22) et (6.33)) à ces échelles soient égaux, $\mathbb{R}_l = \mathbb{R}_\tau$. On obtient ainsi :

$$l^2 \tau^{-3} = (\epsilon_\tau)^{3/2} (\epsilon_l)^{-1/2} \ . \tag{7.1}$$

Dans une description monofractale (K41) de la turbulence, les exposants $\alpha = 1$ et $\kappa = 1$ sont uniques et les nombres de Reynolds locaux ne fluctuent pas. Les dissipations moyennes $\epsilon_l = \langle\epsilon\rangle$ (Eq. (6.18)) et $\epsilon_\tau = \langle\epsilon\rangle$ (Eq. (6.29)) ne dépendent pas des échelles. Dans une première approche phénoménologique, admettons que l'on puisse négliger les corrections intermittentes dans la dérivation des deux échelles l et τ caractéristiques d'une même complexité ; l'équation (7.1) se simplifie alors de la manière suivante :

$$l^2\tau^{-3} \simeq \langle\epsilon\rangle \ . \tag{7.2}$$

Aux échelles l et τ définies par l'équation (7.2), les dissipations moyennes ϵ_l et ϵ_τ sont égales en loi, stipulant que l'écoulement dissipe au temps t la même quantité d'énergie sur une échelle l que le long d'une trajectoire Lagrangienne sur un temps τ, c'est-à-dire, $\forall q$,

$$\langle(\epsilon_l)^q\rangle = \langle(\epsilon_\tau)^q\rangle \ . \tag{7.3}$$

Les équations (6.16), (6.27) et (7.2) permettent alors de faire un lien entre les spectres d'exposants des dissipations moyennées τ_q^E et τ_q^L des contextes Eulérien et Lagrangien :

$$\tau_q^L = \frac{3}{2}\tau_q^E \ . \tag{7.4}$$

Si l'on suppose maintenant que la relation (7.2) demeure pertinente, en première approximation, en présence d'intermittence, alors l'équation (7.4) peut être généralisée à la description multifractale. Ainsi, dans l'approche log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44], à partir des expressions de τ_q^E (Eq. (6.17)) et de τ_q^L (Eq. (6.28)), on peut facilement calculer le lien entre les coefficients d'intermittence μ^E et μ^L :

$$\mu^L = \left(\frac{3}{2}\right)\mu^E \ . \tag{7.5}$$

Les hypothèses de similarité raffinée dans le cas Eulérien (Eq. (2.10)) et Lagrangien (Eq. (4.15)), permettent de généraliser l'équation (7.4) au cas des fluctuations de vitesse :

$$\zeta_q^L = \frac{3}{2}\left(\zeta_{3q/2}^E - \frac{q}{2}\right) + \frac{q}{2} \ . \tag{7.6}$$

Remarquons que l'équation (7.6) établit un lien entre les coefficients d'intermittence des fluctuations de vitesse longitudinale Eulérienne et de vitesse Lagrangienne :

$$c_2^L = \left(\frac{3}{2}\right)^3 c_2^E \ . \tag{7.7}$$

Nous mettrons particulièrement l'accent sur le fait que les estimations expérimentales et numériques des coefficients d'intermittence Eulérien ($c_2^E = 0.025 \pm 0.003$) et Lagrangien ($c_2^L = 0.08 \pm 0.01$) sont en très bon accord avec l'équation (7.7) : $c_2^L/c_2^E = 3.20 \simeq (3/2)^3 = 3.37$.

7.2 Transformation Euler-Lagrange des spectres des singularités de la vitesse

Dans la section précédente, nous avons obtenu une relation (Eq. (7.7)) entre les coefficients d'intermittence du modèle log-normal des fluctuations de vitesse (i) en se basant sur des arguments dimensionels (Eq. (7.1)), (ii) en négligeant les corrections intermittentes dans l'établissement de la relation (7.2) entre les échelles caractéristiques spatiale et temporelle, (iii) en exploitant une relation phénoménologique (Eq. (7.3)) et (iv) en s'appuyant sur les hypothèses de similarité raffinée (Eqs. (2.10) et (4.15)). C'est grace à Borgas [108] que nous allons réussir à effectuer une dérivation propre du lien entre les spectres des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ et $\mathcal{D}^L(h)$ des vitesses Eulérienne et Lagrangienne en se basant sur l'hypothèse d'ergodicité de Tennekes-Lumley (Eq. (6.12)) [2] et en prenant désormais en compte les corrections intermittentes.

Dans le contexte Eulérien, l'hypothèse de similarité raffinée (Eq. (2.10)) permet de formuler un "dictionnaire" [1] entre la description multifractale de la dissipation moyennée ϵ_l et celle de l'incrément de vitesse longitudinale $\delta_l u$, qui mettent respectivement en jeu les spectres de singularités $f^E(\alpha)$ et $\mathcal{D}^E(h)$:

$$h = \frac{\alpha}{3} \ , \ \mathcal{D}^E(h) = f^E(\alpha) + d - 1 \quad \text{et} \quad \zeta_q^E = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}^E \ , \tag{7.8}$$

où d est la dimension[1] Euclidienne de l'espace dans lequel est appréhendé la vitesse. Dans le contexte Lagrangien, l'hypothèse de similarité raffinée (Eq. (4.15)) permet de formuler un "dictionnaire" analogue entre la description multifractale de la dissipation moyennée ϵ_τ et celle de l'incrément de vitesse $\delta_\tau v$, qui mettent respectivement en jeu les spectres de singularités $f^L(\kappa)$ et $\mathcal{D}^L(h)$:

$$h = \frac{\kappa}{2} \ , \ \mathcal{D}^L(h) = f^L(\kappa) + d - 1 \quad \text{et} \quad \zeta_q^L = \frac{q}{2} + \tau_{q/2}^L \ . \tag{7.9}$$

Ainsi, à partir des relations (6.44) et (7.9), il est immédiat de montrer que, dans un espace Euclidien de dimension $d = 1$,

$$\mathcal{D}^L(h) = -h + (1+h) f^E\left(\frac{3h}{1+h}\right) \ . \tag{7.10}$$

En exploitant le "dictionnaire" défini par la relation (7.8), et en posant $\alpha = 3h/(1+h)$, il est possible de calculer le lien entre les spectres des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ de la vitesse Eulérienne et $\mathcal{D}^L(h)$ de la vitesse Lagrangienne :

$$\mathcal{D}^L(h) = -h + (1+h) \mathcal{D}^E\left(\frac{h}{1+h}\right) \ . \tag{7.11}$$

[1] Ainsi, $d = 1$ lorsqu'on étudie un profil spatial 1D de vitesse.

En s'aidant des équations (6.45), (7.8) et (7.9), il est tout à fait possible d'inverser la relation (7.11), ce qui permet d'établir la relation :

$$\mathcal{D}^E(h) = h + (1-h)\mathcal{D}^L\left(\frac{h}{1-h}\right) \ . \tag{7.12}$$

7.3 Interprétation et discussion de la validité de la transformation Euler-Lagrange

7.3.1 Limite monofractale

Les relations (7.11) et (7.12) montrent clairement que les fluctuations de vitesse Eulérienne sont monofractales si et seulement si les fluctuations de vitesse Lagrangienne sont monofractales. Par exemple, si l'on suppose que $\mathcal{D}^E(h=1/3)=1$ et $\mathcal{D}^E(h\neq 1/3)=-\infty$, alors l'équation (7.11) implique que $\mathcal{D}^L(h=1/2)=1$ et $\mathcal{D}^L(h\neq 1/2)=-\infty$.

7.3.2 Le modèle log-normal

Prenons comme hypothèse qu'en bon accord avec la description log-normale de Kolmogorov [43] et Obukhov [44], le spectre des singularités Eulérien $\mathcal{D}^E(h)$ soit quadratique (Eq. (2.27)),

$$\mathcal{D}^E(h) = 1 - \frac{(h-c_1^E)^2}{2c_2^E} \ , \tag{7.13}$$

hypothèse qui est tout à fait réaliste comme nous avons pu le voir dans la deuxième partie de ce manuscrit. En particulier, les données expérimentales et numériques sont bien reproduites avec le jeu de paramètres $c_2^E = 0.025$ et $c_1^E = 1/3 + 3c_2^E/2 \approx 0.37$ (Eq. (2.66)). Le spectre des singularités Lagrangien $\mathcal{D}^L(h)$ est alors donné par la transformation (7.11), qui est non-linéaire, ce qui explique que le spectre $\mathcal{D}^L(h)$ obtenu n'est pas quadratique montrant par là que le modèle log-normal ne peut s'appliquer simultanément aux deux descriptions de l'écoulement. Afin de quantifier l'écart à un modèle log-normal, il suffit alors de calculer le spectre d'exposants ζ_q^L, c'est-à-dire la transformée de Legendre du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ (Eq. (4.8)),

$$\zeta_q^L = \min_h \left[qh + 1 - \mathcal{D}^L(h)\right] \ . \tag{7.14}$$

On obtient formellement le développement en série entière en fonction de q suivant :

$$\zeta_q^L = \frac{c_1^E}{1-c_1^E}q - \frac{c_2^E}{(1-c_1^E)^3}\frac{q^2}{2} + 3\frac{(c_2^E)^2}{(1-c_1^E)^5}\frac{q^3}{3!} - 15\frac{(c_2^E)^3}{(1-c_1^E)^7}\frac{q^4}{4!} + o(q^4) \ . \tag{7.15}$$

Remarquons qu'en approximant $\zeta_q^L = c_1^L q - c_2^L q^2/2 + o(q^2)$, on peut alors déterminer

$$c_1^L = \frac{c_1^E}{1-c_1^E}, \tag{7.16}$$

et

$$c_2^L = \frac{c_2^E}{(1-c_1^E)^3} \ . \tag{7.17}$$

En introduisant dans le développement (7.15), les valeurs des coefficients c_1^E et c_2^E obtenues expérimentalement et numériquement (Eq. (2.66)), on obtient ainsi :

$$\zeta_q^L \approx 0.589q - 0.100\frac{q^2}{2!} + 0.019\frac{q^3}{3!} - 0.006\frac{q^4}{4!} + o(q^4) \ , \tag{7.18}$$

ce qui donne comme estimation numérique des coefficients c_1^L et c_2^L prédits par la transformation (6.31), les valeurs $c_1^L = 0.589$ (Eq. (7.16)) et $c_2^L = 0.100$ (Eq. (7.17)). Remarquons que ces valeurs sont légèrement supérieures à celles effectivement mesurées sur les signaux expérimentaux et numériques (Eq. (5.37)), différence que l'on peut expliquer par le fait que ces coefficients ont été mesurés en présupposant une forme quadratique du spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h)$ (Eq. (5.36)).

Nous avons représenté dans la figure 7.1 le spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ quadratique de la vitesse longitudinale Eulérienne (Eq. (7.13)) (trait continu épais), ainsi que sa transformée Lagrangienne par la relation (7.11) (trait continu fin). L'accord obtenu avec les spectres $\mathcal{D}^L(h)$ expérimentaux et numérique est très bon en ce qui concerne les exposants $h \leq c_1^L$, ce qui semble confirmer d'une part la validité de la transformation Euler-Lagrange (Eq. (7.11)) et d'autre part la pertinence de l'approximation quadratique pour la partie croissante du spectre des singularités $D^L(h)$ (Eq. (5.36)) avec le jeu de paramètres donné par l'équation (5.37). En fait, la méthode d'analyse des signaux proposée dans ce manuscrit, qui consiste à calculer les fonctions de structure et les cumulants du logarithme des incréments d'ordre N de la vitesse, en effectuant les moyennes sur toutes les positions (Eulérien) ou sur tous les temps (Lagrangien) ne permet pas d'accéder à la partie décroissante du spectre des singularités. En effet, dans le domaine inertiel, la transformée de Legendre (Eq. (4.8)) montre qu'à une valeur de l'exposant $h = h_0$ telle que

$$\left(\frac{d\mathcal{D}^L(h)}{dh}\right)_{h=h_0} < 0 \ , \tag{7.19}$$

correspond un q_0 du spectre d'exposants ζ_q^L tel que

$$q_0 < 0 \ . \tag{7.20}$$

Or, il est facile de se convaincre que la densité de probabilité $\mathcal{P}(\delta_\tau^{(N)}v)$ des incréments de vitesse Lagrangienne atteint son maximum aux incréments nuls, et que donc $\mathcal{P}(\delta_\tau^{(N)}v = 0) > 0$. Ainsi, les fonctions de structures $\langle|\delta_\tau v|^q\rangle$ d'ordre $q < -1$ n'existent pas [115, 150] :

$$\forall q < -1 \ , \ \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_\tau^{(N)}v|^q \mathcal{P}(\delta_\tau^{(N)}v) d\delta_\tau^{(N)}v = +\infty \ . \tag{7.21}$$

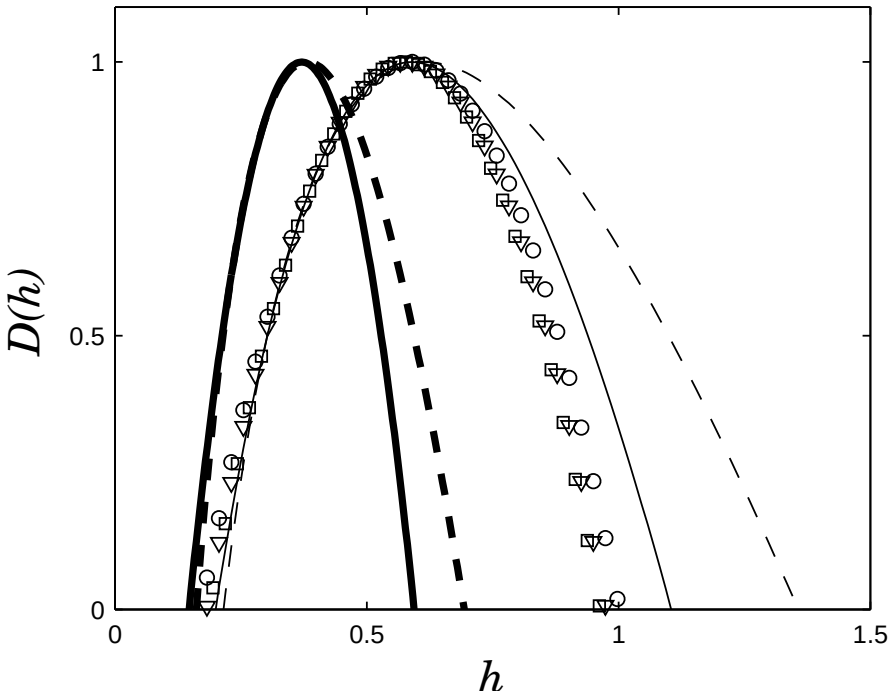

FIG. 7.1 – Représentation des spectres des singularités des vitesses Eulérienne et Lagrangienne. Spectre log-normal Eulérien (Eq. (7.13)) de paramètre $c_2^E = 0.025$ (trait continu épais), ainsi que sa transformée $\mathcal{D}^L(h)$ par la relation (7.11) (trait continu fin). Spectre log-Poisson Eulérien (Eq. (7.22)) (trait discontinu épais), ainsi que sa transformée par la relation (7.11) (trait discontinu fin). Ces spectres $\mathcal{D}^L(h)$ obtenus par transformation Euler-Lagrange à partir des spectres $\mathcal{D}^E(h)$ sont comparés aux spectres $\mathcal{D}^L(h)$ estimés (Chapitre 5) directement à partir de l'analyse des données expérimentales de vitesse Lagrangienne de l'ENS Lyon ($\square$), des données expérimentales d'accélération de l'université de Cornell ($\triangledown$) et des données numériques de vitesse Lagrangienne de l'ENS Lyon ($\circ$).

Cette divergence des fonctions de structure montre alors que le développement en cumulants du logarithme (Eq. (D.4) en Annexe D) n'existe pas. Ainsi, la partie décroissante du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ n'est pas accessible à une analyse "continue" des données de vitesse expérimentale ou numérique. C'est une technique sophistiquée de traitement du signal, développée par le groupe d'Arnéodo à Bordeaux [112–114, 150], basée sur les maxima locaux des coefficients en ondelettes (MMTO), qui devrait nous permettre dans l'avenir d'accéder à la partie droite des spectres des singularités. Nous voulons toutefois porter l'attention du lecteur sur le fait que l'estimation des moments d'ordre q négatif nécessite non seulement une statistique importante afin de pouvoir s'assurer de la convergence statistique des estimateurs, mais aussi une gamme d'échelles inertielles suffisamment étendue pour que l'on puisse avoir confiance dans la caractérisation des propriétés d'invariance d'échelle. Malheureusement, les données expérimentales comme numériques de vitesse La-

grangienne disponibles à ce jour, ne remplissent pas ces conditions et il nous faudra attendre d'autres campagnes expérimentales avant d'espérer pouvoir mesurer la partie décroissante du spectre $\mathcal{D}^L(h)$.

7.3.3 Le modèle Log-Poisson de She-Lévêque

Prenons comme hypothèse que le spectre des singularités de la vitesse longitudinale Eulérienne est donné par le modèle de She-Lévêque [51], que nous transposons dans un espace Euclidien de dimension $d = 1$:

$$\mathcal{D}^E(h) = -1 + \mathrm{A}(h - \frac{1}{9}) - \mathrm{B}(h - \frac{1}{9}) \ln(h - \frac{1}{9}) \ , \tag{7.22}$$

où les constantes A et B sont données par les relations suivantes :

$$\mathrm{A} = 3\left(\frac{1 + \ln\ln(3/2)}{\ln(3/2)} - 1\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{3}{\ln(3/2)} \ . \tag{7.23}$$

Comme cela a été démontré dans les références [52, 53], ce modèle est une généralisation log-Poisson de la description log-normale évoquée ci-dessus. Le spectre d'exposants ζ_q^E peut être calculé par transformation de Legendre du spectre $\mathcal{D}^E(h)$ (Eq. (7.22)) ; on obtient ainsi (Eq. (D.13)) :

$$\zeta_q^E = \frac{q}{9} + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{q}{3}}\right) \ . \tag{7.24}$$

La relation (7.11) permet alors de calculer l'image $\mathcal{D}^L(h)$ du spectre Eulérien $\mathcal{D}^E(h)$. La transformée de Legendre permet alors de calculer le spectre d'exposants ζ_q^L correspondant. Un développement en série entière en fonction de q conduit à l'expression suivante :

$$\zeta_q^L = 0.617q - 0.154\frac{q^2}{2} + 0.078\frac{q^3}{3!} - 0.061\frac{q^4}{4!} + o(q^4) \ , \tag{7.25}$$

qui prédit donc un coefficient d'intermittence $c_2^L = 0.154$ bien plus grand que celui qui est effectivement estimé à partir des données expérimentales et numériques (Eq. (5.37)).

Nous avons représenté dans la figure 7.1, le modèle de She-Lévêque du spectre des singularités de la vitesse (Eq. (7.22)) (trait discontinu épais), ainsi que sa transformée $\mathcal{D}^L(h)$ par la relation (7.11) (trait discontinu fin). L'accord avec les données expérimentales et numériques est bon en ce qui concerne les exposants $h \leq c_1^L$, mais pas du tout satisfaisant pour les exposants $h \geq c_1^L$. Nous constatons donc que les prédictions pour le spectre des singularités $\mathcal{D}^L(h)$ de la vitesse Lagrangienne obtenues par transformation Euler-Lagrange (Eq. (7.11)) des spectres des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ des modèles log-normal (Eq. (7.13)) et log-Poisson (Eq. (7.22)) de la vitesse longitudinale Eulérienne, sont indiscernables et en excellent accord avec les estimations expérimentales et numériques de la partie croissante du spectre des singularités. Nous rappelons que ces estimations expérimentales et numériques

ont été effectuées dans le cadre d'une approximation quadratique de ce spectre (Eq. (5.36)) avec le jeu de paramètres (5.37). En ce qui concerne la partie décroissante du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ ($h > c_1^L$), la transformation Euler-Lagrange (Eq. (7.11)) d'un spectre $\mathcal{D}^E(h)$ log-normal ou log-Poisson entraîne un comportement qui dévie significativement d'une décroissance parabolique comme on peut le constater sur la Figure 7.1. Une confirmation de la validité de cette transformation nécessitera une estimation expérimentale fiable et aussi précise que possible de la partie décroissante du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ à l'aide de la méthode MMTO [112–114, 150]. Pour cela, de nouvelles expérimentations devront être effectuées dans ce but précis. Comme l'illustrent les résultats présentés dans la Figure 7.1, c'est au prix de nouvelles prouesses expérimentales que l'on pourra décider s'il existe vraiment des exposants $h \geq 1$ dans les signaux de vitesse Lagrangienne correspondant, dans la limite des nombres de Reynolds infinis, à des points (en fait des Cantors de points) où cette vitesse serait dérivable.

Cinquième partie

Corrélations à longue portée en turbulence Eulérienne et Lagrangienne

Chapitre 8

Etude des corrélations à longue portée dans les champs de vitesse Eulériens et les trajectoires Lagrangiennes

Nous avons vu dans les premières parties de ce manuscrit, qu'il est possible de décrire statistiquement de manière quantitative les fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne d'un écoulement turbulent. Dans le cadre Eulérien, nous sommes parvenus dans la deuxième partie de cette thèse [66], à décrire de manière tout à fait satisfaisante l'ensemble des statistiques des incréments d'ordre N de vitesse (Annexes B et C) mesurées expérimentalement ou simulées en DNS. Nous appellerons dans la suite, statistiques à *un point* les informations obtenues à partir du calcul des fonctions de structure de la vitesse Eulérienne, $M_q(l) = \langle (\delta_l^{(N)} u)^q \rangle$, des cumulants du logarithme de la vitesse, $C_{n,\delta_l^{(N)}u}$ (Annexe D), ou du spectre de puissance (Section (3.7)). Ces trois quantités statistiques globales mettent en jeu la densité de probabilité de l'exposant $h(x)$ à l'échelle l, qui dépend d'une fonction paramétrique, $\mathcal{D}^E(h)$, qui s'avère être universelle, c'est-à-dire indépendante du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$, et qui acquiert, à la limite des nombres de Reynolds infiniment grands et aux échelles infiniment petites, le statut mathématique de spectre des singularités. Le qualificatif de statistiques à un point signifie simplement que ces quantités globales ne mettent pas en jeu les corrélations spatiales de l'exposant h, c'est-à-dire des quantités telles que $\langle h(x)h(x+\Delta x)\rangle$.

De la même manière, nous avons pu décrire dans la troisième partie de cette thèse [106] les fluctuations de vitesse Lagrangienne, en expliquant de manière quantitative le comportement dans les échelles temporelles des fonctions de structure $M_q(\tau) = \langle (\delta_\tau^{(N)} v)^q \rangle$ et des cumulants du logarithme des incréments d'ordre N de la vitesse, $C_{n,\delta_\tau^{(N)}v}$. Ces quantités globales découlent directement de la connaissance de la densité de probabilité des exposants $h(t)$ à l'échelle τ qui est entièrement gouvernée par la connaissance d'une fonction paramétrique $\mathcal{D}^L(h)$, qui à nouveau s'avère être universelle et donne ainsi accés au spectre des singularités de la vitesse Lagrangienne.

Dans la quatrième partie de cette thèse, nous avons réussi à unifier ces deux descriptions statistiques en dérivant un lien entre les fonctions $\mathcal{D}^E(h)$ et $\mathcal{D}^L(h)$ (Eqs. (7.11) et (7.12)). Ainsi, il est possible de déduire les statistiques des fluctuations de vitesse Lagrangienne à partir de la connaissance des statistiques des fluctuations de vitesse Eulérienne, et inversement. Dans cette dernière partie du manuscrit, nous nous concentrerons principalement sur l'étude des corrélations à longue portée présentes dans les fluctuations de vitesse Eulérienne, en présupposant que la compréhension de ces corrélations nous permettra d'anticiper la démonstration de l'existence de corrélations à longue portée dans les fluctuations de vitesse Lagrangienne.

Nous avons vu que l'incrément de vitesse Eulérienne, $\delta_l u(x) = u(x+l) - u(x)$ est parfaitement modélisé, dans le domaine inertiel, par le produit de deux variables aléatoires indépendantes (Eq. (2.32)),

$$|\delta_l u| \equiv \beta_l \times |\delta| \ , \tag{8.1}$$

où δ est de densité Gaussienne de variance $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\delta_L u)$, et $\beta_l(x) = (l/L)^{h(x)}$ (Eqs. (2.38) et (2.44)) contient toute la dépendance dans les échelles. La statistique de cette variable β_l est complètement caractérisée par la densité de probabilité de l'exposant h à l'échelle l. Ainsi, le propagateur à l'échelle l [9, 92–98], $G(\ln \beta_l)$ (Eq. (2.39)), c'est-à-dire la densité de probabilité de $\ln \beta_l$, s'exprime directement en fonction de la densité de probabilité de l'exposant h à l'échelle l :

$$G(\ln \beta_l) d \ln \beta_l = \mathbb{P}_l(h) dh \ , \tag{8.2}$$

et c'est le formalisme multifractal [1, 45, 113–115] qui permet de quantifier l'évolution dans les échelles de la forme de la densité de probabilité des exposants h, $\mathbb{P}_l(h) \sim (l/L)^{1-\mathcal{D}^E(h)}$, au travers du spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$. L'intermittence et donc la nature multifractale des fluctuations de vitesse Eulérienne, se manifeste par l'existence de l'échelle intégrale L (Annexe A), la déformation des densités de probabilité des incréments de vitesse dans les échelles (Fig. 1.2), la dépendance dans les échelles du cumulant d'ordre 2 de l'incrément de vitesse, C_{2,β_l} (Fig. 2.3(b)), et donc de la densité de probabilité des exposant h, et de la non-linéarité du spectre d'exposants ζ_q^E (Eq. (2.1)). Toutefois, nous allons voir que l'intermittence a aussi des conséquences non triviales sur les statistiques *à plusieurs points* et en particulier sur le fait que l'exposant $h(x)$ va être fortement corrélé à l'exposant $h(x + \Delta x)$, où Δx est une échelle de longueur inférieure à l'échelle intégrale L et très supérieure à l'échelle η_K de Kolmogorov (Eq. (1.6)). C'est le phénomène de corrélations à longue-portée que nous allons étudier dans ce chapitre.

8.1 Evidences expérimentales et numériques de l'existence de corrélations à longue portée dans les fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne

8.1.1 Fonctions de corrélation et fonction d'auto-corrélation connexe

Dans le contexte de la turbulence Eulérienne (Chapitre 1), le moment d'ordre q de la variable β_l,

$$\langle(\beta_l)^q\rangle = \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_q^E} , \tag{8.3}$$

exhibe un comportement en loi de puissance, qui est caractérisé par le spectre d'exposants ζ_q^E (Eq. (2.1)) et qui reflète l'invariance d'échelle des fluctuations de vitesse Eulérienne dans le domaine inertiel. Dans le langage du formalisme multifractal, la variable aléatoire $\beta_l(x)$ s'exprime directement en fonction de l'exposant $h(x)$ (Eqs. (2.38) et (2.44)) :

$$\beta_l(x) = \left(\frac{l}{L}\right)^{h(x)} , \tag{8.4}$$

où l'exposant $h(x)$ est une variable aléatoire de densité de probabilité $\mathbb{P}_l(h)$ dont la dépendance dans les échelles est gouvernée par le spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ (Eq. (2.39)) :

$$\mathbb{P}_l(h) \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} . \tag{8.5}$$

Ceci permet de réécrire le moment d'ordre q de β_l (Eq. (8.3)) comme une intégrale sur tous les exposants h possibles :

$$\langle(\beta_l)^q\rangle = \int \left(\frac{l}{L}\right)^h \mathbb{P}_l(h)dh . \tag{8.6}$$

Nous nous intéresserons dans la suite à caractériser les statistiques *à 2 points* en se concentrant dans un premier temps sur les quantités suivantes (q_1 et $q_2 \in \mathbb{R}$) :

$$\mathcal{M}_{l_1,l_2}(q_1,q_2,\Delta x) = \langle[\beta_{l_1}(x)]^{q_1}[\beta_{l_2}(x+\Delta x)]^{q_2}\rangle , \tag{8.7}$$

que nous appelerons fonction de corrélation à deux points [73]. Sous l'hypothèse que $\eta_K \ll (l_1,l_2) < L$, le bruit Gaussien intervenant dans l'expression (8.1), est complètement décorrélé spatialement et est indépendant des valeurs prises par la variable aléatoire β_l, ce qui permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\langle|\delta_{l_1}u(x)|^{q_1}|\delta_{l_2}u(x+\Delta x)|^{q_2}\rangle = \mathcal{M}_{l_1,l_2}(q_1,q_2,\Delta x)\langle|\delta|^{q_1}\rangle\langle|\delta|^{q_2}\rangle . \tag{8.8}$$

Définissons maitenant la densité de probabilité jointe des deux exposants $h_1 = h(x)$ et $h_2 = h(x+\Delta x)$, $\mathbb{P}_{l_1,l_2}(h_1,h_2,\Delta x)$, qui quantifie la probabilité[1] que $\beta_{l_1}(x)$ soit égal à $(l_1/L)^{h_1}$

[1] Nous verrons dans la suite qu'il est possible d'exprimer cette densité de probabilité jointe en fonction du spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$.

et que $\beta_{l_2}(x+\Delta x)$ soit égal à $(l_2/L)^{h_2}$. Nous pouvons alors réécrire la fonction de corrélation à deux points (Eq. (8.7)) de la façon suivante [73] :

$$\mathcal{M}_{l_1,l_2}(q_1,q_2,\Delta x) = \iint \left(\frac{l_1}{L}\right)^{q_1 h_1} \left(\frac{l_2}{L}\right)^{q_2 h_2} \mathbb{P}_{l_1,l_2}(h_1,h_2,\Delta_x) dh_1 dh_2 \ . \tag{8.9}$$

Remarquons que la physique décrite par l'estimateur statistique $\mathcal{M}$ (Eq. (8.7)) englobe celle donnée par les fonctions de structure (Eq. (8.3)) puisque, dans la limite $\Delta x \to 0$, nous retrouvons

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x) = \langle (\beta_l)^{q_1+q_2} \rangle \ . \tag{8.10}$$

De façon alternative, nous pouvons caractériser les statistiques à 2 points à partir de la fonction d'autocorrélation connexe (FAC) [74, 77, 78, 80, 139, 140] du logarithme de la variable aléatoire β_l :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{l_1,l_2}(\Delta x) &= \langle \ln \beta_{l_1}(x) \ln \beta_{l_2}(x+\Delta x) \rangle_c \\ &= \langle [\ln \beta_{l_1}(x) - \langle \ln \beta_{l_1} \rangle] [\ln \beta_{l_2}(x+\Delta x) - \langle \ln \beta_{l_1} \rangle] \rangle \ . \end{aligned} \tag{8.11}$$

Ceci permet de directement quantifier les corrélations[2] des deux exposants h_1 et h_2 séparés par la distance Δx dans l'espace physique,

$$\mathcal{C}_{l_1,l_2}(\Delta x) = \ln(l_1/L) \ln(l_2/L) \iint h_1 h_2 \mathbb{P}_{l_1,l_2}(h_1,h_2,\Delta_x) dh_1 dh_2 - C_{1,\beta_{l_1}} C_{1,\beta_{l_2}} \ , \tag{8.12}$$

où le cumulant d'ordre 1 de $\ln \beta_l$ est proportionnel au logarithme de l'échelle dans le domaine inertiel

$$C_{1,\beta_l} = \langle \ln \beta_l \rangle = \langle h \rangle \ln(l/L) \ . \tag{8.13}$$

La FAC (Eq. (8.11)) englobe la physique pointée par le cumulant d'ordre 2 du logarithme de l'incrément, puisqu'il est évident de montrer que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = C_{2,\beta_l} \ , \tag{8.14}$$

où

$$C_{2,\beta_l} = \mathrm{Var}(\ln \beta_l) = \mathrm{Var}(h) \ln^2(l/L) \ . \tag{8.15}$$

La FAC des incréments de vitesse est alors égale à $C_{l,l}(\Delta x)$, puisque le bruit δ Gaussien (Eq. (8.1)) est décorélé spatialement et indépendant de β_l ; on obtient ainsi :

$$\langle \ln |\delta_l u(x)| \ln |\delta_l u(x+\Delta x)| \rangle_c = \mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) \ . \tag{8.16}$$

Remarquons enfin que la fonction de corrélation $\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x)$ (Eq. (8.7)) et la FAC $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x)$ (Eq. (8.11)) sont reliées de la manière suivante (Annexe F) :

$$\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = \lim_{q \to 0} \frac{1}{q^2} \ln \left(\frac{M_{l,l}(q,q,\Delta x)}{\langle (\beta_l)^q \rangle^2} \right) \ . \tag{8.17}$$

[2]Plus directement, aux échelles $l_1 = l_2 = l$, la Fac quantifie les corrélations des exposants $h_1 = h(x)$ et $h_2 = h(x+\Delta x)$ définis à l'échelle l : $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = \langle h_1 h_2 \rangle \ln^2(l/L)$.

8.1.2 Etude expérimentale et numérique des FAC des incréments de vitesses Eulérienne et Lagrangienne

Nous avons représenté dans la figure 8.1, les FAC des incréments de vitesses Eulérienne (Eq. (8.16)) et Lagrangienne, pour plusieurs échelles spatiales l ou temporelles τ, en fonction de $\ln(\Delta x/L)$ ou $\ln(\Delta t/T)$. Pour comparaison, nous avons aussi représenté le cumulant d'ordre 2 de l'incrément de vitesse à une échelle l, C_{2,β_l} (Eq. (8.15)) en fonction de $\ln(l/L)$ ou son équivalent Lagrangien C_{2,β_τ} sur un intervalle de temps τ en fonction de $\ln(\tau/T)$. Dans tous les cas de figure, le signal de vitesse exhibe des corrélations à longue portée qui se traduisent par des valeurs significativement positives de la FAC sur des "grandes" distances et ce aussi bien dans la description Eulérienne de l'écoulement, $l < \Delta x < L$, que dans la description Lagrangienne, $\tau < \Delta t < T$. Nous constatons toutefois des différences fondamentales entre les comportements obtenus expérimentalement et numériquement. En effet, comme nous pouvons le constater sur les figures 8.1(b) et 8.1(d), dans le domaine inertiel, c'est-à-dire pour des échelles $l > \eta_K$ (ou $\tau > \tau_{\eta_K}$), la FAC obtenue sur les signaux numériques de vitesse (DNS) coïncide avec le cumulant d'ordre 2 lorsque Δx (ou Δt) est une distance supérieure à l (ou τ). Nous pouvons donc en conclure que la FAC $C_{l,l}(\Delta x)$ se comporte linéairement en fonction de $\ln(\Delta x/L)$, lorsque $\eta_K \ll l < \Delta x < L$, c'est-à-dire

$$C_{2,\beta_l} = -c_2^E \ln(l/L) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = -c_2^E \ln(\Delta x/L) \ , \tag{8.18}$$

où $c_2^E = 0.025 \pm 0.003$ est le coefficient d'intermittence du modèle log-normal des fluctuations de vitesse Eulérienne (Eq. (2.66)). De manière équivalente, aux échelles $\tau_{\eta_K} \ll \tau < \Delta t < L$, la FAC des incréments de vitesse Lagrangienne $C_{\tau,\tau}(\Delta t)$ coincide avec le cumulant d'ordre 2 du logarithme C_{2,β_τ}, c'est à dire

$$C_{2,\beta_\tau} = -c_2^L \ln(\tau/T) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\tau,\tau}(\Delta t) = -c_2^L \ln(\Delta t/T) \ , \tag{8.19}$$

où $c_2^L = 0.08 \pm 0.01$ est le coefficient d'intermittence du modèle log-normal des fluctuations de vitesse Lagrangienne (Eq. (5.37)). Nous montrerons dans la suite de ce chapitre que ces comportements (Eqs. (8.18) et (8.19)) sont très bien modélisés en postulant l'existence d'une structure hiérarchique (cascade) sous-jacente aux fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne [29, 31, 77, 78, 80, 116, 139–141]. Il est important de remarquer que lorsque l'échelle l est de nature dissipative ($l \lesssim \eta_K$), la FAC ne coincide plus tout à fait avec le cumulant d'ordre 2 pour des distances Δx inertielles. Cette remarque est tout aussi valable en ce qui concerne les fluctuations de vitesse Lagrangienne.

Dans la figure 8.1(a) nous avons représenté la FAC des incréments de vitesse Eulérienne obtenue à partir des signaux expérimentaux de Modane ($\mathbb{R}_\lambda = 2500$), $C_{l,l}(\Delta x)$ en fonction de $\ln(\Delta x/L)$ pour $\Delta x > l$, ainsi que le cumulant d'ordre 2, C_{2,β_l} en fonction de $\ln(l/L)$. Contrairement à ce que nous avons observé pour les signaux numériques de DNS (Fig. 8.1(b) et Eq. (8.18)), la FAC et C_{2,β_l} ne coincident pas lorsque $\eta_K \ll l < \Delta x < L$. En fait, l'étude des signaux expérimentaux de vitesse Eulérienne a été éffectuée par Delour et collaborateurs [80, 139], qui les premiers ont mis en évidence le fait que la FAC se comporte

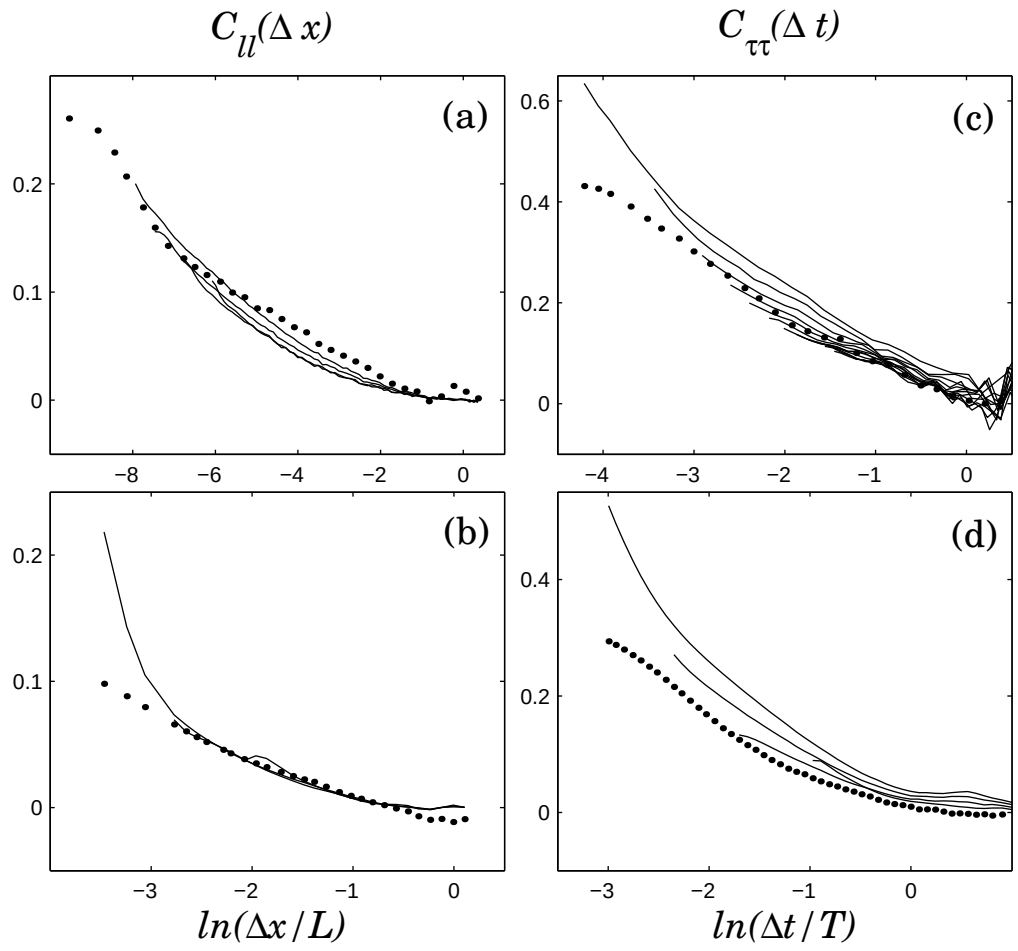

FIG. 8.1 – Représentation (trait continu) de la fonction d'auto-corrélation connexe des incréments de vitesse Eulérienne, $C_{l,l}(\Delta x) = \langle \ln|\delta_l u(x)| \ln|\delta_l u(x+\Delta x)|\rangle_c$ (Eq. (8.16)) pour $\Delta x > l$, en fonction de $\ln(\Delta x/L)$. (a) Signal expérimental de vitesse Eulérienne, mesuré dans la soufflerie de Modane ($\mathbb{R}_\lambda = 2500$) [9, 92], aux échelles $l/L = 0.0003, 0.0006, 0.0011$ et 0.0023 ; nous avons représenté pour comparaison (•) le cumulant d'ordre 2, C_{2,β_l}, en fonction cette fois-ci de $\ln(l/L)$. (b) Signal numérique de DNS de vitesse Eulérienne ($\mathbb{R}_\lambda = 140$), aux échelles $l/L = 0.0313, 0.0625$ et 0.1250 ; les symboles (•) représentent à nouveau C_{2,β_l}. Représentation (trait continu) de la fonction d'auto-corrélation connexe des incréments de vitesse Lagrangienne, $C_{\tau,\tau}(\Delta t) = \langle \ln|\delta_\tau v(t)| \ln|\delta_\tau v(t+\Delta t)|\rangle_c$ pour $\Delta t > \tau$, en fonction de $\ln(\Delta t/T)$.(c) Signal expérimental de vitesse Lagrangienne ($\mathbb{R}_\lambda = 740$) [27–31], aux échelles $\tau/T = 0.0149, 0.0347, 0.0545, 0.0744, 0.0942, 0.1140, 0.1339, 0.1537, 0.1735, 0.1933, 0.2132$ et 0.2330. (d) Signal numérique de DNS de vitesse Lagrangienne ($\mathbb{R}_\lambda = 140$), aux échelles $\tau/T = 0.0500, 0.0956, 0.1822$ et 0.3778. Dans (c) et (d) les symboles (•) correspondent au comportement de C_{2,β_τ} en fonction de $\ln(\tau/T)$.

plutôt comme[3] :

$$C_{l,l}(\Delta x) = \frac{c_2^E}{\ln \mathbb{R}_\lambda} \ln^2(\Delta x/L) \ , \tag{8.20}$$

un comportement qui apparait donc incohérent avec l'existence d'une structure "simple" de cascade. Suite à cette étude, une argumentation de Castaing [116] suggère que cette observation ne remet pas en cause la pertinence des modèles de cascade mais est plutôt une manifestation d'une décorrélation temporelle dûe à l'utilisation de l'hypothèse de Taylor. De manière simplifiée, l'hypothèse de Taylor (Eq. (1.7)) permet de réinterpréter la mesure temporelle de la vitesse $u'(x_0, t_0+\tau)$ d'un écoulement turbulent de vitesse moyenne U dans le référentiel du laboratoire, comme une mesure spatiale de vitesse

$$u'(x_0, t_0 + \tau) \simeq u(x_0 - U\tau, t_0) \ , \tag{8.21}$$

où u est la valeur de la vitesse dans le référentiel de l'écoulement moyen. En fait, nous avons négligé dans l'équation (8.21), la variation temporelle de la vitesse u' pendant le temps τ. Il serait donc plus correct d'interpréter $u'(x_0, t_0 + \tau)$ comme $u(x_0 - U\tau, t_0 + \tau)$. En partant de l'hypothèse que la FAC des incréments de vitesse Eulérienne se comporte de façon logarithmique (Eq. (8.18)), Castaing [116] a montré qu'en prennant en compte ces corrections, la FAC estimée à partir des profils spatiaux de vitesse Eulérienne obtenus en laboratoire sous l'hypothèse de Taylor, se comporte exactement comme observé expérimentalement (Eq. (8.20)). En particulier, son argumentation permet d'expliquer le coefficient $c_2^E / \ln \mathbb{R}_\lambda$ et ainsi la dépendance des estimations expérimentales en fonction du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_\lambda$ rapportée par Delour et collaborateurs [80, 139].

Nous pouvons ainsi conclure que les signaux expérimentaux et numériques de vitesses Eulérienne et Lagrangienne exhibent des corrélations à longue portée, c'est-à-dire que les fluctuations de vitesse Eulérienne (resp. Lagrangienne) sont corrélées sur des distances beaucoup plus grandes que l'échelle dissipative η_K (resp. τ_{η_K}). Plus précisemment, la fonction d'autocorrélation connexe $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x)$ (resp. $\mathcal{C}_{\tau,\tau}(\Delta t)$) se comporte de manière logarithmique vis à vis de la distance Δx (resp. l'intervalle de temps Δt) (Eqs. (8.18) et (8.19)). Dans la Section 8.2, nous allons proposer et discuter une représentation de la valeur aléatoire $\beta_l(x)$ dans le demi-plan espace-échelle (x, l) $(l > 0)$, qui permette de rendre compte du fait que la valeur de la variable aléatoire β_l au point x conditionne fortement sa valeur au point $x + \Delta x$, ou Δx est une échelle dite inertielle ($\eta_K \ll \Delta x < L$).

8.2 Représentation espace-échelle des fluctuations de vitesse Eulérienne

Nous présentons de façon schématique dans la figure 8.2, les réalisations de la variable aléatoire β_l aux points x et $x + \Delta x$, ainsi qu'une réalisation de la variable $\beta_{\Delta x}$ au point x.

[3] Les auteurs de la référence [80] montrent que la FAC estimée à partir des données expérimentales est aussi compatible avec le comportement suivant : $C_{l,l}(\Delta x) = (\mathbb{R}_\lambda)^{-a} \ln^2(\Delta x/L)$, avec $a = 0.20 \pm 0.03$.

Nous avons vu que ces variables aléatoires interviennent dans la modélisation probabiliste de l'incrément de vitesse (Eq. (8.1)). Pour une échelle fixée l (ou Δx), la variable aléatoire β_l peut être paramétrée en fonction de l'exposant h (Eq. (8.4)), qui a pour densité de probabilité $\mathbb{P}_l(h)$ (Eq. (8.5)). Nous avons vu que cette variable aléatoire est corrélée à longue-portée (Eq. (8.18)), ce qui indique que sa valeur au point $x + \Delta x$ dépend nécessairement et fortement de sa valeur au point x. Admettons en première approche que l'on puisse expliquer les statistiques de la variable β_l à partir de celles des variables aléatoires $\beta_{l'}$, où $l' > l$. Cette hypothèse est consistante avec la notion de propagateur [9, 92–98] que nous avons introduit dans le Chapitre 2. En effet, nous avons vu que la densité de probabilité des incréments de vitesse à une échelle l, $\mathcal{P}(\delta_l u)$, se déduit de celle à une échelle $l' > l$, $\mathcal{P}(\delta_{l'} u)$, moyennant l'introduction d'un noyau ou propagateur $G_{l,l'}$ entre les échelles l et l' (Eq. (2.28)). Plus généralement, nous allons admettre l'existence d'une structure hiérarchique ou "cascade" dans les échelles [6], qui suppose que les variations d'une observable de l'écoulement (telle que la vitesse ou la dissipation) sur une échelle l ne dépendent exclusivement que des variations de cette même observable sur une échelle $l' > l$.

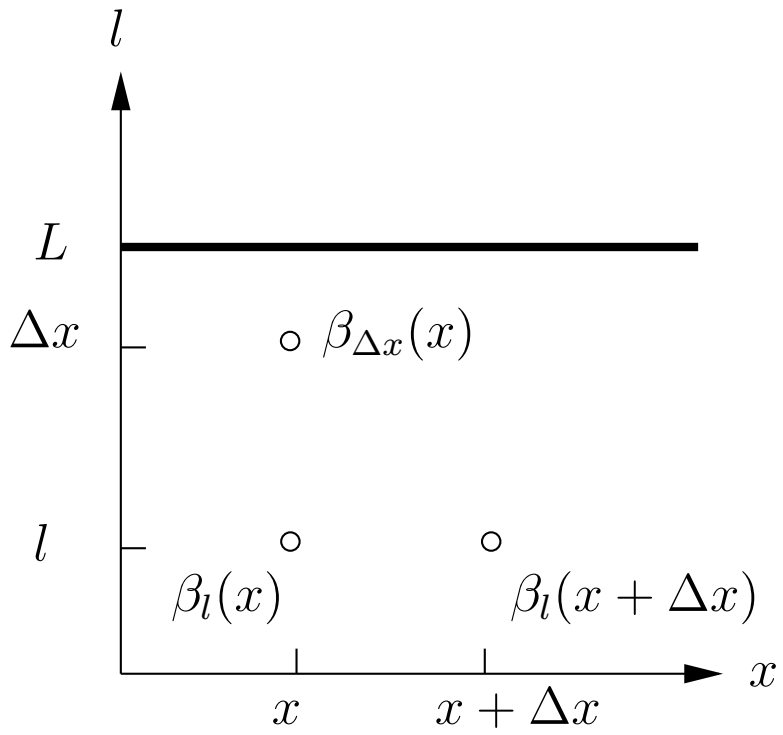

FIG. 8.2 – Représentation du demi-plan espace-échelle (x, l). Nous indiquons par des ronds ($\circ$) les réalisations de la variable β_l aux points x et $x + \Delta x$, ainsi qu'une réalisation de $\beta_{\Delta x}$ au point x.

La fonction de corrélation à deux points $\mathcal{M}_{l_1,l_2}(q_1, q_2, \Delta x)$ (Eq. (8.7)) va nous permettre de quantifier les implications de cette structure de cascade sous-jacente en termes de cor-

rélations à longue portée. Réécrivons cette fonction de corrélation en faisant apparaitre un possible "ancêtre commun" aux variables aléatoires $\beta_l(x)$ et $\beta_l(x+\Delta x)$, un ancêtre qui se situe *a priori* à une échelle voisine de Δx (Fig. 8.2) :

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x) = \langle (\beta_{\Delta x}(x))^{q_1} (\beta_{\Delta x}(x+\Delta x))^{q_2} \left(\frac{\beta_l(x)}{\beta_{\Delta x}(x)}\right)^{q_1} \left(\frac{\beta_l(x+\Delta x)}{\beta_{\Delta x}(x+\Delta x)}\right)^{q_2} \rangle \ . \quad (8.22)$$

Les hypothèses formulées par Cates et Deutsch [72] vont permettre d'effectuer explicitement le calcul de cette fonction de corrélation. Ces auteurs ne présupposent pas la structure "locale"[4] du demi-plan espace-échelle, mais uniquement sa structure "moyenne", c'est-à-dire la forme de la fonction $\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x)$ (Eq. (8.7)). Leurs hypothèse sont les suivantes :

1 Les fluctuations de vitesse (c'est-à-dire β_l) sont invariantes d'échelle, ou de manière plus précise, $\langle (\beta_l)^q \rangle \sim l^{\zeta_q^E}$, où ζ_q^E est le spectre des exposants des fonctions de structure de la vitesse Eulérienne. En admettant le phénomène d'intermittence, nous savons qu'il existe une échelle intégrale L (Annexe A) au delà de laquelle les statistiques multifractales ne peuvent s'étendre, ce qui permet d'écrire que pour $l \leq L$,

$$\langle (\beta_l)^q \rangle = (l/L)^{\zeta_q^E} \ . \quad (8.23)$$

Remarquons que l'équation (8.23) implique que le processus aléatoire $\beta_L(x)$ est en fait déterministe, c'est-à-dire que, $\forall x$, $\langle (\beta_L(x))^q \rangle = 1 = (\beta_L(x))^q = \beta_L(x)$.

2 Dans le domaine inertiel, les fluctuations de vitesse sont invariantes d'échelle et log-infiniment divisibles [86–91, 95, 137, 138], ce qui permet d'écrire au même point x et pour les deux échelles l et l' ($l < l'$),

$$\langle \left(\frac{\beta_l(x)}{\beta_{l'}(x)}\right)^q \rangle = \left(\frac{l}{l'}\right)^{\zeta_q^E} \ . \quad (8.24)$$

3 Le processus aléatoire $\beta_l(x)$ est stationnaire à l'échelle l, c'est-à-dire, $\forall x$ et $\forall l > 0$,

$$\beta_l(x) \approx \beta_l(x+l) \ . \quad (8.25)$$

Remarquons que cette hypothèse est très forte, et n'a pas été retenue par Meneveau et Chhabra [73] dans leur description des statistiques à 2 points de mesures multifractales. Tout au contraire, ces auteurs mettent en exergue que la dissipation d'énergie locale ϵ (Eq. 1.1)) peut être modélisée par un processus multiplicatif[5] discret. Dans cette construction de cascade discrète, la mesure générée à l'échelle l ne respecte pas la stationnarité, c'est-à-dire qu'il existe des points x tels que l'équation (8.25) n'est

[4] Nous allons voir dans le chapitre 9 qu'il existe de nombreux choix possibles de construction dans le demi-plan espace-échelle.

[5] Nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre 9.

pas respectée, et plus précisemment, il existe des points x tels que la variable aléatoire $\beta_l(x)$ est totalement décorrélée de la variable aléatoire $\beta_l(x+l)$. Il est important de mentionner que les résultats rapportés dans la Ref. [74] concernant l'existence de corrélations à longue portée dans les fluctuations de la dissipation locale obtenue à partir de signaux expérimentaux de vitesse sous l'hypothèse de Taylor, sont tout à fait compatibles avec les prédictions théoriques de ces modèles de cascade discrète.

4 L'ancêtre commun des mesures $\beta_l(x)$ et $\beta_l(x+\Delta x)$ se situe à l'échelle $l \sim \Delta x$, c'est-à-dire que les variables aléatoires $\beta_l(x)/\beta_{\Delta x}(x)$ et $\beta_l(x+\Delta x)/\beta_{\Delta x}(x+\Delta x)$ sont totalement décorrélées, ce qui permet d'écrire que, $\forall(q_1,q_2)$,

$$\langle\left(\frac{\beta_l(x)}{\beta_{\Delta x}(x)}\right)^{q_1}\left(\frac{\beta_l(x+\Delta x)}{\beta_{\Delta x}(x+\Delta x)}\right)^{q_2}\rangle = \langle\left(\frac{\beta_l(x)}{\beta_{\Delta x}(x)}\right)^{q_1}\rangle\langle\left(\frac{\beta_l(x+\Delta x)}{\beta_{\Delta x}(x+\Delta x)}\right)^{q_2}\rangle \ . \tag{8.26}$$

Cette relation résume à elle seule la notion de cascade, et est particulièrement évidente dans le cas particulier des modèles de cascade discrète. Nous admettrons enfin que ces mêmes variables aléatoires $\beta_l(x)/\beta_{\Delta x}(x)$ et $\beta_l(x+\Delta x)/\beta_{\Delta x}(x+\Delta x)$ sont décorrélées de la variable aléatoire $\beta_{\Delta x}(x) \approx \beta_{\Delta x}(x+\Delta x)$.

Les hypothèses précédentes ainsi que les équations (8.25) et (8.26), permettent de factoriser la fonction de corrélation à deux points (Eq. (8.22)) [72] :

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x) = \langle(\beta_{\Delta x})^{q_1+q_2}\rangle\langle\left(\frac{\beta_l}{\beta_{\Delta x}}\right)^{q_1}\rangle\langle\left(\frac{\beta_l}{\beta_{\Delta x}}\right)^{q_2}\rangle \ . \tag{8.27}$$

L'invariance d'échelle (Eq. (8.23)) et la log-infinie divisibilité (Eq. (8.24)) permettent alors de calculer la fonction de corrélation à deux points en fonction du spectre d'exposants ζ_q^E :

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x) = \left(\frac{\Delta x}{L}\right)^{\zeta^E_{q_1+q_2}}\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^{\zeta^E_{q_1}+\zeta^E_{q_2}} \ , \tag{8.28}$$

que nous pouvons réécrire de la manière suivante[6] [73] :

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x) = \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta^E(q_1,q_2,\omega)} \ , \tag{8.29}$$

avec

$$\zeta^E(q_1,q_2,\omega) = \zeta^E_{q_1}+\zeta^E_{q_2}+\omega\left[\zeta^E_{q_1+q_2}-\zeta^E_{q_1}-\zeta^E_{q_2}\right] \ , \ \text{où } \omega = \frac{\ln(\Delta x/L)}{\ln(l/L)} \ . \tag{8.30}$$

Nous constatons ainsi que sous les hypothèses précedemment évoquées, les statistiques à 2 points se formulent naturellement à partir des statistiques à 1 point. La relation (8.30) montre que la généralisation à 2 points de la fonction de structure, $\mathcal{M}_{l,l}(q_1,q_2,\Delta x)$, se

[6] Il devient alors évident de généraliser la relation (8.29) à deux échelles l et l' différentes.

comporte également en loi de puissance, avec un spectre d'exposants $\zeta^E(q_1, q_2, \omega)$ (Eq. (8.29)), qui est une fonction (non-triviale) du spectre d'exposants à 1 point, ζ_q^E.

Remarquons que si les fluctuations de vitesse étaient monofractales (K41), la linéarité du spectre d'exposants $\zeta_q^E = q/3$ en fonction de q, impliquerait l'absence de corrélations à longue portée. En effet, nous aurions alors $\forall q$, $\zeta_{q_1+q_2}^E = \zeta_{q_1}^E + \zeta_{q_2}^E$, ce qui conduirait d'après l'équation (8.30), à l'égalité $\zeta^E(q_1, q_2, \omega) = \zeta_{q_1}^E + \zeta_{q_2}^E$ et de façon générale à la relation :

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1, q_2, \Delta x) = \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_{q_1}^E + \zeta_{q_2}^E} = \langle (\beta_l(x))^{q_1} \rangle \langle (\beta_l(x + \Delta x))^{q_2} \rangle \ , \tag{8.31}$$

qui traduit le fait que dans la description monofractale K41, les fluctuations de vitesse ne sont pas corrélées sur des distances $\Delta x > \eta_K$.

Il est important de noter que dans le contexte des processus de cascade multifractals précedemment définis, l'échelle integrale L peut bien être interprétée comme une échelle de décorrélation, puisque les relations (8.29) et (8.30) montrent que pour des distances $\Delta x \geq L$,

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1, q_2, L) = \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_{q_1}^E + \zeta_{q_2}^E} = \langle (\beta_l(x))^{q_1} \rangle \langle (\beta_l(x + L))^{q_2} \rangle \ . \tag{8.32}$$

Remarquons enfin que pour une distance $\Delta x = l$, $\zeta^E(q_1, q_2, \omega = 1) = \zeta_{q_1+q_2}^E$, ce qui conduit à l'expression suivante de la fonction de corrélation à 2 points :

$$\mathcal{M}_{l,l}(q_1, q_2, l) = \langle (\beta_l)^{q_1+q_2} \rangle \ , \tag{8.33}$$

qui peut être vue comme une conséquence de l'hypothèse de stationnarité (Eq. (8.25)).

Dans le cadre d'un modèle de cascade log-normale qui prédit un spectre d'exposants quadratique $\zeta_q^E = c_1^E q - c_2^E q^2/2$ (Eq. (2.2)), la relation (8.17) (démontrée en Annexe F), permet alors de calculer[7] la Fonction d'Autocorrélation Connexe $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x)$:

$$\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = \lim_{q \to 0} \frac{1}{q^2} \left[(\zeta^E(q, q, \omega) - 2\zeta_q^E) \ln(l/L) \right] = -c_2^E \ln(\Delta x/L) \ . \tag{8.34}$$

Comme nous l'avons rapporté dans la Section 8.1.2, l'équation (8.34) est en parfait accord avec les estimations expérimentales et numériques de la FAC et ceci aussi bien pour les fluctuations de vitesse Eulérienne (Eq. (8.18)) que de vitesse Lagrangienne (Eq. (8.19)).

[7] Nous présentons ici le calcul de $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x)$ pour un modèle de cascade log-normale dont le spectre ζ_q^E est quadratique. De manière générale, il suffit de faire apparaitre le développement en série entière de ζ_q^E, et il devient évident de montrer que la constante devant le terme $\ln(\Delta x/L)$ est la valeur de la dérivée seconde de ζ_q^E en $q = 0$.

8.3 Cascades et formalisme multifractal.

Dans cette section, nous nous proposons de discuter des diverses implications de la factorisation de Cates et Deutsch (Eq. (8.27)) [72] sur l'organisation spatiale des exposants $h(x)$ caractéristiques des fluctuations de vitesse Eulérienne. Il est clair que comme dans la section précédente, tous les résultats présentés seront également valables pour l'organisation temporelle des exposants $h(t)$ caractéristiques des fluctuations de vitesse Lagrangienne. Nous avons vu que la fonction de corrélation à 2 points $\mathcal{M}_{l,l}(q_1, q_2, \Delta x)$ (Eq. (8.7)) peut être interprétée, dans le langage du formalisme multifractal [1, 45, 73, 74], comme la moyenne sur tous les exposants $h_1 = h(x)$ et $h_2 = h(x + \Delta x)$ de la variable aléatoire $(l/L)^{q_1 h_1 + q_2 h_2}$ (Eq. (8.9)). De la même manière, la FAC $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x)$ (Eq. (8.11)) doit être rapprochée aux corrélations des exposants h_1 et h_2 (Eq. (8.12)). Les équations (8.9) et (8.12) font intervenir la densité de probabilité jointe $\mathbb{P}_{l,l}(h_1, h_2, \Delta x)$ de deux exposants h_1 et h_2 espacés de Δx. C'est Meneveau et Chhabra [73] qui à notre connaissance sont les premiers à avoir calculé cette densité de probabilité.

Sous certaines hypothèses d'invariance d'échelle, de log-infinie divisibilité et de stationnarité, nous avons réussi à montrer que la fonction de corrélation à 2 points se comporte en loi de puissance en fonction de l'échelle (Eq. (8.29)) dont le spectre d'exposants généralisé $\zeta^E(q_1, q_2, \omega)$ (Eq. (8.30)) s'exprime directement en fonction du spectre d'exposants ζ_q^E (Eq. (2.1)). Il est alors naturel d'introduire comme généralisation du spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$, le spectre $\mathcal{D}^E(h_1, h_2, \omega)$ qui caractérise le comportement de la densité de probabilité jointe en fonction de l'échelle l et de $\omega = \ln(\Delta x/L)/\ln(l/L)$:

$$\mathbb{P}_{l,l}(h_1, h_2, \Delta x) = \frac{\left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h_1,h_2,\omega)}}{\iint \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h',h'',\omega)} dh'dh''} \ . \tag{8.35}$$

En utilisant la définition du spectre généralisé $\zeta^E(q_1, q_2, \omega)$ (Eq. (8.30))et en appliquant la méthode du point col, on peut alors calculer le comportement de la fonction de corrélation à 2 points (Eq. (8.7)) dans la limite $\eta_K \ll l \ll L$:

$$\begin{aligned} M_{l,l}(q_1, q_2, \Delta x) &= \left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta^E(q_1,q_2,\omega)} , \\ &= \frac{\iint \left(\frac{l}{L}\right)^{q_1 h_1 + q_2 h_2 + 1 - \mathcal{D}^E(h_1,h_2,\omega)} dh_1 dh_2}{\iint \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h',h'',\omega)} dh'dh''} , \\ &\sim \left(\frac{l}{L}\right)^{\min\limits_{h_1,h_2}\left[q_1 h_1 + q_2 h_2 + 1 - \mathcal{D}^E(h_1,h_2,\omega)\right]} . \end{aligned} \tag{8.36}$$

On montre ainsi que les spectres $\zeta^E(q_1, q_2, \omega)$ et $\mathcal{D}^E(h_1, h_2, \omega)$ sont transformées de Legendre (à deux dimensions) l'un de l'autre [73] :

$$\zeta^E(q_1, q_2, \omega) = \min_{h_1,h_2} \left[q_1 h_1 + q_2 h_2 + 1 - \mathcal{D}^E(h_1, h_2, \omega)\right] \ , \tag{8.37}$$

ou inversement :

$$\mathcal{D}^E(h_1,h_2,\omega) = \min_{q_1,q_2} \left[q_1h_1 + q_2h_2 + 1 - \zeta^E(q_1,q_2,\omega)\right] \ . \tag{8.38}$$

Si par souci de simplicité, nous considérons comme hypothèse supplémentaire que le spectre d'exposants ζ_q^E est une fonction dérivable de q, alors il est possible de définir une fonction $h(q)$ telle que [45, 73, 74, 112–114] :

$$h(q) = \frac{d\zeta_q^E}{dq} \ . \tag{8.39}$$

Soient $Q_1(h_1,h_2,\omega)$ et $Q_2(h_1,h_2,\omega)$ deux fonctions complètement déterminées par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial\left[q_1h_1+q_2h_2+1-\zeta^E(q_1,q_2,\omega)\right]}{\partial q_1}\right)_{q_1=Q_1(h_1,h_2,\omega)} = 0 \ , \\ \left(\frac{\partial\left[q_1h_1+q_2h_2+1-\zeta^E(q_1,q_2,\omega)\right]}{\partial q_2}\right)_{q_2=Q_2(h_1,h_2,\omega)} = 0 \ , \end{array} \right. \tag{8.40}$$

ce qui revient à chercher les fonctions $Q_1(h_1,h_2,\omega)$ et $Q_2(h_1,h_2,\omega)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = h(Q_1) + \omega\left[h(Q_1+Q_2) - h(Q_1)\right] \ , \\ h_2 = h(Q_2) + \omega\left[h(Q_1+Q_2) - h(Q_2)\right] \ . \end{array} \right. \tag{8.41}$$

Alors, d'après l'équation (8.38), on peut montrer que [73] :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^E(h_1,h_2,\omega) = &-1 + \mathcal{D}^E(h(Q_1)) + \mathcal{D}^E(h(Q_2)) \\ &+ \omega\left[1 + \mathcal{D}^E(h(Q_1+Q_2)) - \mathcal{D}^E(h(Q_2)) - \mathcal{D}(h(Q_2))\right] \ . \end{aligned} \tag{8.42}$$

Le spectre des singularités généralisé $\mathcal{D}^E(h_1,h_2,\omega)$ s'exprime donc simplement en fonction du spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$.

Remarquons que pour des distances de l'ordre de l'échelle intégrale $\Delta x = L$ ($\omega = 0$), la probabilité $\mathbb{P}_l(h_1,h_2,L)$ d'avoir l'exposant h_1 en x et l'exposant h_2 en $x+L$ est égale[8] à

$$\mathbb{P}_l(h_1,h_2,L) \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h_1,h_2,0)} \sim \mathbb{P}_l(h_1)\mathbb{P}_l(h_2) \ , \tag{8.43}$$

ce qui confirme que les exposants h_1 et h_2 sont bien décorrélés pour des distances supérieures ou égales à l'échelle intégrale (Eq. (8.32)). Remarquons aussi que pour des distances $\Delta x = l$ ($\omega = 1$), l'équation (8.41) entraine que $h_1 = h_2 = h(Q_1+Q_2)$, ce qui conduit à l'expression :

$$\mathbb{P}_l(h_1,h_2,l) \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h_1,h_2,1)} \sim \mathbb{P}_l(h_1) \sim \mathbb{P}_l(h_2) \ . \tag{8.44}$$

[8] L'équation (8.41) montre plus directement qu'à des distances $\Delta x \simeq L$, $h_1 = h(Q_1)$ et $h_2 = h(Q_2)$.

Si maintenant on se place dans le cadre d'une description de l'intermittence de la vitesse Eulérienne à l'aide d'un modèle de cascade log-normale, la nature quadratique du spectre des singularités (Eq. (2.27)),

$$\mathcal{D}^E(h) = 1 - \frac{(h - c_1^E)^2}{2c_2^E} \ , \tag{8.45}$$

permet d'effectuer un calcul exact du spectre des singularités généralisé $\mathcal{D}^E(h_1, h_2, \omega)$ (Eq. (8.42)). On obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(h_1, h_2) = \frac{(\omega-1)c_1^E + h_1 - \omega h_2}{(\omega^2-1)c_2^E} \ , \\ Q_2(h_1, h_2) = \frac{(\omega-1)c_1^E + h_2 - \omega h_1}{(\omega^2-1)c_2^E} \ , \end{array} \right. \tag{8.46}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} h(Q_1) = c_1^E - \frac{(\omega-1)c_1^E + h_1 - \omega h_2}{\omega^2-1} \ , \\ h(Q_2) = c_1^E - \frac{(\omega-1)c_1^E + h_2 - \omega h_1}{\omega^2-1} \ , \\ h(Q_1 + Q_2) = h(Q_1) + h(Q_2) - c_1 \ . \end{array} \right. \tag{8.47}$$

Nous venons de voir que le phénomène d'intermittence est intimement lié à l'existence de corrélations à longue portée. L'hypothèse de factorisation de Cates et Deutsch (Eq. (8.27)) [72], qui doit être rapprochée de la notion de cascade, nous a permis de montrer qu'une même fonction $\mathcal{D}^E(h)$, dans le domaine inertiel ($\eta_K \ll l < \Delta x$), pilote à la fois les statistiques à 1 point (densité de probabilité, fonctions de structure, cumulants du logarithme, spectre de puissance) et les statistiques à 2 points (fonctions de corrélation à 2 points, fonction d'auto-corrélation connexe). S'il a été naturel et relativement aisé d'étendre le formalisme multifractal aux échelles dissipatives $l \sim \eta_K$ (Chapitre 3), la généralisation de l'étude des corrélations à des échelles dissipatives ($0 < l \ll \eta_K \ll \Delta x$) s'avère être délicate et difficile car la factorisation de Cates et Deutsch nécessite la propriété de log-infinie divisibilité (Eq. (8.24)), qui ne s'applique malheureusement pas aux fluctuations de vitesse aux échelles dissipatives. Une autre façon de se rendre compte de la difficulté de prédire la forme des corrélations lorsque $l \leq \eta^-$ et $\Delta x \leq \eta^-$, c'est-à-dire à des échelles et des distances non inertielles (c.f. Section 3.3.1), est de raisonner dans le langage des singularités. En effet, la densité de probabilité $\mathbb{P}_{l,l}(h_1, h_2, \Delta x)$ (Eq. (8.35)) de deux exposants h_1 et $h2$, définis à l'échelle l, espacés de Δx, est difficile à généraliser aux échelles (l ou Δx) dissipatives car le spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h_1, h_2, \omega)$, dépend à la fois de l'échelle l et de la distance Δx.

Ce n'est que très récemment que les expérimentateurs sont parvenus à mesurer directement la vorticité[9] dans l'espace de Fourier [167, 168]. Nous avons vu que quantifier le

[9]La vorticité $\vec{\omega}(x, y, z)$ est le rotationnel de la vitesse. Sa transformée de Fourier $\vec{\omega}(\vec{k})$ est directement reliée à celle de la vitesse : $\vec{\omega}(\vec{k}) = \vec{k} \wedge \vec{u}(\vec{k})$.

phénomène d'intermittence dans l'espace de Fourier est difficile si l'on se réfère seulement au spectre de puissance (Section 3.7). Dans la référence [129], Brun et Pumir ont proposé alors d'étudier les statistiques du second ordre dans l'espace de Fourier, notamment la Flatness des spectres, $\langle|\tilde{u}(k)|^4\rangle/\langle|\tilde{u}(k)|^2\rangle^2$. Ainsi, en définissant la transformée de Fourier de la vitesse (Eq. (3.95)),

$$\tilde{u}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} u(x) dx \ , \tag{8.48}$$

il est alors possible de calculer [129] :

$$\langle|\tilde{u}(k)|^4\rangle = 2\langle|\tilde{u}(k)|^2\rangle^2 + \Xi(k) \tag{8.49}$$

où

$$\Xi(k) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 e^{-ik(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)} \langle u(x_1)u(x_2)u(x_3)u(x_4)\rangle_c \ . \tag{8.50}$$

$\langle u(x_1)u(x_2)u(x_3)u(x_4)\rangle_c$ est le cumulant de $\langle u(x_1)u(x_2)u(x_3)u(x_4)\rangle$ [129, 155] qui est relié de manière non triviale à la fonction de corrélation à 2 points $\mathcal{M}_{l_1,l_2}(q_1, q_2, \Delta x)$ (Eq. (8.7)) que nous pouvons calculer lorsque $\eta_K \ll l < \Delta x$. Toutefois, la mathématique liée aux statistiques de Fourier est difficile et nous ne savons pas, pour l'instant, lier précisément le coefficient d'intermittence c_2^E au comportement de la fonction $\Xi(k)$ en fonction du vecteur d'onde k. Toutefois, nous pouvons conclure des relations (8.49) et (8.50) que les corrélations à longue portée dans l'espace physique peuvent être à priori étudiées dans l'espace de Fourier au travers de l'estimateur spectral $\langle|\tilde{u}(k)|^4\rangle/\langle|\tilde{u}(k)|^2\rangle^2$.

Chapitre 9

De la synthèse de processus stochastiques corrélés à longue portée à la modélisation du caractère intermittent des fluctuations de vitesses Eulérienne et Lagrangienne

Dans le Chapitre 8, nous nous sommes attachés à définir certaines conditions que doit satisfaire une représentation de la variable aléatoire vitesse $u(x)$ dans le demi-plan espace-échelle[1] afin de reproduire le comportement caractéristique de la fonction d'auto-corrélation connexe (FAC) de la vitesse Eulérienne (Eq. (8.18)),

$$\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = \langle \ln|\delta_l u(x)| \ln|\delta_l u(x+\Delta x)| \rangle = -c_2^E \ln(\Delta x/L) \ , \tag{9.1}$$

observé aussi bien dans les expériences[2] que dans les DNS. Le point remarquable est que les données sont compatibles avec un comportement linéaire en fonction de $\ln(\Delta x/L)$ dont la pente est égale au coefficient d'intermittence c_2^E des fluctuations de vitesse. Cette observation n'est pas spécifique à la turbulence Eulérienne, puisque les fluctuations de vitesse Lagrangienne se comportent de la même manière, c'est-à-dire une FAC qui se comporte linéairement en fonction du logarithme de l'intervalle de temps Δt (Eq. (8.19)) :

$$\mathcal{C}_{\tau,\tau}(\Delta t) = \langle \ln|\delta_\tau v(t)| \ln|\delta_\tau v(t+\Delta t)| \rangle = -c_2^L \ln(\Delta t/T) \ , \tag{9.2}$$

où cette fois-ci c_2^L est le coefficient d'intermittence de la vitesse Lagrangienne. Dans ce chapitre, nous allons passer en revue un certain nombre de modèles proposés dans la littérature pour générer des signaux multifractals susceptibles de modéliser la nature intermittente des fluctuations de vitesse Eulérienne et de vitesse Lagrangienne.

[1] Il s'agit en fait de la variable aléatoire $\beta_l(x)$ (Fig. 8.2).

[2] Nous renvoyons le lecteur à la discussion de la Section 8.1.2 en ce qui concerne l'étude des profils spatiaux de vitesse obtenus sous l'hypothèse de Taylor [116].

9.1 Les cascades multiplicatives discrètes

Dans cette section, nous allons aborder le problème de la construction d'un processus stochastique synthétique discret $S(t_i)$, avec $i \in [1, 2^N]$, de longueur[3] temporelle $T = 2^N$, et qui soit tel que ses incréments à une échelle $\tau_j/T = 2^{-j}$ soient égaux à un produit de deux variables aléatoires indépendantes,

$$\delta_{\tau_j} S(t_i) = C_i^j = \beta_{\tau_j}(t_i)\delta \ , \tag{9.3}$$

où δ est par exemple une variable normale, de moyenne nulle et de variance σ^2. De manière générale, les ondelettes de Daubechies $\Phi((t-t_i)/\tau_j)$ [169], dont les facteurs de dilatation sont des puissances de 1/2, $\tau_j/T = 2^{-j}$, et les 2^j facteurs de translation correspondant à l'échelle j sont linéairement équi-échantillonnés, $t_i = i\tau_j$ avec $i \in [1, 2^j]$, constituent une famille de bases orthogonales usuelles de l'espace des fonctions (à temps continu) :

$$S(t) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{2^j} T_\Phi[t_i, \tau_j] \Phi\left(\frac{t-t_i}{\tau_j}\right) \ , \tag{9.4}$$

où les $T_\Phi[t_i, \tau_j]$ sont les coefficients en ondelettes du signal S (Annexe B). La famille des ondelettes "du pauvre", c'est-à-dire les incréments, ne constitue pas une famille d'ondelettes admissible pour former une base du demi-plan espace-échelle. Néanmoins, par souci de clarté et de simplicité, nous utiliserons cette famille d'ondelettes dans la suite de cette discussion, ce qui permettra d'assimiler les coefficients $T_\Phi[t_i, \tau_j]$ aux incréments du signal S sur une échelle τ_j, c'est-à-dire

$$T_\Phi[t_i, \tau_j] = C_i^j = \delta_{\tau_j} S(t_i) \ , \tag{9.5}$$

et de reconstruire le signal S en agrégeant ses incréments

$$S(t) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{2^j} C_i^j \Phi\left(\frac{t-t_i}{\tau_j}\right) \ , \tag{9.6}$$

où $\Phi\left(\frac{t-t_i}{\tau_j}\right)$ est l'incrément sur une échelle τ_j et centré sur t_i.

Nous voyons donc que construire une fonction revient à choisir l'ensemble des coefficients $\{T_\Phi[t_i, \tau_j]\}_{i,j}$, qui contiennent à eux seuls l'ensemble de l'information du signal S aux différentes échelles τ_j. Nous nous restreindrons ici au cas des signaux S de résolution finie, que nous décomposons par souci de simplicité sur les incréments (Eq. (9.6)). Dans ce cas, les fonctions de stucture du signal S, $\langle(\delta_{\tau_j} S)^q\rangle$, sont directement reliées aux statistiques des coefficients C_i^j à l'échelle τ_j :

$$\langle(\delta_{\tau_j} S)^q\rangle = \langle(C_i^j)^q\rangle \ . \tag{9.7}$$

[3] L'échelle T sera assimilée à l'échelle intégrale.

Il suffit alors de bien choisir les coefficients C_i^j de telle sorte que les fonctions de structure se comportent en loi de puissance d'exposant ζ_q^L :

$$\langle|\delta_{\tau_j} S|^q\rangle \sim \left(\frac{\tau_j}{T}\right)^{\zeta_q^L} \ . \tag{9.8}$$

En s'inspirant des études effectuées sur les fluctuations de vitesse Lagrangienne dans le Chapitre 4 (ou alternativement des résultats obtenus sur les fluctuations de vitesse Eulérienne dans le Chapitre 2), nous choisissons les coefficients C_i^j comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes, $C_i^j = \beta_{\tau_j}(t_i)\delta(t_i)$, où les $\delta(t_i)$ sont 2^j réalisations d'un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2, et $\beta_{\tau_j}(t_i)$ les 2^j réalisations d'un bruit positif, dont le logarithme a pour densité de probabilité le propagateur $G_{\tau_j}(\ln\beta_{\tau_j})$ (Section 4.3). Si l'on choisit pour propagateur de $\ln\beta_{\tau_j}$ une densité de probabilité Gaussienne (description log-normale) :

$$\mathcal{P}_{\beta_{\tau_j}}(\beta_{\tau_j})d\beta_{\tau_j} = G_{\tau_j}(\ln\beta_{\tau_j})d\ln\beta_{\tau_j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\tau_j}^2}}\exp\left[\frac{\left(\ln\beta_{\tau_j} - \mathrm{m}_{\tau_j}\right)^2}{2\sigma_{\tau_j}^2}\right] d\ln\beta_{\tau_j} \ , \tag{9.9}$$

où les paramètres m_{τ_j} et $\sigma_{\tau_j}^2$ définissent respectivement la moyenne et la variance de $\ln\beta_{\tau_j}$, alors les moments de la variable aléatoire β_{τ_j} se calculent simplement :

$$\langle(\beta_{\tau_j})^q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(\beta_{\tau_j})^q G_{\tau_j}(\ln\beta_{\tau_j})d\ln\beta_{\tau_j} = \exp\left[\frac{1}{2}q\left(q\sigma_{\tau_j}^2 + 2m_{\tau_j}\right)\right] \ . \tag{9.10}$$

Pour modéliser le comportement en loi de puissance des fonctions de structure, il suffit alors de choisir le jeu de paramètres suivant :

$$\begin{cases} m_{\tau_j} = c_1^L \ln(\tau_j/T) \ , \\ \sigma_{\tau_j}^2 = -c_2^L \ln(\tau_j/T) \ , \end{cases} \tag{9.11}$$

ce qui permet de calculer complètement les fonctions de structure,

$$\langle|\delta_{\tau_j} S|^q\rangle = \langle|C_i^j|^q\rangle = \langle|\delta|^q\rangle\langle(\beta_{\tau_j})^q\rangle = \sigma^q K_q \left(\frac{\tau_j}{T}\right)^{\zeta_q^L} \ , \tag{9.12}$$

où K_q est le moment d'ordre q d'une variable Gaussienne de variance unité (Eq. (2.37)) et ζ_q^L est le spectre d'exposants des fonctions de structure qui, sous l'hypothèse où le propagateur est Gaussien (Eq. (9.9)), est quadratique en q (Eq. (9.8)) :

$$\zeta_q^L = c_1^L q - c_2^L \frac{q^2}{2} \ . \tag{9.13}$$

A ce point, il est important de remarquer que si le signal $S(t)$ ainsi reconstruit à partir des coefficients C_i^j via la relation (9.6) reproduit les propriétés statistiques à un point de la vitesse Lagrangienne, il n'en est pas de même des statistiques à deux points. En effet,

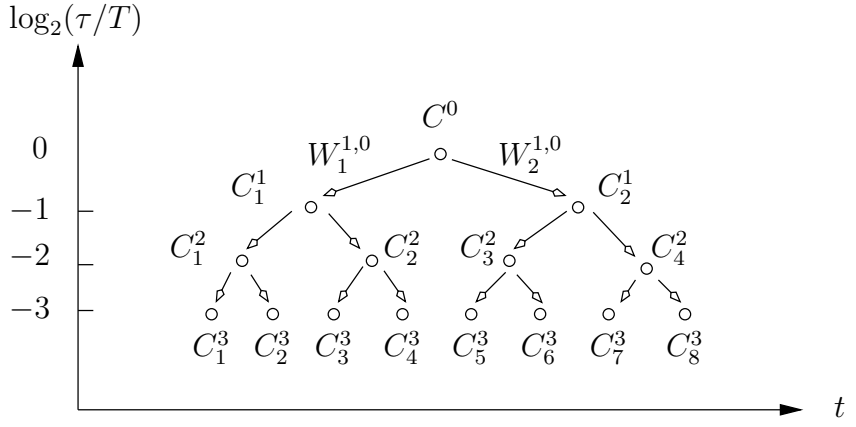

FIG. 9.1 – Représentation des coefficients C_i^j dans le demi-plan espace-échelle (t, τ) selon le modèle de cascade sur base orthogonale d'ondelettes [77–79].

il est facile de se convaincre que la FAC (Eq. (8.16)) est ici triviallement nulle car les coefficients C_i^j sont des variables aléatoires indépendantes. Il est donc nécessaire de rendre inter-dépendant les coefficients C_i^j dans le temps et les échelles de telle sorte que la FAC se comporte comme le logarithme de l'écart en temps (Eq. (8.19)) comme cela a été observé dans les expériences, comme dans les simulations numériques.

En s'inspirant des différents travaux concernant la synthèse de signaux multifractals sur des bases orthogonales d'ondelettes [77–79, 83, 98, 139, 140], nous allons admettre, en première approche, que les coefficients C_{2i}^{j+1} et C_{2i+1}^{j+1} à l'échelle τ_{j+1} ne dépendent exclusivement que d'un "ancêtre commun", qui n'est autre que le coefficient C_i^j à l'échelle τ_j immédiatement supérieure :

$$C_{2i}^{j+1} = W_{2i}^{j+1,j} C_i^j \quad \text{et} \quad C_{2i+1}^{j+1} = W_{2i+1}^{j+1,j} C_i^j \ , \tag{9.14}$$

où $W_{2i}^{j+1,j}$ et $W_{2i+1}^{j+1,j}$ sont des coefficients de proportionnalité positifs que nous considèrerons comme des réalisations d'une variable aléatoire. Cette hypothèse s'interprète géométriquement dans le demi-plan temps-échelle (t_i, τ_j) sous la forme d'une "cascade" que nous avons illustrée dans la figure 9.1. Appelons C^0 l'ancêtre commun à tous les coefficients C_i^N de l'échelle $\tau_N = T2^{-N}$. Il est élors évident de montrer que les coefficients à l'échelle τ_j s'expriment, de manière multiplicative, en fonction du coefficient C^0 :

$$C_i^j = C^0 \prod_{k=1}^{j} W_{i_k}^{k,k-1} \ , \tag{9.15}$$

où les i_k sont reliés par la relation $i_{k+1} = 2i_k$ ou $i_{k+1} = 2i_k + 1$, selon qu'à l'étape k de la cascade qui a conduit à C_i^j, la bifurcation s'est faite "à gauche" ou "à droite" (Fig. 9.1). La suite des $\{i_k\}$ représente donc le "trajet" dans le demi-plan temps-échelle conduisant à C_i^j

au cours du processus de cascade. La relation (9.15) peut être réécrite pour le logarithme des coefficients, le produit devenant alors une somme :

$$\ln |C_i^j| = \ln |C^0| + \sum_{k=1}^{j} \ln W_{i_k}^{k,k-1} \ . \tag{9.16}$$

Si l'on suppose que le coefficient à grande échelle C_0 est une variable aléatoire Gaussienne de variance unité et que les coefficients de propotionnalité $W_{i_k}^{k,k-1}$ sont des réalisations indépendantes d'une seule et même variable aléatoire W, de densité de probabilité $\mathcal{P}_W$, alors il est possible de calculer les fonctions de structure du signal S reconstruit via la relation (9.6) en utilisant[4] les coefficients C_i^j donnés par l'équation (9.15) [77] :

$$\langle |\delta_{\tau_j} S|^q \rangle = \langle |C^0|^q \rangle \langle W^q \rangle^j = K_q \left(\frac{\tau_j}{T} \right)^{-\log_2 \langle W^q \rangle} \ . \tag{9.17}$$

Il suffit alors de choisir pour W une statistique lognormale,

$$\mathcal{P}_W(W) dW = \mathcal{P}_{\ln W}(\ln W) d\ln W = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[\frac{(\ln W - \mathrm{m})^2}{2\sigma^2} \right] d\ln W \ , \tag{9.18}$$

de paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} m = c_1^L \ln 2 \ , \\ \sigma^2 = -c_2^L \ln 2 \ , \end{array} \right. \tag{9.19}$$

pour retrouver un spectre d'exposants ζ_q^L quadratique (Eq. (9.13)), en accord avec les observations expérimentales et numériques (Eq. (4.10)).

Intéressons-nous désormais aux statistiques à 2 points et proposons nous de calculer par exemple la FAC (Eq. (8.16)) du signal $S(t_i)$. Par construction, le signal $S(t_i)$ synthétisé par une cascade multiplicative sur une base d'ondelettes n'est pas stationnaire. En effet, si l'on choisit, à la plus petite échelle de la construction $\tau_N/T = 2^{-N}$, une paire de coefficients (C_i^N, C_{i+1}^N) espacés de $\tau_N = 1$, la covariance de leur logarithme va dépendre de la position de leur ancêtre commun et de la position temporelle de la paire (c'est-à-dire de la valeur de i). En effet, l'ancêtre commun de la paire (C_0^N, C_1^N) est le coefficient C_0^{N-1}, alors que l'ancêtre commun de la paire $(C_{2^{N-1}}^N, C_{2^{N-1}+1}^N)$ est C^0. Cette non-stationnarité est un inconvénient dû à l'utilisation des bases orthogonales d'ondelettes. Cependant, afin de pouvoir utiliser ce modèle pour rendre compte des propriétés de signaux expérimentaux, qui eux sont stationnaires, on peut en première approximation calculer la covariance du logarithme des coefficients en ondelettes comme si le signal était stationnaire, en assimilant la moyenne temporelle à la moyenne d'ensemble. Alors, en utilisant l'additivité des logarithmes (Eq. (9.16)), il est alors possible de calculer analytiquement la FAC du signal synthétisé $S(t)$ [77],

[4] Rappellons que la discrétisation en échelle est telle que $j = -\log_2(\tau_j/T)$.

en prenant en compte dans le calcul de dénombrement cette propriété de non-stationnarité, et en posant $\Delta t \rangle \tau_j$ l'intervalle de temps séparant deux coefficients :

$$\langle \ln |\delta_{\tau_j} S(t_i)| \ln |\delta_{\tau_j} S(t_i + \Delta t)| \rangle_c = -c_2^L \left[\ln \left(\frac{\Delta t}{T} \right) + 2 \ln 2 - 2 \frac{\Delta t}{T} \ln 2 \right] . \tag{9.20}$$

Ainsi, les signaux générés sur une base orthogonale d'ondelettes (Eq. (9.6)), de manière multiplicative (Eq. (9.15)), par le biais d'une variable aléatoire W log-normale, sont tels que (i) leur cumulant d'ordre 2 exhibe un comportement linéaire vis à vis de $\ln \tau_j$, de pente c_2^L, ce qui est une conséquence du comportement en loi de puissance des fonctions de structure (Eqs. (9.12) et (9.13)), et (ii) la FAC $C_{\tau_j,\tau_j}(\Delta t)$ (Eq. (9.20)) se comporte linéairement en fonction de $\ln(\Delta t/T)$, avec comme coefficient de proportionnalité $-c_2^L$, en cohérence avec l'observation expérimentale et numérique (Eq. (8.19)). Toutefois, les signaux ainsi générés sur des bases discrètes d'ondelettes sont non stationnaires, ce qui est un inconvénient majeur et qui est de plus à l'origine du fait que la FAC ne soit pas exactement égale à $-c_2^E \ln(\Delta t/T)$. Nous allons voir dans la suite comment construire un signal stochastique multifractal stationnaire, qui exhibe des propriétés d'invariance d'échelles continue, en abandonnant le caractère discret du demi-plan temps-échelle et en adoptant une méthode de type équation de Langevin : c'est le modèle de marche au hasard multifractale (MRW pour *Multifractal Random Walk*) introduit originellement par Bacry, Delour et Muzy [85, 139].

9.2 Synthèse de signaux intermittents basée sur une équation de Langevin

Nous avons vu dans la Section 9.1 qu'il était possible de synthétiser un signal intermittent par cascade aléatoire sur des bases discrètes d'ondelettes. Une autre stratégie permettant de construire un processus qui rend compte des statistiques à 1 et 2 points des fluctuations de la vitesse (Lagrangienne) des particules fluides dans un écoulement turbulent, consiste à s'inspirer d'une équation de type Langevin [170].

Plaçons nous à nouveau dans le cadre d'un processus temporel discret $S(t_i)$ de résolution temporelle θ ($t_i = i\theta$). Appellons dW un bruit aléatoire qui rend compte des propriétés statistiques des incréments à la plus petite échelle $\tau = \theta$:

$$\delta_\theta S(t_i) = dW(t_i) . \tag{9.21}$$

Dans la logique de notre approche, le bruit élémentaire dW va s'exprimer comme le produit de deux variables alétoires, dont l'une δ est Gaussienne, et l'autre, β_θ, va permettre par agrégation de modéliser la dépendance dans les échelles :

$$dW \equiv \beta_\theta \times \delta . \tag{9.22}$$

On remarque en effet que le signal $S(t_i)$ peut être reconstruit en agrégeant ses incréments à l'échelle de résolution θ (Eq. (9.21)) :

$$S(t_i) = \sum_{n=0}^{i} \delta_\theta S(t_n) = \sum_{n=0}^{i} dW(t_n), \tag{9.23}$$

où l'on a fixé par souci de simplicité et sans perte de généralité, $S(t_0) = 0$.

9.2.1 Le mouvement Brownien

Examinons pour commencer le cas où le bruit dW est un bruit blanc, décorrélé en temps :

$$dW(t) \equiv \mathcal{N}(0, \theta\sigma^2) \quad \text{et} \quad \langle dW(t)dW(t')\rangle = \delta_{t,t'}\theta\sigma^2 \ , \tag{9.24}$$

où $\delta_{t,t'} = 0$ si $t \neq t'$ et $\delta_{t,t} = 1$. Le signal S reconstruit via la relation d'agrégation (9.23) est bien connu sous le nom de mouvement Brownien. En définissant l'échelle $\tau_j = j\theta$, il est possible de calculer les fonctions de structure[5] : $\langle(\delta_{\tau_j}S)^{2q}\rangle = \langle S(\tau_j)^{2q}\rangle$ puisque $S(0) = 0$. On obtient alors [139] :

$$\langle S(\tau_j)^{2q}\rangle = \sum_{k_1=1}^{j} ... \sum_{k_{2q}=1}^{j} \langle \prod_{i=k_1}^{k_{2q}} dW(t_i)\rangle \ . \tag{9.25}$$

En remarquant que le bruit dW est décorrélé en temps (Eq. (9.24)) et que ses moments impairs sont nuls, on peut simplifier[6] l'équation (9.25) :

$$\langle S(\tau_j)^{2q}\rangle = \frac{1}{2^q q!} \sum_{\mathcal{S}\in S_{2q}} \sum_{k_1=1}^{j} ... \sum_{k_{2q}=1}^{j} \prod_{i=1}^{q} \langle dW(k_{\mathcal{S}(2i-1)})dW(k_{\mathcal{S}(2i)})\rangle \ , \tag{9.26}$$

où S_{2q} est l'ensemble des permutations de $\{1, ..., 2q\}$, de cardinal $(2q)!$. En utilisant la propriété de décorrélation temporelle de dW (Eq. (9.24)), c'est-à-dire

$$\langle dW(k_{\mathcal{S}(2i-1)})dW(k_{\mathcal{S}(2i)})\rangle = \theta\sigma^2\delta_{k_{\mathcal{S}(2i-1)},k_{\mathcal{S}(2i)}} \ , \tag{9.27}$$

on montre alors que :

$$\langle S(\tau_j)^{2q}\rangle = \frac{\sigma^{2q}}{2^q q!} \sum_{\mathcal{S}\in S_{2q}} \sum_{k_1=1}^{j} ... \sum_{k_q=1}^{j} 1 = \frac{\sigma^{2q}(2q)!}{2^q q!} j^q \ . \tag{9.28}$$

Nous venons donc de vérifier théoriquement que le mouvement Brownien fait partie de la classe des processus monofractals : ses fonctions de structure se comportent en loi de puissance,

$$\langle S(\tau_j)^{2q}\rangle = \langle(\delta_{\tau_j}S)^{2q}\rangle = \frac{\sigma^{2q}(2q)!}{2^q q!}\left(\frac{\tau_j}{\theta}\right)^q = \sigma^{2q}K_q\left(\frac{\tau_j}{\theta}\right)^{\zeta_{2q}} \ , \tag{9.29}$$

[5] Il est évident de montrer que les moments impairs sont nuls $\langle(\delta_{\tau_j}S)^{2q+1}\rangle = 0$ puisque leur densité de probabilité est symétrique.

[6] Il s'agit là d'une simple application du théoreme de Wick [139, 171].

avec un spectre d'exposants linéaire

$$\zeta_q = q/2 \ . \tag{9.30}$$

L'équation (9.29) permet facilement de calculer les deux premiers cumulants du logarithme des incréments du signal S (Eq. (D.7)), $\forall \tau$:

$$C_{1,\delta_\tau S} = \langle \ln |\delta_\tau S| \rangle = -\frac{1}{2}(\ln 2 + \gamma) + \ln \sigma + \frac{1}{2} \ln(\tau/\theta) \ , \tag{9.31}$$

où γ est la constante d'Euler et

$$C_{2,\delta_\tau S} = \mathrm{Var}[\ln |\delta_\tau S|] = \frac{\pi^2}{8} \ . \tag{9.32}$$

De la même manière, il est évident de montrer que la FAC $C_{\tau,\tau}(\Delta t)$ est indentiquement nulle, car les incréments de S sont décorrélés :

$$C_{\tau,\tau}(\Delta t) = \langle \ln |\delta_\tau S(t)| \ln |\delta_\tau S(t + \Delta t| \rangle_c = 0 \ . \tag{9.33}$$

Remarquons que la conclusion sur la nature monofractale du mouvement Brownien est évidente car la densité de probabilité des incréments à toutes les échelles est Gaussienne. En effet, l'incrément à une échelle τ_j est l'agrégation des incréments à l'échelle θ, qui sont eux mêmes Gaussiens. La densité Gaussienne étant stable par convolution[7], l'incrément à une échelle τ_j reste Gaussienne. La relation (9.29) montre aussi clairement que le signal S ainsi construit n'est pas stationnaire puisque sa variance dépend du temps τ_j. Afin de le rendre stationnaire, ce qui est effectivement observé expérimentalement pour la vitesse Lagrangienne, il suffit alors de rajouter dans l'équation de Langevin (Eq. (9.21)) une force de rappel où l'échelle intégrale T est assimilée à l'échelle de décorrélation, ce qui permet de réécrire cette équation de la manière suivante :

$$\delta_\theta S(t_i) = -\frac{\theta}{T} S(t_i) + dW(t_i) \ . \tag{9.34}$$

Nous avons représenté dans la figure 9.2(a) une réalisation d'un mouvement Brownien stationnaire, généré à partir de l'équation (9.34), ainsi que le calcul du cumulant d'ordre 1, $C_1 = C_{1,\delta_\tau S}$ (Fig. (9.2(b))), et du cumulant d'ordre 2, $C_2 = C_{2,\delta_\tau S} - \pi^2/8$ (Fig. (9.2(c))). Nous avons aussi représenté pour comparaison sur la figure (9.2(c)) le calcul de la FAC (Eq. (9.33)). Les calculs numériques confirment bien que la FAC et C_2 sont identiquement nuls, ce qui est une propriété générale des signaux monofractals. Remarquons que la force de rappel présente dans l'équation de Langevin (9.34) permet à C_1 de saturer à l'échelle T, la relation (9.31) montrant que sans ce terme, le signal S exhiberait une invariance d'échelle sur un intervalle de temps infiniment grand $\tau \geq \theta$.

[7] La densité de probabilité d'une somme de variables indépendantes est la convolution de leurs densités de probabilité.

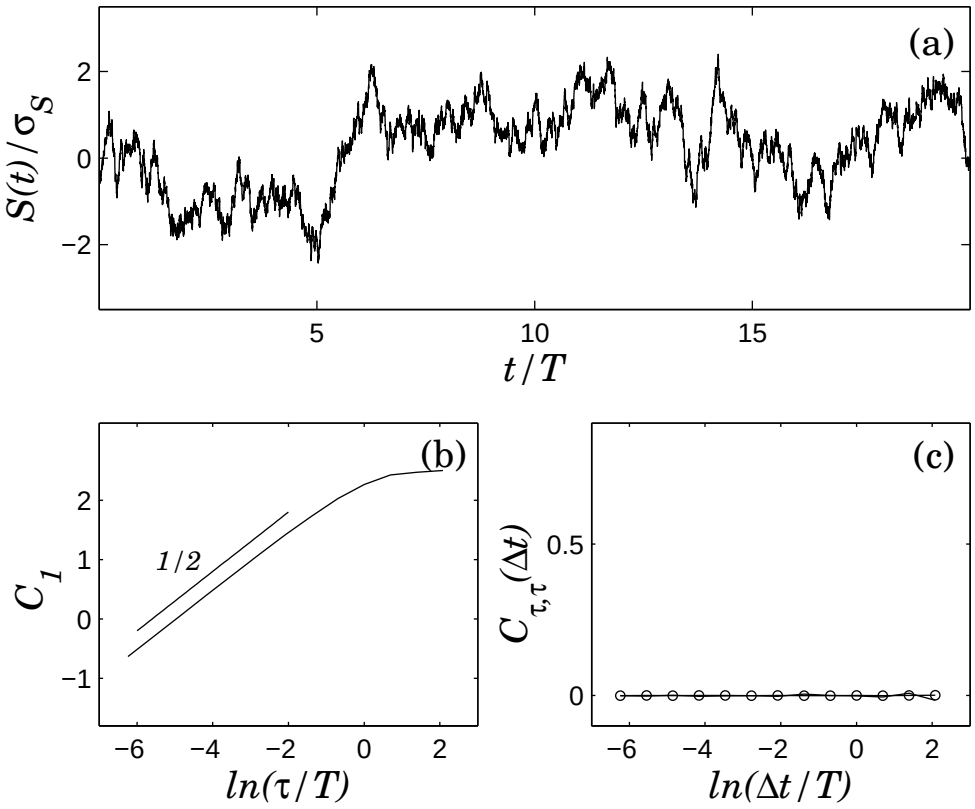

FIG. 9.2 – Etude statistique du mouvement Brownien stationnaire, généré via l'équation de Langevin (Eq. (9.34)), avec une force de rappel $-\theta/T$ et un bruit dW Gaussien. (a) Représentation d'une réalisation du mouvement Brownien normalisé par sa variance $\sigma_S^2 = \mathrm{Var}(S)$. (b) $C_1 = \langle \ln(\delta_\tau S) \rangle$ en fonction de $\ln(\tau/T)$. (c) ($\circ$) $C_{\tau,\tau}(\Delta t)$ en fonction de $\ln(\Delta t/T)$; nous avons superposé en trait continu pour comparaison $C_2 = \mathrm{Var}[\ln(\delta_\tau S)] - \pi^2/8$ en fonction de $\ln(\tau/T)$. Les moyennes statistiques sont effectuées sur un échantillon de longueur $12800T$.

9.2.2 Marche aléatoire multifractale (MRW)

Nous constatons donc que le cumulant d'ordre 2 estimé à partir des réalisations d'un mouvement Brownien (Eq. (9.32)) ne dépend pas de l'échelle τ et garde une valeur constante égale à $\pi^2/8$. Plus précisemment, les densités de probabilité des incréments de vitesse sont Gaussiennes quelle que soit l'échelle. Dans la Section 4.2, nous avons mis en évidence le caractère intermittent et la nature multifractale des fluctuations de vitesse Lagrangienne, une phénomène absent dans le mouvement Brownien. Dans la Section 8.1, nous avons mis en évidence l'existence de corrélations à longue portée dans ces fluctuations qui nous apparait indissociable du phénomène d'intermittence (Eq. (8.19)). En effet, la FAC (Eq. (8.16)) des incréments de vitesse Lagrangienne exhibe un comportement logarithmique avec l'échelle, dont le coefficient de proportionnalité n'est autre que le coefficient d'intermittence c_2^L des fluctuations de vitesse dans un cadre log-normal.

L'équation de Langevin (Eq. (9.21)) nous a permis de réaliser qu'un signal peut être reconstruit par agrégation à partir de ses incréments à l'échelle de résolution θ. Bacry, Delour et Muzy [85, 139] ont montré qu'il suffit d'imposer au bruit $dW(t_i)$ une structure corrélée à longue portée pour que le signal ainsi reconstruit soit (i) multifractal et (ii) que la FAC des incréments du signal S exhibe bien, à toutes les échelles $\tau_i < \Delta t$, un comportement logarithmique gouverné par le coefficient d'intermittence c_2^L :

$$\langle \ln |\delta_{\tau_j} S(t_i)| \ln |\delta_{\tau_j} S(t_i + \Delta t)| \rangle_c = -c_2^L \ln \left(\frac{\Delta t}{T} \right) \ , \tag{9.35}$$

généralisant ainsi le mouvement Brownien à une marche aléatoire multifractale (MRW). Pour cela, réécrivons le bruit "élémentaire" dW comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes :

$$dW(t_i) = \beta_\theta(t_i) \times \delta(t_i) \ , \tag{9.36}$$

où δ est un bruit Gaussien et β_θ une variable aléatoire positive, qui peut être interprétée comme un écart-type stochastique de la variable Gaussienne δ. Cette variable étant positive, elle peut être réécrite sous forme exponentielle,

$$\beta_\theta = \exp(\omega) \ , \tag{9.37}$$

où ω est une variable aléatoire signée. Avec comme objectif de modéliser les corrélations à longue portée observées dans les signaux financiers, Bacry *et al.* [85] ont proposé la forme suivante pour la fonction de corrélation de ω :

$$\langle \omega_\theta[t_i] \omega_\theta[t_j] \rangle_c = -c_2^L \ln \rho_\theta[t_i - t_j] \ , \tag{9.38}$$

où

$$\rho_\theta(k) = \begin{cases} \frac{(|k|+1)\theta}{T} & \text{pour } |k| \leq \frac{T}{\theta} - 1 \ , \\ 1 & \text{sinon} \ . \end{cases} \tag{9.39}$$

Nous avons représenté dans la figure 9.3(a) une réalisation de la marche aléatoire multifractale (MRW) stationnaire, générée à partir des équations (9.34), (9.36), (9.37), (9.38) et (9.39)). Le calcul du cumulant d'ordre 1, $C_1 = C_{1,\delta_\tau S}$ dans la figure 9.3(b), montre que la force de rappel présente dans l'équation de Langevin (9.34) permet à C_1 de saturer à l'échelle T. Le calcul du cumulant d'ordre 2, $C_2 = C_{2,\delta_\tau S} - \pi^2/8$, dans la figure 9.3(c), révèle que C_2 dépend désormais de l'échelle τ. De même, la FAC (Fig. 9.3(c)) dépend désormais de Δt de façon logarithmique comme observé pour les signaux expérimentaux et numériques de vitesse Lagrangienne [29]. En fait, on constate sur la figure 9.3(c) que lorsqu'on représente la FAC en fonction de $\ln(\Delta t/T)$ et le cumulant d'ordre 2, C_2 en fonction de $\ln(\tau/T)$, ces deux quantités se comportent bien linéairement dans la gamme $\tau < \Delta t < T$, avec une même pente donnée par $-c_2^L$. Toutefois, nous constatons que C_2 et la FAC ne coincident pas exactement dans la mesure où un décalage vertical existe entre ces deux quantités qui n'est pas un effet de résolution θ finie. En effet, en suivant les auteurs des

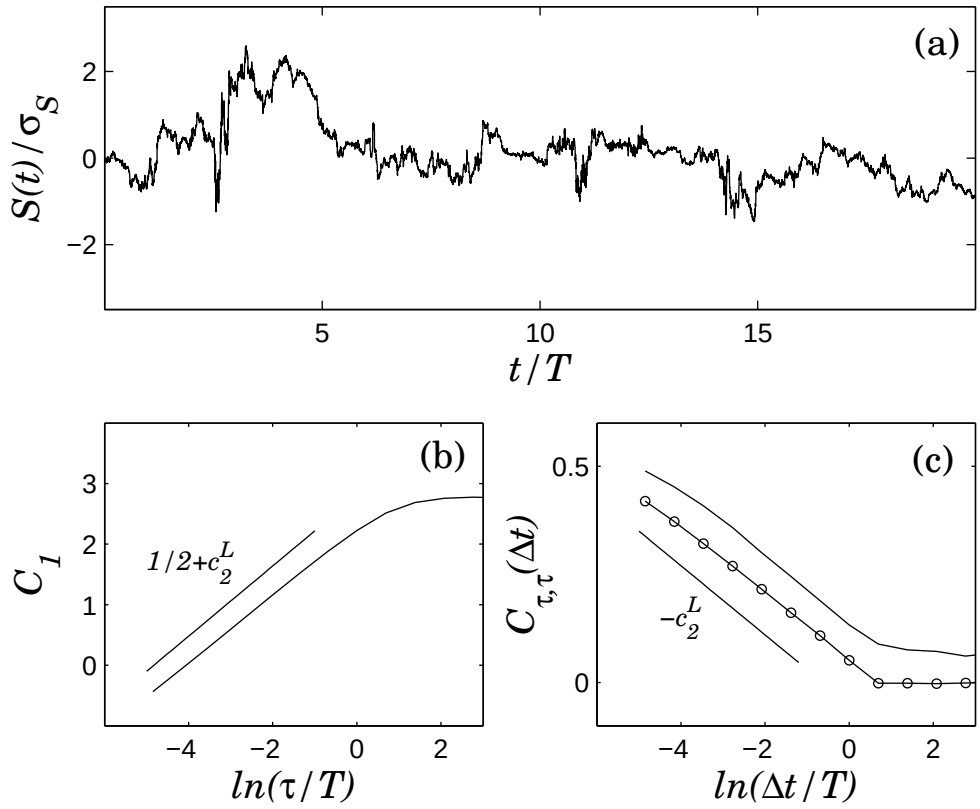

FIG. 9.3 – Etude statistique du modèle MRW stationnaire [29, 85], généré via l'équation de Langevin (Eq. (9.34)), avec une force de rappel $-\theta/T$ et un bruit dW corrélé à longue portée (Eqs. (9.36), (9.37), (9.38) et (9.39)) de paramètre $c_2^L = 0.08$ (Eq. (9.39)). (a) Représentation d'une réalisation de cette marche aléatoire multifractale. (b) $C_1 = \langle \ln(\delta_\tau S) \rangle$ en fonction de $\ln(\tau/T)$. (c) ($\circ$) $C_{\tau,\tau}(\Delta t)$ en fonction de $\ln(\Delta t/T)$ pour une échelle τ ; nous avons superposé en trait continu $C_2 = \mathrm{Var}[\ln(\delta_\tau S)] - \pi^2/8$ en fonction de $\ln(\tau/T)$. Les moyennes statistiques ont été effectuées sur un échantillon de longueur $12800T$.

références [85, 139], on peut montrer qu'à la limite d'une résolution infinie ($\theta \to 0$), le signal S défini de la manière suivante :

$$S(t) = \lim_{\theta \to 0} \sum_{i=1}^{t/\theta} \sigma \sqrt{\theta} e^{\omega_\theta(t_i)} \delta(t_i) \ , \tag{9.40}$$

est multifractal, dans la mesure où ses fonctions de structure se comportent exactement en loi de puissance

$$\langle |\delta_\tau S|^{2p} \rangle = \sigma^{2p} K_{2p} f(c_2^L, p) \Big(\frac{\tau}{T} \Big)^{\zeta_{2p}} \ , \forall \tau \leq T \tag{9.41}$$

avec un spectre d'exposants quadratique caractéristique d'une statistique log-normale

$$\zeta_p = \left(\frac{1}{2} + c_2^L\right) p - c_2^L \frac{p^2}{2} \ , \tag{9.42}$$

et où

$$f(c_2^L, p) = T^p \prod_{j=0}^{p-1} \frac{\Gamma(1 - 2c_2^L - 2c_2^L j)\Gamma(1 - 2c_2^L j)^2}{\Gamma(1 - 2c_2^L)\Gamma(2 - 2c_2^L(p + j - 1))} \ . \tag{9.43}$$

De plus, il est aussi possible de calculer la FAC dans la limite $\tau \ll \Delta t$:

$$C_{\tau,\tau}(\Delta t) \underset{\tau \ll \Delta t}{=} -c_2^L \ln(\Delta t/T) \ . \tag{9.44}$$

Le calcul des cumulants du logarithme des incréments découle du calcul des fonctions de structure (Eq. (9.41)). On trouve, en effectuant un développement limité de la fonction $f(c_2^L, p)$ (Eq. (9.43)) dans la limite $c_2^L \to 0$:

$$C_{1,\delta_\tau S} = -\frac{1}{2}(\ln 2 + \gamma) + \ln\sigma + \frac{1}{2}\ln T - \frac{3}{2}c_2^L + (\frac{13}{6} - \frac{4}{9}\pi^2)(c_2^L)^2 + (\frac{1}{2} + c_2^L)\ln(\tau/T) + o((c_2^L)^2) \ , \tag{9.45}$$

et

$$C_{2,\delta_\tau S} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{2}c_2^L + \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{9}{2}\right)(c_2^L)^2 - c_2^L \ln(\tau/T) + o((c_2^L)^2) \ , \tag{9.46}$$

confirmant ainsi la présence d'une constante additive dans C_2 qui n'existe pas dans la FAC ce qui explique que $C_{2,\delta_\tau S}$ et la FAC ne coincident pas comme nous l'avons observé dans la figure 9.3(c). Ainsi, par rapport à un modèle multiplicatif sur une base orthogonale d'ondelettes (Section 9.1), le modèle MRW permet de rendre compte des propriétés d'invariance d'échelle continue, mais l'incrément du signal S à l'échelle intégrale n'est malheureusement pas Gaussien. Comme observé dans les expériences, au jour d'aujourd'hui, nous n'avons pas réussi à construire un processus stochastique multifractal qui soit tel que $C_{2,\delta_\tau S}$ et la FAC coincident exactement. Toutefois, le modèle MRW montre de façon très claire que les corrélations à longue portée suffisent à expliquer la multifractalité, le contraire n'étant pas vrai puisque il existe des signaux multifractals qui soient tels que les fonctions de structure se comportent en loi de puissance avec un spectre d'exposant ζ_q non linéaire mais dont la FAC est identiquement nulle (Section 9.1) [172]. Le modèle MRW apparait donc comme une première modélisation log-normale des signaux de vitesse Lagrangienne [29, 31]. Il est possible de généraliser le modèle MRW à un spectre ζ_p non parabolique : ce sont les modèles de cascade log-infiniment divisible qui sont l'objet d'un interêt croissant dans la littérature [86–89, 91, 138, 139].

9.2.3 Modélisation de l'accélération Lagrangienne par une équation de Langevin généralisée

Dans la limite de résolution infinie, $\theta \to 0$, l'équation de Langevin discrète (Eq. (9.34)) devient une équation de Langevin d'un processus continu :

$$\partial_t S = -\gamma S(t) + \sigma L(t) \ , \tag{9.47}$$

où L est un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance unité, et $\gamma = 1/T$ un coefficient de frottement ("drift"). On peut alors montrer que le processus S est stationnaire et que sa densité de probabilité $\mathcal{P}_S(S)$ est l'unique solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck associée [170] :

$$\partial_t P(S,t) = \partial_S[-\gamma S + \sigma^2 \partial_S] P(S,t) \ . \tag{9.48}$$

On obtient ainsi :

$$\mathcal{P}_S(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/\gamma}} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2/\gamma}\right) \ . \tag{9.49}$$

De manière générale, si l'on appelle β le rapport des coefficients γ et σ^2 :

$$\beta = \frac{\gamma}{\sigma^2} > 0 \ , \tag{9.50}$$

il est possible de montrer que la densité de probabilité de S conditionné à β, $\mathcal{P}(S|\beta)$:

$$\mathcal{P}(S|\beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left(-\beta\frac{S^2}{2}\right) \ , \tag{9.51}$$

est l'unique solution de l'équation de Fokker-Planck associé à l'équation de Langevin (Eq. (9.47)). Ainsi la densité de probabilité (non conditionnée) de S s'exprime en fonction de $\mathcal{P}(S|\beta)$ et de la densité de probabilité $\mathcal{F}(\beta)$ du coefficient β qui est désormais libre de fluctuer :

$$\mathcal{P}_S(S) = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}(S|\beta)\mathcal{F}(\beta) d\beta \ , \tag{9.52}$$

Dans la littérature, l'équation de Langevin a été beaucoup utilisée pour modéliser les statistiques de l'accélération en turbulence Lagrangienne. Nous renvoyons le lecteur à la référence [128] pour une revue détaillée des différents modèles existants. Brièvement, le modèle consistant à laisser libre de fluctuer la variable β porte le nom de *Superstatistics* [119, 120, 173]. Ainsi, si β est une variable[8] du χ_2 d'ordre n, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(\beta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2\beta_0}\right)^{n/2} \beta^{n/2-1} \exp\left[-\frac{n\beta}{2\beta_0}\right] \ , \tag{9.53}$$

[8]La variable du χ_2 d'ordre n peut être interprétée comme une somme de n Gaussiennes indépendantes.

alors le calcul de la densité de probabilité de l'accélération a ($\equiv S$) conduit à la forme particulière :

$$\mathcal{P}_a(a) \propto \frac{1}{(a^2 + n/\beta_0)^{(n+1)/2}} \ , \tag{9.54}$$

dérivée indépendemment par Tsallis dans son formalisme de mécanique statistique non extensive [174]. Remarquons que Beck [120] est parvenu à décrire de manière quantitative les densités de l'accélération mesurée par le groupe de Cornell [26] en imposant à la variable aléatoire β d'être distribuée de manière log-normale. A notre connaissance, ces études ne concernent que les statistiques à 1 point de l'accélération, c'est-à-dire sa densité de probabilité, et aucun test de la validité de ces modèles à rendre compte des statistiques à 2 points n'a été effectué ce qui limite la portée de ces études.

Sixième partie

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous nous sommes attachés à généraliser le formalisme multifractal de Parisi et Frisch [45] et l'approche du propagateur de Castaing et collaborateurs [9, 92–99] aux échelles dissipatives, permettant ainsi une compréhension profonde de l'évolution des statistiques des incréments de vitesse Eulérienne $\delta_l u$, à travers les échelles, depuis le domaine dissipatif profond ($l \ll \eta_K$) jusqu'à l'échelle intégrale L, en passant par le domaine inertiel ($\eta_K \ll l \ll L$) dans lequel les fonctions de structure exhibent des lois de puissance anormales, $\langle|\delta_l u|^q\rangle \sim l^{\zeta_q^E}$, où le spectre d'exposants ζ_q^E est non-linéaire. Cette étude nous a permis de décrire, dans un cadre unifié, les fluctuations de vitesse Eulérienne montrant qu'une seule et même fonction paramétrique, $\mathcal{D}^E(h)$, permet de reproduire l'ensemble des statistiques à 1 point exhibées par les signaux expérimentaux et numériques de turbulence Eulérienne, à savoir les fonctions de structure ($\langle|\delta_l u|^q\rangle$), les cumulants du logarithme des incréments de vitesse ($C_{n,\delta_l u}$), le spectre de puissance ($E(k)$), et plus généralement, les densités de probabilité des incréments de vitesse à une échelle l ($\mathcal{P}(|\delta_l u|)$). Nous avons montré que l'évolution à travers les échelles de cette densité de probabilité ne dépend que du nombre de Reynolds $\mathbb{R}_e$ et d'une fonction $\mathcal{D}^E(h)$, qui acquiert le statut mathématique de spectre des singularités dans la limite des nombres de Reynolds infiniment élevés. Nous avons indiqué comment généraliser cette étude aux statistiques des incréments signés, et nous avons réussi à dériver la densité de probabilité des incréments de vitesse signés, $\mathcal{P}(\delta_l u)$, qui nous a permis de rendre compte du phénomène de Skewness [1–3, 100–103] observé dans les expériences et les simulations. Pour arriver à ce résultat, nous avons montré que le phénomène de Skewness est intimement lié à l'étendue du domaine inertiel, puisque la valeur du facteur d'asymétrie dans ce domaine d'échelles fait intervenir un nombre de Reynolds critique $\mathbb{R}^* = 56$, qui délimite l'étendue du domaine inertiel, et définit l'échelle dissipative de Kolmogorov, $\eta_K = L(\mathbb{R}_e/\mathbb{R}^*)^{-3/4}$. Nous avons pu ainsi montrer qu'un modèle quadratique pour $\mathcal{D}^E(h)$, ou de manière équivalente un modèle quadratique pour ζ_q^E compatible avec la description log-normale originale de Kolmogorov et Obukhov (KO62) [43, 44], rend compte de manière quantitative du comportement dans les échelles des fluctuations de vitesse Eulérienne.

En s'inspirant de l'étude des signaux de vitesse Eulérienne, nous avons, de la même manière, réussi à décrire dans un formalisme unificateur, les statistiques à 1 point exhibées par les signaux expérimentaux et numériques de vitesse Lagrangienne [106]. Nous avons pu ainsi montrer qu'une unique fonction paramétrique, $\mathcal{D}^L(h)$, permet de décrire de manière quantitative les fluctuations de vitesse Lagrangienne, depuis les échelles dissipatives profondes où l'incrément de vitesse dépend de manière triviale de l'échelle, $\delta_\tau v(t) = \tau a(t)$, a étant l'accélération d'une particule fluide, jusqu'à l'échelle intégrale T, en passant par les échelles inertielles pour lesquelles les fonctions de structure exhibent des comportements en loi de puissance anormaux, $\langle|\delta_\tau v|^q\rangle \sim \tau^{\zeta_q^L}$, correctement approximés par un modèle log-normal quadratique pour le spectre d'exposants ζ_q^L. Nous avons remarqué que le spectre $\mathcal{D}^L(h)$ obtenu s'étale jusqu'à des valeurs de l'exposant h de l'ordre de l'unité, ce qui remet en cause l'utilisation des incréments d'ordre 1 qui ne sont pas adaptés pour détecter et caractériser des exposants $h \geq 1$. Nous avons dû ainsi généraliser notre étude aux statistiques des incréments d'ordre N qui donnent accès à tous les exposants $h < N$ et nous sommes

arrivés à la conclusion que l'utilisation des incréments d'ordre $N \geq 2$ est nécessaire pour l'analyse multifractale des signaux de vitesse Lagrangienne.

Suite aux travaux de Tennekes, Lumley [2] et de Borgas [108], nous nous sommes attachés ensuite à établir un lien statistique entre les fluctuations de vitesse Eulérienne et de vitesse Lagrangienne. Nous avons ainsi réussi à établir que les spectres de singularités de la vitesse Eulérienne $\mathcal{D}^E(h)$ et de la vitesse Lagrangienne $\mathcal{D}^L(h)$ sont reliés via une équation non linéaire, qui implique qu'un modèle log-normal quadratique ne peut être pertinent à la fois pour le spectre $\mathcal{D}^L(h)$ et le spectre $\mathcal{D}^E(h)$. Nous avons comparé les estimations expérimentales et numériques du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ aux prédictions théoriques obtenues lorsqu'on applique cette transformation à un spectre $\mathcal{D}^E(h)$ quadratique dans la description log-normale KO62 [43, 44] ainsi qu'au spectre $\mathcal{D}^E(h)$ prédit par le modèle de Shé-Lévêque [51]. Nous avons pû constater que si la partie croissante du spectre $\mathcal{D}^L(h)$ est correctement reproduite par cette transformation, par contre la partie décroissante dévie significativement de notre estimation expérimentale et numérique du spectre $\mathcal{D}^L(h)$, révélant par là que des singularités $h > 1$ sont probablement présentes dans les signaux de vitesse Lagrangienne. Nous avons fait remarquer que notre méthodologie basée sur la modélisation des incréments d'ordre N estimés en effectuant les moyennes sur l'ensemble de leur valeur ne nous permet pas d'accéder à la partie décroissante du spectre $\mathcal{D}^L(h)$. Une étude complémentaire des signaux de vitesse Lagrangienne avec la méthode MMTO apparaît donc nécessaire [112–115]. Cette méthode a été spécialement conçue pour mesurer la partie décroissante des spectres des singularités $\mathcal{D}(h)$. Toutefois, elle nécessite un domaine inertiel étendu et des statistiques importantes, deux conditions qui ne sont pas remplies par les signaux expérimentaux et numériques actuellement disponibles.

Dans une dernière partie, nous avons étendu notre étude aux statistiques d'ordre supérieur dans le domaine inertiel. L'analyse des signaux de vitesses Eulérienne et Lagrangienne exhibent des corrélations à longue portée, jusqu'à des distances très supérieures à l'échelle dissipative. Suite aux travaux précurseurs de Cates et Deutsch [72], Meneveau et Chhabra [73] et Arneodo et collaborateurs [77–79], nous avons montré qu'un modèle hiérarchique de cascade dans le demi-plan espace-échelle, permet de rendre compte de la décroissance logarithmique de la fonction d'auto-corrélation connexe observée expérimentalement. Nous avons ensuite fait le lien entre la notion de cascade et le formalisme multifractal, et nous avons montré que le spectre des singularités généralisé à deux exposants h_1 et h_2 espacés d'une certaine distance Δx dans l'espace physique (ou d'un certain temps Δt), s'exprime directement en fonction du spectre des singularités des fluctuations de vitesse $\mathcal{D}^E(h)$ (ou $\mathcal{D}^L(h)$). Nous avons enfin présenté les récentes tentatives de construction de processus aléatoires multifractals à invariance continue d'échelle, en essayant de discuter leur pertinence à modéliser les statistiques des fluctuations de vitesse le long des trajectoires de particules Lagrangiennes.

La conclusion principale de ce manuscrit de thèse réside dans la mise en évidence de l'universalité des très petites échelles de la turbulence, c'est-à-dire les échelles dissipatives.

En cohérence avec les travaux de Nelkin [67], nous avons montré que l'information sur les statistiques des fluctuations de vitesse dans le domaine inertiel, qui est contenue dans le spectre des singularités, est omniprésente dans le domaine dissipatif sous une forme non triviale mais néanmoins accessible. C'est une étude expérimentale et numériques spécialement dédiée aux très petites échelles, qui devrait permettre d'approfondir notre compréhension de la physique de la turbulence pleinement développée.

Annexe A

De l'existence d'une échelle intégrale pour les fonctions multifractales

Nous reprenons ici une démonstration schématique basée sur l'inégalité fondamentale de Hölder [175] présente dans la thèse de Delour [139] et qui montre qu'une fonction $u(x)$ (par exemple la vitesse !) ne peut être multifractale que dans un domaine borné (inférieurement ou supérieurement) d'échelles. Nous définirons une fonction multifractale, toute fonction telle que ses fonctions de structure se comportent en loi de puissance :

$$M_q(l) = \langle |u(x+l) - u(x)|^q \rangle = K_q \left(\frac{l}{L} \right)^{\zeta_q} , \tag{A.1}$$

où L une constante qui adimensionnalise l'argument de la loi de puissance, K_q et ζ_q des fonctions de q seulement (indépendantes de l et L). L'inégalité de Hölder impose que, $\forall l > 0$, $M_q(l)$ est une fonction convexe[1] de q, en particulier $M_q(L) = K_q$. La convexité se traduit par la positivité des dérivées secondes en fonction de q. Ainsi, en notant $'$ la dérivée par rapport à q,

$$\forall q \ , \ [\ln M_q(l)]'' = \zeta_q'' \ln \frac{l}{L} + [\ln K_q]'' \geq 0 \ . \tag{A.2}$$

Dans un cadre multifractal, la dérivée seconde de ζ_q est non nulle, et on obtient

$$l \leq L \min_q \exp\left(-\frac{[\ln K_q]''}{\zeta_q''} \right) \text{ si } \zeta_q'' < 0 \text{ ou } l \geq L \max_q \exp\left(-\frac{[\ln K_q]''}{\zeta_q''} \right) \text{ si } \zeta_q'' > 0 \ , \tag{A.3}$$

ce qui donne la limite de validité de la relation (A.1). Dans le cadre log-normal du modèle **KO62** [43, 44], $\zeta_q'' = -c_2 < 0$, et K_q est le moment d'ordre q d'une Gaussienne[2] (Eq. (2.37)) ; d'après l'équation (A.3) cela implique que la fonction u ne peut être multifractale que pour des échelles $l \leq L$.

[1] Cet argument s'applique aussi à $\ln(M_q(l))$ puisque le logarithme est une fonction strictement croissante.

[2] La relation (2.37) permet de démonter que

$$[\ln K_q]'' \underset{q \to +\infty}{=} \frac{1}{2q} \ \Rightarrow \ \min_q [\ln K_q]'' = 0 \ .$$

Annexe B

Transformation en ondelettes

Nous proposons dans ce chapitre de faire une présentation très rapide de la transformée en ondelettes, qui est un domaine très riche et vivant des mathématiques et du traitement du signal [98, 112, 115, 169, 176–180]. La transformée en ondelettes a été introduite au début des années 80 par deux chercheurs français, Morlet et Grossmann [181–184]. Intéressés par l'étude de signaux sismiques intervenant dans la recherche pétrolière, ils réalisent que les décompositions spectrales "classiques" sont inadaptées à l'analyse de signaux combinant plusieurs échelles (ou fréquences) caractéristiques (voire un continuum). Pour y remédier, ils proposent une transformation qui permet une représentation du signal simultanément dans le temps (ou dans l'espace) et dans les échelles : le signal n'est plus décomposé en composantes fréquentielles mais en une combinaison linéaire de fonctions élémentaires localisées en différents points de l'espace et ayant des tailles différentes. Ces fonctions élémentaires sont toutes construites à l'aide d'une unique fonction mère ψ, par dilatations ($a > 0$) et translations (b) de celle-ci : $\psi_{b,a}(x) = \psi((x-b)/a)$. La transformation en ondelettes d'un signal $s(x)$ consiste à le décomposer sous la forme d'une combinaison linéaire d'ondelettes $\psi_{b,a}$ pondérées par le coefficient[1]

$$T_\psi[s](b,a) = \int \psi((x-b)/a)s(x)dx \ . \tag{B.1}$$

Nous nous contenterons ici d'admettre que la relation précédente est inversible si l'ondelette est de moyenne nulle, c'est-à-dire

$$\int \psi(x)dx = 0 \ . \tag{B.2}$$

La condition d'admissibilité précédente permet un large choix d'ondelettes mères. Un choix traditionnel est la famille des dérivées successives de la fonction Gaussienne :

$$\psi^{(N)} = \frac{d^N}{dx^N} e^{-x^2/2} \ , \tag{B.3}$$

[1] A un facteur multiplicatif près que nous prendrons égal à 1.

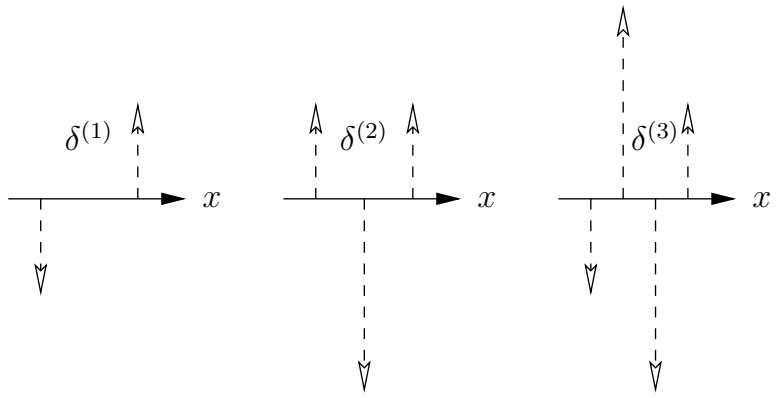

FIG. B.1 – Représentation des "ondelettes" mères du pauvre $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ et $\delta^{(3)}$ définies dans l'équation (B.5) [98, 150, 185].

qui sont des ondelettes $\mathcal{C}^\infty$ qui présentent l'avantage d'être bien localisées à la fois dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier. Comme on peut le remarquer, plus N augmente, plus $\psi^{(N)}$ est oscillante dans la mesure où ses N premiers moments nuls :

$$\int x^q \psi^{(N)}(x) dx = 0 \ , \ 0 \leq q < N \ . \tag{B.4}$$

Malheureusement, ces ondelettes sont mal définies aux petites échelles (a de l'ordre du pixel). Nous préfèrerons donc dans la suite utilisée l'ondelette dite du "pauvre" [149, 150], c'est-à-dire l'incrément $\delta^{(1)}$ (de moyenne nulle) et sa généralisation à N moments nuls $\delta^{(N)}$ [98, 150, 185] pour lesquelles le facteur de dilatation est directement relié à un nombre de pixels[2]. Nous avons représenté dans la figure B.1, les ondelettes mères du pauvre $\delta^{(N)}$ d'ordre $N = 1$, 2 et 3, dont les N premiers moments sont nuls. Le coefficient en ondelettes (Eq. (B.1)) s'exprime directement en fonction du signal s :

$$\begin{aligned}
T_{\delta^{(1)}}[s](l,x) &= \delta_l^{(1)} s(x) = s(x+l) - s(x) \ , \\
T_{\delta^{(2)}}[s](l,x) &= \delta_l^{(2)} s(x) = s(x+2l) - 2s(x+l) + s(x) \ , \\
T_{\delta^{(3)}}[s](l,x) &= \delta_l^{(3)} s(x) = s(x+4l) - 2s(x+3l) + 2s(x+l) - s(x) \ , \\
T_{\delta^{(4)}}[s](l,x) &= \delta_l^{(4)} s(x) = s(x+4l) - 4s(x+3l) + 6s(x+2l) - 4s(x+l) + s(x) \ .
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Remarquons que $\delta_l^{(1)} s(x)$ est la dérivée numérique (par différence finie) évaluée sur l pixels du signal s au point x et $\delta_l^{(2)} s(x)$ la discrètisation du laplacien évaluée sur $2l$ pixels.

[2]Remarquons que la nature hautement singulière de ces "ondelettes" ne permet pas une représentation claire du signal dans le demi-plan espace-échelle [98].

Annexe C

Incréments, transformation en ondelettes et analyse des singularités

Nous proposons dans cette annexe, une présentation simplifiée de l'analyse des singularités par la tranformée en ondelettes. Nous renvoyons le lecteur aux références [98, 112–115] pour plus de précisions et une bibliographie détaillée.

Un comportement singulier d'un signal $s(x)$ en un point x_0 est généralement caractérisé par un exposant $h(x_0)$ appelé *exposant de Hölder*. Cet exposant est défini comme le plus grand exposant h tel qu'il existe un polynôme P_n de degré n et une constante C vérifiant

$$|s(x) - P_n(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^h \ , \ \text{lorsque } x \to x_0. \tag{C.1}$$

Notons que le polynôme $P_n(x - x_0)$ n'est autre que le développement de Taylor à l'ordre n du signal s au point x_0, et que génériquement $n \leq h(x_0) < n+1$. En d'autres termes, $h(x_0)$ est l'exposant qui caractérise le premier terme singulier apparaissant dans le développement de Taylor de s en x_0 :

$$s(x) = s(x_0) + (x - x_0)s^{(1)}(x_0) + ...\frac{(x - x_0)^n}{n!}s^{(n)}(x_0) + C|x - x_0|^{h(x_0)} \ , \tag{C.2}$$

où $s^{(k)}$ représente la dérivée d'ordre k de s. L'exposant de Hölder $h(x_0)$ quantifie en quelque sorte la "force" de la singularité localisée en x_0 : plus $h(x_0)$ est grand plus la singularité est faible. En fait, si $h(x_0)$ n'est pas entier, $n < h(x_0) < n+1$, on peut se convaincre facilement que le signal est n fois dérivable en x_0 mais n'est pas $n + 1$ fois dérivable.

Rappelons que l'ondelette analysatrice est par définition de moyenne nulle (Eq. (B.2)). Dans le cas des dérivées successives de la Gaussienne $\psi^{(N)}$ (Eq. (B.3)) ou de l'ondelette du pauvre généralisée $\delta^{(N)}$, les moments jusqu'à l'ordre $N - 1$ sont nuls. Cela signifie que ces ondelettes sont orthogonales aux polynômes d'ordre strictement inférieur à N. Ainsi, une ondelette d'ordre N va annuler les N premiers termes de la série de Taylor du signal s au point x_0 considéré. Ainsi, si $h(x_0) < N$, le comportement dominant est celui donné

par le terme $|x - x_0|^{h(x_0)}$ dans l'équation (C.2) et le coefficient en ondelettes de s au point $b = x_0$ se comporte en loi de puissance en fonction de l'échelle $a = l$ avec l'exposant $h(x_0)$:

$$|T_{\delta^{(N)}}[s](x_0, l)| \sim l^{h(x_0)} \ , \ \text{lorsque } l \to 0 \ . \tag{C.3}$$

Si au contraire $h(x_0) > N$, le comportement dominant de la série de Taylor (modulo les N premiers moments qui sont annulés par $\delta^{(N)}$) devient $(x - x_0)^N$. On démontre alors comme précédemment que la transformation en ondelettes se comporte comme

$$|T_{\delta^{(N)}}[s](x_0, l)| \sim l^{N} \ , \ \text{lorsque } l \to 0 \ . \tag{C.4}$$

Dans de telles conditions, l'exposant N est mesuré à la place de l'exposant $h(x_0)$. Il faudra donc toujours s'assurer que l'on a bien choisi N suffisamment grand ($N > \max_x(h(x))$), afin de bien mesurer l'exposant de Hölder local. En supposant cette condition réalisée, la transformation en ondelettes $T_{\delta^{(N)}}[s]$ d'un signal (de vitesse) s se comportement en l^N autour des zones où le signal s est régulier (**domaine dissipatif**) et en $l^h \gg l^N$ autour des zones singulières (**domaine inertiel**).

Dans le cadre de l'analyse des signaux de vitesse longitudinale en turbulence Eulérienne, le plus grand exposant de Hölder est estimé de l'ordre de $h_{\max} \approx 0.6$ [15, 79, 80, 98, 102, 139]. Ainsi, l'incrément d'ordre $N = 1$ suffit à mesurer l'ensemble de la gamme des singularités : $0.1 \lesssim h \lesssim 0.6$.

Dans le cadre de la turbulence Lagrangienne, le plus grand exposant de Hölder est de l'ordre de $h_{\max} \approx 1$ [29, 31, 106]. Ainsi, l'incrément d'ordre $N = 1$ est à la limite de ses capacités pour mesurer l'ensemble de la gamme des valeurs prises par l'exposant h : c'est pour cette raison qu'une ondelette d'ordre $N \geq 2$, est nécessaire pour effectuer une analyse multifractale fiable des signaux de vitesse Lagrangienne.

Annexe D

Les cumulants du logarithme des incréments de vitesse

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction du chapitre 1, la méthode traditionnelle de caractérisation de l'intermittence est l'étude systématique des comportements en loi de puissance des fonctions de structure. Cela permet de mesurer le spectre ζ_q^E (Eq. (2.1)) et donc le spectre de singularités $\mathcal{D}^E(h)$ par transformation de Legendre (Eq. (2.25)). L'étude des corrections intermittentes consiste à estimer l'écart à la linéarité du spectre ζ_q^E prédite par la théorie monofractale K41 (Eq. (1.2)). L'étude des **cumulants** $C_n(l)$ du logarithme des incréments permet de quantifier directement l'intermittence, sans présupposer des lois de puissance et une forme particulière du spectre ζ_q^E [9, 79, 80, 92, 95, 139]. L'étude statistique porte sur la valeur moyenne de la valeur absolue des incréments. Ces grandeurs étant positives, nous pouvons écrire $\langle|\delta_l u|^q\rangle$ sous la forme

$$\langle|\delta_l u|^q\rangle = e^{f(q,l)} \ . \tag{D.1}$$

En supposant que la fonction f soit développable en série entière en fonction de l'ordre q, on obtient

$$f(q,l) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(l)\frac{q^n}{n!} \ , \tag{D.2}$$

ce qui définit le cumulant d'ordre n du logarithme de l'incrément de vitesse, $C_n(l)$. Celui-ci s'exprime en fonction des moments du logarithme de l'incrément :

$$\begin{aligned} \langle|\delta_l u|^q\rangle &= \langle e^{q\ln|\delta_l u|}\rangle \ , \\ &= \langle\sum_{n=0}^{+\infty}(\ln|\delta_l u|)^n\,\frac{q^n}{n!}\rangle \ , \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} M_n^{\ln}(l)\frac{q^n}{n!} \ , \end{aligned} \tag{D.3}$$

où $M_n^{\ln}(l) = \langle (\ln|\delta_l u|)^n \rangle$ est le moment d'ordre n du logarithme de l'incrément de vitesse. De la même manière, à partir des équations (D.1) et (D.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle |\delta_l u|^q \rangle &= e^{\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(l) \frac{q^n}{n!}} \ , \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(l) \frac{q^n}{n!})^p}{p!} \ . \end{aligned} \tag{D.4}$$

En égalisant les coefficients des deux séries entières, on exprime les cumulants en fonction des moments,

$$\begin{aligned} &C_0(l) = M_0^{\ln}(l) = 1 \ , \\ &C_1(l) = M_1^{\ln}(l) \ , \\ &C_2(l) = M_2^{\ln}(l) - \left[M_1^{\ln}(l)\right]^2 \ , \\ &C_3(l) = M_3^{\ln}(l) - 3M_2^{\ln}(l)M_1^{\ln}(l) + 2\left[M_1^{\ln}(l)\right]^3 \ , \\ &C_4(l) = M_4^{\ln}(l) - 4M_3^{\ln}(l)M_1^{\ln}(l) - 3\left[M_2^{\ln}(l)\right]^2 + 12M_2^{\ln}(l)\left[M_1^{\ln}(l)\right]^2 - 6\left[M_1^{\ln}(l)\right]^4 \ , \\ &C_n(l) = ... \end{aligned} \tag{D.5}$$

On peut montrer que seul $C_1(l)$ dépend de la variance de l'incrément ; ainsi la comparaison des cumulants des signaux de vitesse issus de différentes expériences (numériques ou expérimentales) est immédiate (à l'échelle intégrale près). De manière plus générale, les cumulants du logarithme sont les coefficients du développement de Taylor du logarithme de la fonction caractéristique du logarithme de l'incrément évaluée en $-iq$:

$$\Psi(-iq) = \ln \Phi(-iq) = \ln\langle e^{q \ln|\delta_l v|} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(l) \frac{q^n}{n!} \ .$$

La modélisation de l'incrément fait intervenir le produit de deux variables aléatoires indépendantes β_l et δ (Eq. (2.32)), avec δ de loi Gaussiennne. Il est immédiat de montrer que sous l'hypothèse d'indépendance,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ C_{n,\delta_l u}(l) = C_{n,\beta_l}(l) + C_{n,\delta}(l) \ . \tag{D.6}$$

Les cumulants du logarithme d'une variable Gaussienne δ se déduisent du calcul des moments suivants :

$$M_{n,\delta}^{\ln} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|x|)^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \ .$$

On trouve[1] ainsi :

$$\begin{aligned}
C_{1,\delta} &= M^{\ln}_{1,\delta}(l) = -\frac{1}{2}(\ln 2 + \gamma) + \ln\sigma \approx -0.6352 + \ln\sigma \ , \\
C_{2,\delta} &= M^{\ln}_{2,\delta}(l) - \left[M^{\ln}_{1,\delta}(l)\right]^2 = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.233 \ , \\
C_{3,\delta} &= M^{\ln}_{3,\delta}(l) - 3M^{\ln}_{2,\delta}(l)M^{\ln}_{1,\delta}(l) + 2\left[M^{\ln}_{1,\delta}(l)\right]^3 = -\frac{7}{4}\zeta(3) \approx -2.10 \ , \\
C_{4,\delta} &= M^{\ln}_{4,\delta}(l) - 4M^{\ln}_{3,\delta}(l)M^{\ln}_{1,\delta}(l) - 3\left[M^{\ln}_{2,\delta}(l)\right]^2 + 12M^{\ln}_{2,\delta}(l)\left[M^{\ln}_{1,\delta}(l)\right]^2 - 6\left[M^{\ln}_{1,\delta}(l)\right]^4 \ , \\
&= \frac{\pi^4}{16} \approx 6.0881 \ .
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Une autre technique de calcul des cumulants du logarithme d'une Gaussienne est le développement en série entière du logarithme de la fonction de structure d'ordre q (Eqs. (D.1) et (D.2)). Ainsi, on peut calculer (Eq. (2.37)),

$$\ln K_q = \ln\langle|\delta|^q\rangle = \ln\left(\frac{2^{q/2}\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sigma^p\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{n,\delta}\frac{q^n}{n!} \ . \tag{D.8}$$

Comme nous l'avons mentionné, l'étude des cumulants permet de quantifier l'intermittence d'un processus sans présupposer l'invariance d'échelle. De manière générale, la fonction de structure est donnée par les relations (D.1) et (D.2). S'il est possible de factoriser, pour chaque cumulant $C_n(l)$, la dépendance en échelle l et en ordre n, c'est-à-dire $C_n(l) = g(n)h(l) + C_{n,\delta}$, alors le processus fera partie de la classe des processus *log-infiniment divisibles* [95, 137, 138]. On trouve ainsi, en posant $\zeta_q = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)\frac{q^n}{n!}$ et $K_q = \langle|\delta|^q\rangle = \exp\left[\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n,\delta}\frac{q^n}{n!}\right]$, que

$$\langle|\delta_l u|^q\rangle = K_q \exp\left[\zeta_q h(l)\right] \ . \tag{D.9}$$

Un processus est invariant d'échelle si et seulement si $h(l) = \ln(l/L)$, ce qui d'après l'équation (D.9) conduit bien à un comportement en loi de puissance des fonctions de structure non signées :

$$\langle|\delta_l u|^q\rangle = K_q\left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_q} \ . \tag{D.10}$$

Citons pour l'exemple deux formes particulières du spectre d'exposants ζ_q :

– Le processus "incrément" est invariant d'échelle et log-normal de paramètres $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, si et seulement si $h(l) = \ln(l/L)$ et $g(1) = c_1$, $g(2) = -c_2$, $g(n) = 0$, $\forall n \geq 3$. On obtient alors

$$\langle|\delta_l u|^q\rangle = K_q\left(\frac{l}{L}\right)^{\zeta_q} \text{ , avec } \zeta_q = c_1 q - c_2\frac{q^2}{2} \ . \tag{D.11}$$

[1] Le calcul fait intervenir la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln n + \sum_{p=1}^{n} p^{-1}\right)$, et la fonction de Rieman $\zeta(n) = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-n}$.

– Le processus "incrément" est invariant d'échelle et log-Poisson [51–53] de paramètres m, γ et δ si et seulement si $h(l) = \ln(l/L)$ et $g(1) = m - \gamma \ln \delta$, $g(n) = -\gamma(\ln \delta)^n$, $\forall n \geq 2$. On obtient alors

$$\langle |\delta_l u|^q \rangle = K_q \left(\frac{l}{L} \right)^{\zeta_q} \text{ , avec } \zeta_q = mq + \gamma \left(1 - \delta^q\right) \ . \tag{D.12}$$

Remarquons que dans le modèle original de She et Lévêque [51] (SL), $\gamma = 2$ et $\delta = (2/3)^{1/3}$, m étant contraint par la relation $\zeta_3 = 1$, c'est-à-dire $m = 1/9$. On obtient ainsi

$$\zeta_q^{SL} = q/9 + 2\left[1 - (2/3)^{q/3}\right] = c_1^{SL} q - c_2^{SL} \frac{q^2}{2} + c_3^{SL} \frac{q^3}{3!} + o(q^3) \ , \tag{D.13}$$

où $c_1^{SL} \approx 0.38142$, $c_2^{SL} \approx 0.036534$ et $c_3^{SL} \approx 0.0049377$.

Annexe E

Au voisinage de la densité de probabilité Gaussienne

E.1 Cas général

Lorqu'une variable aléatoire est non Gaussienne, il est intéressant de décrire les écarts à la Gaussianité [155–157]. Nous allons montrer que la densité de probabilité $\mathcal{P}_v(x)$ d'une variable aléatoire v quelconque, s'exprime en fonction des dérivées successives de la densité $\mathcal{P}_u(x)$ d'une autre variable aléatoire u.

La transformée de Fourier de la densité de probabilité $\mathcal{P}_v(x)$ est appelée la fonction caractéristique $\varphi_v(k)$ de la variable aléatoire v. $\mathcal{P}_v(x)$ et $\varphi_v(k)$ sont donc transformées de Fourier l'une de l'autre :

$$\varphi_v(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \mathcal{P}_v(x) dx \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \varphi_v(k) dk. \tag{E.1}$$

On peut alors montrer que les moments $M_v(n) = \langle v^n \rangle$ de la variable aléatoire v sont reliés aux dérivées successives de la fonction caractéristique, ce qui permet d'écrire sa série de Taylor comme

$$\varphi_v(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_v(n) \frac{(ik)^n}{n!} \ . \tag{E.2}$$

On appelle $\psi_v(k) = \ln \varphi_v(k)$, la seconde fonction caractéristique de la variable aléatoire v [155–157]. La serie de taylor de $\psi_v(k)$ fait intervenir les cumulants[1] $\chi_v(n)$ d'ordre n de v,

$$\psi_v(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_v(n) \frac{(ik)^n}{n!} \ , \tag{E.3}$$

[1] Et non pas les cumulants du logarithme de la variable aléatoire v.

que l'on peut relier en se limitant aux quatres premiers cumulants aux moments $M_v(n)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\chi_v(1) = M_v(1) \ , \\
&\chi_v(2) = M_v(2) - [M_v(1)]^2 \ , \\
&\chi_v(3) = M_v(3) - 3M_v(2)M_v(1) + 2\,[M_v(1)]^3 \ , \\
&\chi_v(4) = M_v(4) - 4M_v(3)M_v(1) - 3\,[M_v(2)]^2 + 12M_v(2)\,[M_v(1)]^2 - 6\,[M_v(1)]^4 \ .
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Soit $\psi_u(k)$ la seconde fonction caractéristique d'une deuxième variable aléatoire u,

$$\psi_v(k) - \psi_u(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} [\chi_v(n) - \chi_u(n)] \, \frac{(ik)^n}{n!} \ , \tag{E.5}$$

où $\chi_u(n)$ est le cumulant d'ordre n de la variable aléatoire u. En introduisant les coefficients λ_n définis par

$$\exp\left[\psi_v(k) - \psi_u(k)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \frac{(ik)^n}{n!} \ , \tag{E.6}$$

il est alors possible d'exprimer la densité de probabilité de v en fonction de celle de u, de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n \mathcal{P}_u(x)}{dx^n} \ , \tag{E.7}$$

où les λ_n s'expriment en fonction des $[\chi_v(n) - \chi_u(n)]$ et par là quantifient l'écart entre les densités de probabilité de u et v.

E.2 Cas Gaussien - Développement de Edgeworth

Lorsque la variable aléatoire u est Gaussienne, de moyenne nulle et de variance σ^2,

$$\mathcal{P}_u(x) = \mathcal{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \ , \tag{E.8}$$

la relation (E.7) est appelée développement en série de Edgeworth [155, 156, 158]. On peut alors montrer [155, 156] que

$$\mathcal{P}_v(x) = \mathcal{G}(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda_n h_n(x) \ , \tag{E.9}$$

où les fonctions $h_n(x)$ sont les polynômes d' Hermite[2] :

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{\mathcal{G}(x)} \frac{d^n \mathcal{G}(x)}{dx^n}. \tag{E.10}$$

[2]Ces mêmes polynômes interviennent dans l'étude de l'oscillateur harmonique quantique [158]. Nous renvoyons le lecteur à la référence [186].

Par exemple[3], les quatres premiers polynômes d'Hermite ont comme expression :

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1 \ , \\ h_1(x) &= x/\sigma^2 \ , \\ h_2(x) &= [h_1(x)]^2 - 1/\sigma^2 \ , \\ h_3(x) &= [h_1(x)]^3 - 3h_1(x)/\sigma^2 \ . \end{aligned} \tag{E.11}$$

Nous retiendrons que la densité de probabilité de la variable aléatoire v s'exprime en fonction des dérivées successives de la Gaussienne :

$$\mathcal{P}_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n \mathcal{G}(x)}{dx^n} \ . \tag{E.12}$$

Remarquons enfin que les dérivées successives de la Gaussienne sont traditionnellement utilisées comme ondelette mère (c.f. Annexe B, relation (B.3)).

[3]Dans le cas standardisé ($\sigma^2 = 1$), on peut montrer que $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = x$, et $h_{k+1}(x) = x h_k(x) - dh_k(x)/dx$.

Annexe F

Relation entre la fonction de corrélation et la fonction d'auto-corrélation connexe

Nous allons démontrer dans cette annexe le lien (Eq. (8.17)) entre la fonction de corrélation $\mathcal{M}_{l,l}(q,q,\Delta x) = \mathcal{M}_l(q,\Delta x)$ (Eq. (8.7)), et la fonction d'autocorrélation connexe (FAC) $\mathcal{C}_{l,l}(\Delta x) = \mathcal{C}_l(\Delta x)$ (Eq. (8.11)).

Le calcul du développement limité de $\ln \mathcal{M}_l(q,\Delta x)$ en puissance de q, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{M}_l(q,\Delta x) &= \ln\langle \exp\left[q\left(\ln \beta_l(x) + \ln \beta_l(x+\Delta x)\right)\right]\rangle, \\ &= \ln\left[1 + 2qC_{1,\beta_l} + q^2(\langle \ln^2 \beta_l\rangle + C^2_{1,\beta_l} + \mathcal{C}_l(\Delta x)) + o(q^2)\right], \\ &= 2qC_{1,\beta_l} + q^2\left[\mathcal{C}_l(\Delta x)) + C_{2,\beta_l}\right] + o(q^2). \end{aligned} \tag{F.1}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \ln[\langle \beta_l^q\rangle^2] &= 2\ln\left[1 + qC_{1,\beta_l} + \frac{q^2}{2}\langle \ln^2 \beta_l\rangle + o(q^2)\right], \\ &= 2qC_{1,\beta_l} + q^2 C_{2,\beta_l} + o(q^2). \end{aligned} \tag{F.2}$$

Les équations (F.1) et (F.2) conduisent à la relation

$$\ln\left(\frac{\mathcal{M}_l(q,\Delta x)}{\langle \beta_l^q\rangle^2}\right) = q^2\mathcal{C}_l(\Delta x)) + o(q^2), \tag{F.3}$$

ce qui démontre l'équation (8.17), dans la limite $q \to 0$:

$$\mathcal{C}_l(\Delta x)) = \lim_{q\to 0} \frac{1}{q^2}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_l(q,\Delta x)}{\langle (\beta_l)^q\rangle^2}\right). \tag{F.4}$$

Bibliographie

[1] U. Frisch. *Turbulence, The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] H. Tennekes et J. L. Lumley. *A first Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, 1972.

[3] A. S. Monin et A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics vol 1&2*. MIT Press, Cambridge, 1971.

[4] J. M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. in Appl. Mech.*, 1 :171, 1948.

[5] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in a incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30 :299, 1941.

[6] L. F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

[7] F. H. Champagne. The fine-scale structure of the turbulent velocity field. *J. Fluid Mech.*, 86 :67, 1978.

[8] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, et R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 140 :63, 1984.

[9] B. Castaing, Y. Gagne, et E. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D*, 46 :177, 1990.

[10] R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, et G. Ruiz-Chavarria. On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, 80 :385, 1995.

[11] G. Ruiz-Chavarria, C. Baudet, et S. Ciliberto. Hierarchy of the energy dissipation moments in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 74(11) :1986, 1995.

[12] R. Camussi, S. Ciliberto, et C. Baudet. Experimental study of the evolution of a velocity perturbation in fully developed turbulence. *Phys. Rev. E*, 56(5) :6181, 1997.

[13] P. Marcq et A. Naert. A Langevin equation for the energy cascade in fully developed turbulence. *Physica D*, 124 :368, 1998.

[14] K. R. Sreenivasan. Fluid turbulence. *Rev. Mod. Phys.*, 71(2) :383, 1999.

[15] O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, et B. Hébral. Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet. *Eur. Phys. J. B*, 17 :309, 2000.

[16] S. Douady, Y Couder, et M. E. Brachet. Direct observations of the intermittency of intense vorticty filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :983, 1991.

[17] S. Fauve, C. Laroche, et B. Castaing. Pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *J. Phys. II France*, 3 :271, 1993.

[18] J.-F. Pinton et R. Labbé. Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows. *J. Phys. II France*, 4 :1461, 1994.

[19] P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin, et C. Laroche. Analysis of pressure fluctuations in swirling turbulent flows. *J. Phys. II France*, 4 :725, 1994.

[20] J. Maurer, P. Tabeling, et G. Zocchi. Statistics of turbulence between two counter-rotating disks in low temperature helium gas. *Europhys. Lett.*, 26 :31, 1994.

[21] O. Cadot, S. Douady, et Y. Couder. Characterization of the low pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow. *Phys. Fluids A*, 7 :630, 1995.

[22] N. Mordant, J.-F. Pinton, et F. Chillà. Characterization of turbulence in a closed flow. *J. Phys. II France*, 7 :1729, 1997.

[23] G. A. Voth, K. Satyanarayan, et E. Bodenschatz. Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 10 :2268, 1998.

[24] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, et E. Bodenschatz. Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. *Nature*, 409 :1017, 2001.

[25] G. A. Voth, A. La Porta, A. Crawford, E. Bodenschatz, et J. Alexander. Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, 469 :121, 2002.

[26] N. Mordant, A. M. Crawford, et E. Bodenschatz. Experimental Lagrangian acceleration probability density function measurement. *Physica D*, 2003. accepté pour publication.

[27] N. Mordant. *Mesure Lagrangienne en Turbulence : Mise en Oeuvre et Analyse*. Thèse, ENS Lyon, 2001.

[28] N. Mordant, O. Michel, P. Metz, et J.-F. Pinton. Scaling and intermittency of Lagrangian velocity in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :21, 2001.

[29] N. Mordant, J. Delour, E. Lévêque, A. Arneodo, et J.-F. Pinton. Long time correlations in Lagrangian dynamics : a key to intermittency in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :25, 2002.

[30] N. Mordant, J.-F. Pinton, et O. Michel. Time resolved tracking of a sound scatterer in a complex flow : non-stationary signal analysis and applications. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112 :108, 2002.

[31] N. Mordant, J. Delour, E. Lévêque, O. Michel, A. Arneodo, et J.-F. Pinton. Lagrangian velocity fluctuations in fully developed turbulence : scaling, intermittency and dynamics. *J. Stat. Phys.*, 112 :701, 2003.

[32] S. A. Orszag et G. S. Patterson. Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 28 :76, 1972.

[33] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1987.

[34] P. K. Yeung et S. B. Pope. Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 207 :531, 1989.

[35] A. Vincent et M. Meneguzzi. The spatial structure ans statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225 :1, 1991.

[36] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, et A. Uno. Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *Phys. Fluids*, 15(2) :21, 2003.

[37] J. Choi, K. Yeo, et C. Lee. Lagrangian statistics in turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 16(3) :779, 2004.

[38] V. Yakhot. Probability density and scaling exponents of the moments of longitudinal velocity difference in strong turbulence. *Phys. Rev. E*, 57(2) :1737, 1998.

[39] I. Arad, B. Dhruva, S. Kurien, V. S. L'vov, I. Procaccia, et K. R. Sreenivasan. Extraction of anisotropic contributions in turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, 81(24) : 5330, 1998.

[40] I. Arad, V. S. L'vov, et I. Procaccia. Correlation functions in isotropic and anisotropic turbulence : The role of the symmetry group. *Phys. Rev. E*, 59(6) :6753, 1999.

[41] L. Danaila, F. Anselmet, T. Zhou, et R. Antonia. A generalization of Yaglom's equation which accounts for the large-scale forcing in heated decaying turbulence. *J. Fluid Mech.*, 391 :359, 1999.

[42] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics.* Pergamond Press, Oxford, 1987.

[43] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13 :82, 1962.

[44] A. M. Obukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 13 :77, 1962.

[45] G. Parisi et U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence. Dans M. Ghil, R. Benzi, et G. Parisi, éditeurs, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*. (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 84.

[46] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, et B. I. Shraiman. Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets. *Phys. Rev. A*, 33(2) :1141, 1986.

[47] P. Collet, J. Lebowitz, et A. Porzio. The dimension spectrum of some dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 47 :609, 1987.

[48] G. Paladin et A. Vulpiani. Anomalous scaling laws in multifractal objects. *Phys. Rep.*, 156 :147, 1987.

[49] B. B. Mandelbrot. *Fractals and Multifractals : Noise, Turbulence and Galaxies*, volume 1. Springer Verlag, Berlin, 1989.

[50] C. Meneveau et K. R. Sreenivasan. Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :1424, 1987.

[51] Z. S. She et E. Lévêque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 72 :336, 1994.

[52] B. Dubrulle. Intermittency in fully developed turbulence : log-Poisson statistics and generalized scale-covariance. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :959, 1994.

[53] Z. S. She et E. Waymire. Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 74(2) :262, 1995.

[54] D. Schertzer et S. Lovejoy. Physical modeling and analysis of rain and cloud by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92 :9693, 1987.

[55] S. Kida. Log-stable distribution and intermittency of turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 60 :5, 1991.

[56] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. Schmitt, Y. Ghigirinskaya, et D. Marsan. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals*, 5 :427, 1997.

[57] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccione, C. Baudet, F. Massaioli, et S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 48 :R29, 1993.

[58] R. Benzi, L. Biferale, S. Ciliberto, M. V. Struglia, et R. Tripiccione. Generalized scaling in fully developed turbulence. *Physica D*, 96 :162, 1996.

[59] R. Benzi, L. Biferale, S. Ciliberto, M. V. Struglia, et R. Tripiccione. Scaling property of turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 53(4) :3025, 1996.

[60] A. Arneodo, C. Baudet, F. Belin, R. Benzi, B. Castaing, C. Chabaud, R. Chavarria, S. Ciliberto, R. Camussi, F. Chilla, B. Dubrulle, Y. Gagne, B. Hebral, J. Herweijer, M. Marchand, J. Maurer, J.-F. Muzy, A. Naert, A. Noullez, J. Peinke, F. Roux, P. Tabeling, W. Van de Water, et H. Willaime. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. *Europhys. Lett.*, 34(6) :411, 1996.

[61] S. Grossman, D. Lohse, et A. Reeh. Application of extended self-similarity in turbulence. *Phys. Rev. E*, 56(5) :5473, 1997.

[62] G. Paladin et A. Vulpiani. Degrees of freedom of turbulence. *Phys. Rev. A*, 35 :1971, 1987.

[63] U. Frisch et M. Vergassola. A prediction of the multifractal model : the intermediate dissipation range. *Europhys. Lett.*, 14 :439, 1991.

[64] C. Meneveau. On the transition between viscous and inertial-range scaling of turbulence structure functions. *Phys. Rev. E*, 54 :3657, 1996.

[65] L. Biferale, M. Cencini, D. Vergni, et A. Vulpiani. Exit time of turbulent signals : A way to detect the intermediate dissipative range. *Phys. Rev. E*, 60(6) :6295, 1999.

[66] L. Chevillard, B. Castaing, et E. Lévêque. On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2003. soumis pour publication, cond-mat/0311409.

[67] M. Nelkin. Multifractal scaling of velocity derivatives in turbulence. *Phys. Rev. A*, 42(12) :7226, 1990.

[68] C. W. Van Atta et R. A. Antonia. Reynolds number dependence of skewness and flatness factors of turbulent velocity derivatives. *Phys. Fluids*, 23(2) :252, 1980.

[69] P. Tabeling, G. Zocchi, F. Belin, J. Maurer, et H. Willaime. Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence. *Phys. Rev. E*, 53(2) :1613, 1996.

[70] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling, et H. Willaime. Velocity gradient distributions in fully developed turbulence : An experimental study. *Phys. Fluids*, 9(12) :3843, 1997.

[71] B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62 :331, 1974.

[72] M. E. Cates et J. M. Deutsch. Spatial correlations in multifractals. *Phys. Rev. A*, 35(11) :4907, 1987.

[73] C. Meneveau et A. Chhabra. Two-point statistics of multifractal measures. *Physica A*, 164 :564, 1990.

[74] J. O'Neil et C. Meneveau. Spatial correlations in turbulence : predictions from the multifractal formalism and comparison with experiments. *Phys. Fluids A*, 5 :158, 1993.

[75] R. Benzi, L. Biferale, et E. Trovatore. Ultrametric structure of multiscale energy correlations in turbulent models. *Phys. Rev. Lett.*, 79(9) :1670, 1997.

[76] R. Benzi, L. Biferale, et F. Toschi. Multiscale velocity correlations in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 80(15) :3244, 1998.

[77] A. Arneodo, E. Bacry, et J.-F. Muzy. Random cascades on wavelet dyadic trees. *J. Math. Phys.*, 39(8) :4142, 1998.

[78] A. Arneodo, E. Bacry, S. Manneville, et J.-F. Muzy. Analysis of random cascades using space-scale correlation functions. *Phys. Rev. Lett.*, 80(4) :708, 1998.

[79] A. Arneodo, S. Manneville, et J.-F. Muzy. Towards log-normal statistics in high Reynolds number turbulence. *Eur. Phys. J. B*, 1 :129, 1998.

[80] J. Delour, J.-F. Muzy, et A. Arneodo. Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence : a magnitude cumulant analysis. *Eur. Phys. J. B*, 23 :243, 2001.

[81] B. B. Mandelbrot et J. W. Van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Reviews*, 10 :422, 1968.

[82] A. Juneja, D. P. Lathrop, K. R. Sreenivasan, et G. Stolovitzky. Synthetic turbulence. *Phys. Rev. E*, 49(6) :5179, 1994.

[83] R. Benzi, L. Biferale, A. Crisanti, G. Paladin, M. Vergassola, et A. Vulpiani. A random process for the construction of multiaffine fields. *Physica D*, 65 :352, 1993.

[84] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Crisanti, et A. Vulpiani. Mimicking a turbulent signal : Sequential multiaffine processes. *Phys. Rev. E*, 57(6) :6261, 1998.

[85] E. Bacry, J. Delour, et J.-F. Muzy. Multifractal random walk. *Phys. Rev. E*, 64 : 026103, 2001.

[86] F. G. Schmitt et D. Marsan. Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades. *Eur. Phys. J. B*, 20 :3, 2001.

[87] J. Barral et B. B. Mandelbrot. Multifractal products of cylindrical pulses. *Prob. Theory Relat. Fields*, 124/3 :409, 2002.

[88] P. Chainais, R. Riedi, et P. Abry. Compound Poisson cascades. *Annales de l'Université Blaise Pascal,Colloque Auto-Similarité et Applications*, Clermont-Ferrand, 2002.

[89] J.-F. Muzy et E. Bacry. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E.*, 66 :056121, 2002.

[90] F. G. Schmitt. A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties. *Eur. Phys. J. B*, 34 :85, 2003.

[91] E. Bacry et J.-F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. Math. Phys.*, 236 :449, 2003.

[92] B. Castaing, Y. Gagne, et M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows ? *Physica D*, 68 :387, 1993.

[93] A. Naert, L. Puech, B. Chabaud, J. Peinke, B. Castaing, et B. Hebral. Velocity intermittency in turbulence : how to objectively characterize it ? *J. Phys. II France*, 4 :215, 1994.

[94] B. Chabaud, A. Naert, J. Peinke, F. Chilla, B. Castaing, et B. Hebral. Transition toward developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 73(24) :3327, 1994.

[95] B. Castaing et B. Dubrulle. Fully developed turbulence : A unifying point of view. *J. Phys. II France*, 5 :895, 1995.

[96] B. Castaing. The temperature of turbulent flows. *J. Phys. II France*, 6 :105, 1995.

[97] F. Chillà, J. Peinke, et B. Castaing. Multiplicative process in turbulent velocity statistics : A simplified analysis. *J. Phys. II France*, 6 :455, 1996.

[98] S. G. Roux. *Analyse en Ondelettes de l'Auto-Similarité de Signaux en Turbulence Pleinement Développée.* Thèse, Université de Bordeaux I, 1996.

[99] P.-O. Amblard et J.-M. Brossier. On the cascade in fully developed turbulence. The propagator approach versus the Markovian description. *Eur. Phys. J. B*, 12 :579, 1999.

[100] T. S. Lundgren. Kolmogorov two-third law by matched asymptotic expansion. *Phys. Fluids*, 14(2) :638, 2002.

[101] T.S. Lundgren. Kolmogorov turbulence by matched asymptotic expansions. *Phys. Fluids*, 15(4) :1074, 2003.

[102] Y. Malécot, C. Auriault, H. Kahalerras, Y. Gagne, O. Chanal, B. Chabaud, et B. Castaing. A statistical estimator of turbulence intermittency in physical and numerical experiments. *Eur. Phys. J. B*, 16 :549, 2000.

[103] Y. Gagne, B. Castaing, C. Baudet, et Y. Malécaut. Reynolds dependence of third-order velocity structure functions. *Phys. Fluids*, 16(2) :482, 2004.

[104] D. Lohse et A. Müller-Groeling. Bottleneck effects in turbulence : scaling phenomena in r versus p space. *Phys. Rev. Lett.*, 74(10) :1747, 1995.

[105] E. Lévêque. Communication privée, 2001.

[106] L. Chevillard, S. G. Roux, E. Lévêque, N. Mordant, J.-F. Pinton, et A. Arneodo. Lagrangian velocity statistics in turbulent flows : Effects of dissipation. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :214502, 2003.

[107] M. S. Borgas et B. L. Sawford. The small-scale structure of acceleration correlations and its role in the statistical theory of turbulent dispersion. *J. Fluid Mech.*, 228 : 295, 1991.

[108] M. S. Borgas. The multifractal Lagrangian nature of turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 342 :379, 1993.

[109] M. S. Borgas et B. L. Sawford. Stochastic equations with multifractal random increments for modeling turbulent dispersion. *Phys. Fluids*, 6(2) :618, 1993.

[110] B. L. Sawford, P. K. Yeung, M. S. Borgas, A. La Porta, A. M. Crawford, et E. Bodenschatz. Conditional and unconditional acceleration statistics in turbulence. *Phys. Fluids*, 15(11) :3478, 2003.

[111] C. Meneveau et K. R. Sreenivasan. The multifractal nature of turbulent energy dissipation. *J. Fluid Mech.*, 224 :429, 1991.

[112] A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, et J.-F. Muzy. *Ondelettes, Multifractales et Turbulences.* Diderot editeur, Arts et Sciences, Paris, 1995.

[113] J.-F. Muzy, E. Bacry, et A. Arneodo. The multifractal formalism revisited with wavelets. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 4 :245, 1994.

[114] A. Arneodo, E. Bacry, et J.-F. Muzy. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A*, 213 :232, 1995.

[115] J.-F. Muzy. *Analyse de distributions fractales à partir de leur transformée en ondelettes. Des concepts mathématiques aux applications physiques.* Thèse, Université de Nice, 1993.

[116] B. Castaing. Lagrangian and Eulerian velocity intermittency. *Eur. Phys. J. B*, 29 : 357, 2002.

[117] B. L. Sawford et M. S. Borgas. On the continuity of stochastic models for the Lagrangian velocity in turbulence. *Physica D*, 76 :297, 1994.

[118] M. S. Borgas, T. K. Flesch, et B. L. Sawford. Turbulent dispersion with broken reflectional symmetry. *J. Fluid Mech.*, 332 :141, 1997.

[119] C. Beck. Dynamical foundations of nonextensive statistical mechanics. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :180601, 2001.

[120] C. Beck. Lagrangian acceleration statistics in turbulent flows. *cond-mat*, page 0212566, 2002.

[121] J.-P. Laval, B. Dubrulle, et S. Nazarenko. Nonlocality and intermittency in three-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 13(7) :1995, 2001.

[122] T. Gotoh et R. H. Kraichnan. Turbulence and Tsallis statistics. *nlin.CD*, page 0305040, 2002.

[123] S. B. Pope. A stochastic Lagrangian model for acceleration in turbulent flows. *Phys. Fluids*, 14(7) :2360, 2002.

[124] R. Friedrich. Statistics of Lagrangian velocities in turbulent flows. *physics*, page 0207015, 2002.

[125] A. K. Aringazin. Conditional Lagrangian acceleration statistics in turbulent flows with gaussian distributed velocities. *cond-mat*, page 0312415, 2003.

[126] A. M. Reynolds. Superstatistical mechanics of tracer-particle motions in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 91(8) :084503, 2003.

[127] A. M. Reynolds. On the application of nonextensive statistics to Lagrangian turbulence. *Phys. Fluids*, 15(1) :1, 2003.

[128] A. K. Aringazin et M.I. Mazhitov. One-dimensional Langevin models of fluid particle acceleration in developed turbulence. *Phys. Rev. E*, 69 :026305, 2004.

[129] C. Brun et A. Pumir. Statistics of Fourier modes in a turbulent flow. *Phys. Rev. E*, 63 :056313, 2001.

[130] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, et Y. Kawashima. Probability density functions of turbulent velocity fluctuations. *Phys. Rev. E*, 65 :056304, 2002.

[131] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 186 :123, 1895.

[132] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani, et M. Vergassola. Multifractality in the statistics of the velocity gradients in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 67(17) :2299, 1991.

[133] P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan, et G. Stolovitzky. Probability density of velocity increments in turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, 68(18) :2766, 1992.

[134] A. Praskovsky et S. Oncley. Probability density distribution of velocity differences at very high Reynolds numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 73(25) :3399, 1994.

[135] Y. Gagne, M. Marchand, et B. Castaing. Conditional velocity pdf in 3-d turbulence. *J. Phys. II France*, 4 :1, 1994.

[136] F. Moisy, P. Tabeling, et H. Willaime. Kolmogorov equation in a fully developed turbulence experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 82(20) :3994, 1999.

[137] E. A. Novikov. Infinitely divisible distributions in turbulence. *Phys. Rev. E*, 50(5) : 3303, 1994.

[138] P. Chainais. *Cascades log-infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude de phénomènes d'intermittence en turbulence.* Thèse, ENS Lyon, 2001.

[139] J. Delour. *Processus Aléatoire Auto-Similaires : Applications en Turbulence et en Finance.* Thèse, Université de Bordeaux I, 2001.

[140] A. Arneodo, S. Manneville, J.-F. Muzy, et S. G. Roux. Revealing a lognormal cascading process in turbulent velocity statistics with wavelet analysis. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 357 :2415, 1999.

[141] A. Arneodo, J.-F. Muzy, et S. G. Roux. Experimental analysis of self-similarity and random cascade processes : Application to fully developed turbulence data. *J. Phys. II France*, 7 :363, 1997.

[142] A. Naert, R. Friedrich, et J. Peinke. Fokker-Planck equation for the energy cascade in turbulence. *Phys. Rev. E*, 56(6) :6719, 1997.

[143] R. Friedrich et J. Peinke. Description of a turbulent cascade by a Fokker-Planck equation. *Phys. Rev. Lett.*, 78(5) :863, 1997.

[144] R. Friedrich et J. Peinke. Statistical properties of a turbulent cascade. *Physica D*, 102 :147, 1997.

[145] D. Lohse. Crossover from high to low Reynolds number turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 73(24) :3223, 1994.

[146] E. Aurell, U. Frisch, J. Lutsko, et M. Vergassola. On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data. *J. Fluid Mech.*, 238 :467, 1992.

[147] G. K. Batchelor. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47 :359, 1951.

[148] G. Stolovitzky, K. R. Sreenivasan, et A. Juneja. Scaling functions and scaling exponents in turbulence. *Phys. Rev. E*, 48(5) :3217, 1993.

[149] M. Vergassola et U. Frisch. Wavelet transforms of self-similar processes. *Physica D*, 54 :58, 1991.

[150] J.-F. Muzy, E. Bacry, et A. Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals : The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Phys. Rev. E*, 47(2) :875, 1993.

[151] S. I. Vainshtein. Probing asymmetry and self-similarity of fully developed turbulence. *Phys. Rev. E*, 56(6) :6787, 1997.

[152] S. I. Vainshtein et K. R. Sreenivasan. Kolmogorov's 4/5th law and intermittency in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 73(23) :3085, 1994.

[153] K. R. Sreenivasan, S. I. Vainshtein, R. Bhiladvala, I. San Gil, S. Chen, et N. Cao. Asymmetry of velocity increments in fully developed turbulence and the scaling of low-order moments. *Phys. Rev. Lett.*, 77(8) :1488, 1996.

[154] J. Herweijer et W. van de Water. Universal shape of scaling functions in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 74(23) :4651, 1995.

[155] J.-L. Lacoume, P.-O. Amblard, et P. Comon. *Statistiques d'Ordre Supérieur pour le Traitement du Signal.* Masson, Paris, 1997.

[156] P. McCullagh. *Tensor Methods in Statistics.* Chapman and Hall, London, 1987.

[157] A. Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes.* Mc Graw-Hill International Editions, Third edition. New York, 1991.

[158] P. Flandrin. Communication privée, 2004.

[159] L. Sirovich, L. Smith, et V. Yakhot. Energy spectrum of homogeneous and isotropic turbulence in far dissipation range. *Phys. Rev. Lett.*, 72(3) :344, 1994.

[160] U. Frisch et R. Morf. Intermittency in nonlinear dynamics and singularities at complex times. *Phys. Rev. A*, 23 :2673, 1981.

[161] A. Pumir, B. Shraiman, et M. Chertkov. Geometry of Lagrangian dispersion in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 85(25) :5324, 2000.

[162] G. Falkovich, K. Gawedzki, et M. Vergassola. Particles and fields in fluid turbulence. *Rev. Mod. Phys.*, 73(4) :913, 2001.

[163] J. M. Ottino. *The Kinematics of Mixing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[164] S. Corrsin. Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence. *J. Atmos. Sciences*, 20 :115, 1963.

[165] J.-F. Pinton. Communication privée, 2001.

[166] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan, P. Kailasnath, et M.-S. Fan. Joint multifractal measures : theory and applications to turbulence. *Phys. Rev. A*, 41 :894, 1990.

[167] C. Poulain, N. Mazellier, P. Gervais, Y. Gagne, et C. Baudet. Lagrangian vorticity and velocity measurements in turbulent jets. *cond-mat*, page 0306005, 2003.

[168] C. Poulain. *Turbulence dans l'espace de Fourier : Mesures de vorticité par diffusion acoustique*. Thèse, Université de Grenoble I, 2003.

[169] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. S. I. A. M., Philadelphie, 1992.

[170] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solutions and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[171] M. Le Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*. C.N.R.S., Paris, 1988.

[172] J.-M. Aubry et S. Jaffard. Random wavelet series : Theory and applications. *math-ph/0310061*, 2003. A paraître dans Annales Mathématiques Blaise Pascal.

[173] C. Beck et E.G.D. Cohen. Superstatistics. *Physica A*, 322 :267, 2003.

[174] C. Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52 : 479, 1988.

[175] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 2. John Willey & Sons, New-York, 1971.

[176] Y. Meyer. *Ondelettes*. Herman, Paris, 1991.

[177] Y. Meyer, éditeur. *Wavelets and Applications*, Berlin, Springer-Verlag, 1992.

[178] Y. Meyer et S. Roques, éditeurs. *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Gif-sur-Yvette, Editions Frontières, 1993.

[179] S. Mallat. *A Wavelet Tour in Signal Processing*. Academic Press, New York, 1998.

[180] B. Torresani. *Analyse continue par Ondelettes*. Editions de Physique, Les Ulis, 1998.

[181] J. Morlet. NATO ASI series. Vol. FI, Springer, Berlin. 1983.

[182] A. Grossmann et J. Morlet. S.I.A.M. *J. Math. Anal.*, 15 :723, 1984.

[183] A. Grossmann et J. Morlet. Dans L. Streit, éditeur, *Mathematics and Physics, Lectures on Recent Results*. (World Scientific, Singapour, 1985).

[184] A. Goupillaud, A. Grossmann, et J. Morlet. *Geoexploration*, 23 :85, 1984.

[185] S. G. Roux, J.-F. Muzy, et A. Arneodo. Detecting vorticity filaments using wavelet analysis : About the statistical contribution of vorticity filaments to intermittency in swirling turbulent flows. *Eur. Phys. J. B*, 8 :301, 1999.

[186] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloe. *Mécanique Quantique*. Hermann, Paris, 1973.

Résumé

Le formalisme multifractal de Parisi et Frisch, ainsi que l'approche du propagateur de Castaing et collaborateurs, permettent de décrire de manière quantitative, dans le domaine inertiel, les statistiques des incréments de vitesse longitudinale en turbulence pleinement développée. Dans ce mémoire de doctorat, nous montrons que la physique liée aux effets dissipatifs, complètement pilotée par le nombre de Reynolds local, a des conséquences non triviales sur les statistiques des incréments de vitesse Eulérienne. A l'aide d'arguments dimensionnels simples, nous proposons une formalisation précise, dans le cadre du formalisme multifractal, de "l'accélération" du propagateur observée dans le domaine dissipatif intermédiaire, entre le domaine inertiel et le domaine dissipatif profond dans lequel les statistiques des incréments deviennent indépendantes de l'échelle. Nous montrons en particulier qu'il est possible, pour un nombre de Reynolds donné, de calculer la densité de probabilité des incréments de vitesse à toutes les échelles, moyennant une fonction paramétrable $\mathcal{D}^E(h)$, qui sera assimilée au spectre des singularités dans la limite des nombres de Reynolds infiniment grands. Nous discutons aussi comment adapter notre formalisme pour rendre compte du phénomène de Skewness. Nous montrons qu'il est possible de généraliser notre approche à une description unifiée des fluctuations de vitesse Lagrangienne. Nous comparons nos prédictions théoriques avec des données expérimentales et numériques. Cette étude permet d'estimer le spectre $\mathcal{D}^L(h)$ des singularités de la turbulence Lagrangienne et d'en démontrer le caractère universel. Nous évoquons ensuite la possibilité d'établir une transformation formelle entre les spectres des singularités de la turbulence Eulérienne $\mathcal{D}^E(h)$ et de la turbulence Lagrangienne $\mathcal{D}^L(h)$. Pour conclure, nous généralisons notre approche aux statistiques d'ordre supérieur afin de tester divers modèles de cascade sur des données expérimentales et numériques.

Abstract

The multifractal formalism of Parisi and Frisch, and the Propagator approach of Castaing et al., provide a quantitative description of the statistical behavior, in the inertial range, of velocity increments of fully developed turbulent flows. In this PhD thesis, we show that the physics of dissipative effects, that is completely governed by the local Reynolds number, has non trivial consequences on velocity increment statistics. Thanks to simple dimensional arguments, we propose a unified picture, in the framework of the multifractal formalism, of the "acceleration" of the propagator observed in the intermediate dissipative range, in between the inertial range and the dissipative range in which statistics become independent on scale. In particular, we show that it is possible to compute, for a given Reynolds number, the probability density function of velocity increments at every scale, a function that depends only on a single parameter function $\mathcal{D}^E(h)$ that acquires the mathematical status of singularity spectrum in the limit of infinite Reynolds numbers. We discuss how to adapt our formalism in order to take into account the phenomenon of Skewness. We show that it is possible to generalize our formalism to describe the statistics of Lagrangian velocity fluctuations. We compare our theoretical predictions to experimental and numerical data. This study allows us to estimate the singularity spectrum $\mathcal{D}^L(h)$ of Lagrangian velocity and to demonstrate its universal behavior. Then, we show that it is possible to establish a formal transformation between the singularity spectra $\mathcal{D}^E(h)$ of Eulerian turbulence and $\mathcal{D}^L(h)$ of Lagrangian turbulence. To conclude, we generalize our approach to higher order statistics in order to test various cascade model predictions on experimental and numerical data.