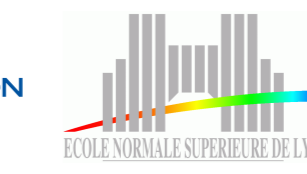
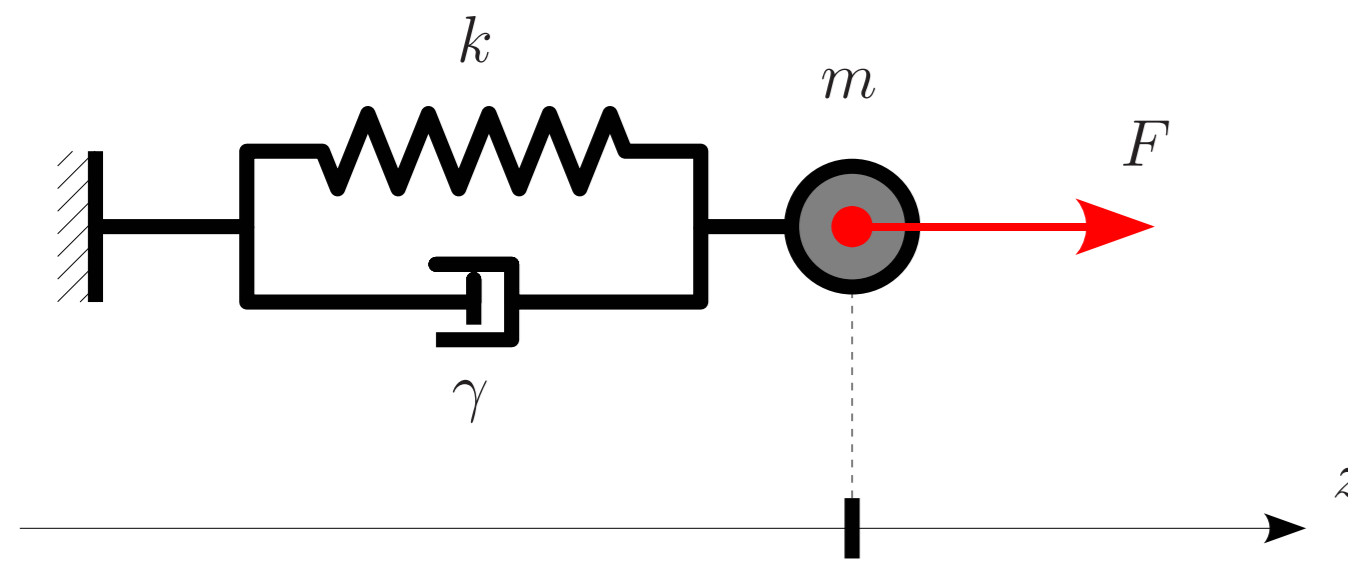


Bruit thermique et dissipation visqueuse d'un microlevier

P. Paolino, L. Bellon — Université de Lyon — Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon — CNRS UMR 5672



Oscillateur harmonique



La dynamique d'un oscillateur harmonique avec amortissement visqueux est décrite dans le domaine temporel par

$$m\ddot{z}(t) + \gamma\dot{z}(t) + kz(t) = F(t)$$

ou de façon équivalente dans l'espace de Fourier :

$$(k - m\omega^2 + i\gamma\omega)z(\omega) = F(\omega)$$

Les fluctuations thermiquement excitées de position z sont calculées à l'aide du Théorème Fluctuation Dissipation (TFD). Pour cela, il faut connaître la variable couplée à z dans le Hamiltonien H du système. Dans le cas simple d'un oscillateur harmonique, il s'agit simplement de F :

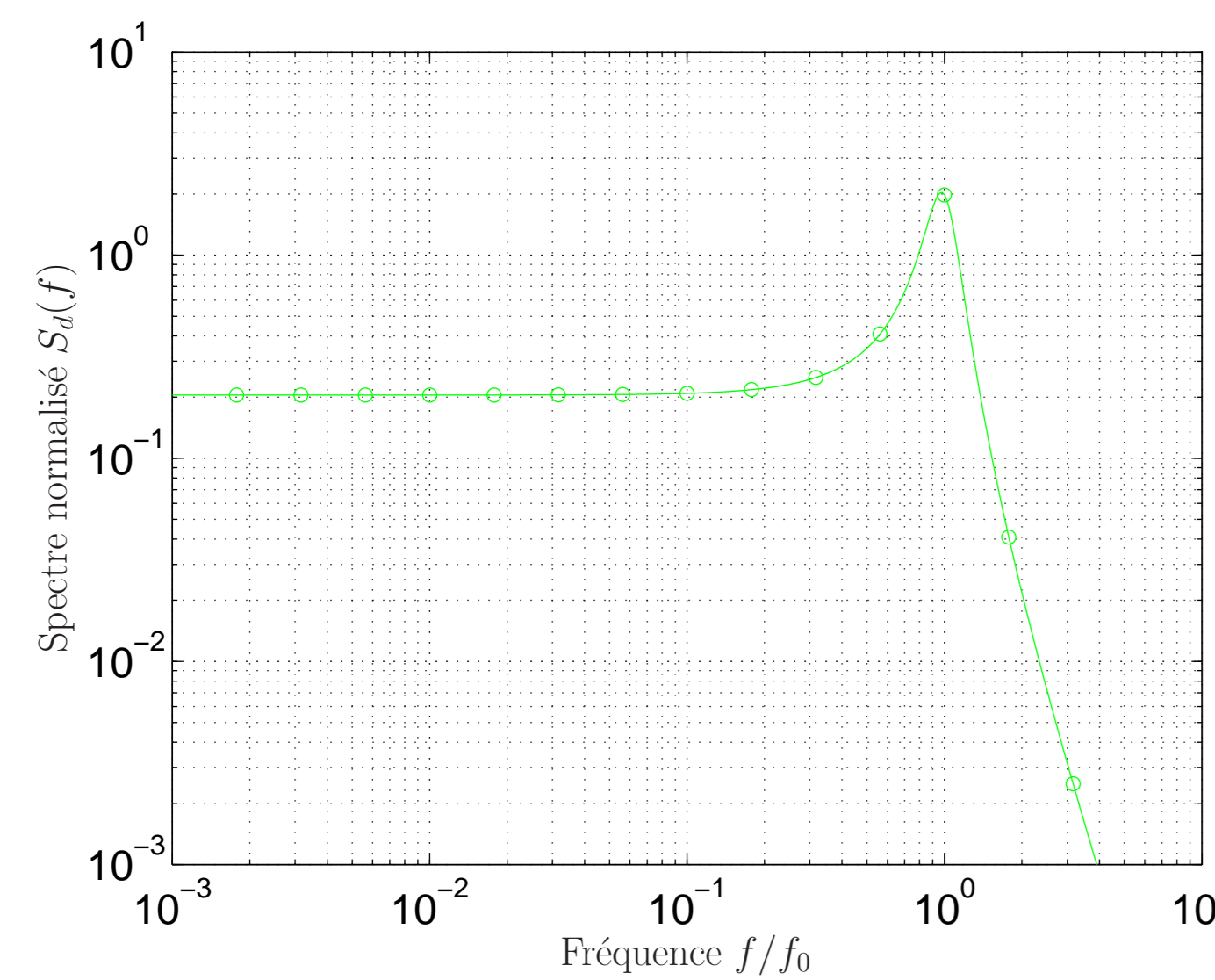
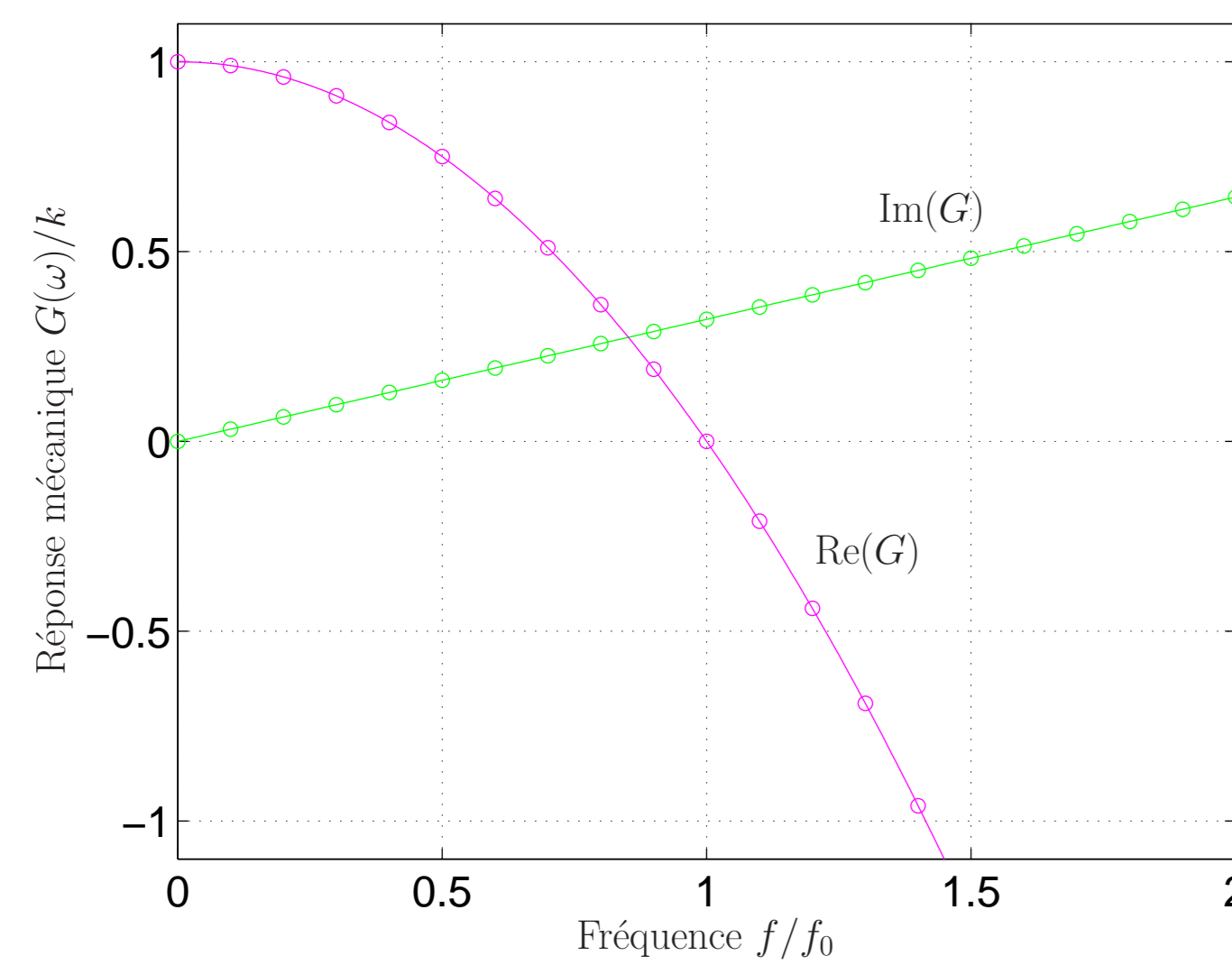
$$\frac{dH}{dz} = F$$

On définit dans l'espace de Fourier la fonction de réponse mécanique G par

$$G(\omega) = \frac{F(\omega)}{z(\omega)} = (k - m\omega^2 + i\gamma\omega)^{-1}$$

Le Théorème Fluctuation Dissipation permet alors de calculer la densité spectrale de puissance des fluctuations thermiques de z :

$$S_z(f) = \frac{\langle |z(\omega)|^2 \rangle}{\Delta f} = -\frac{4k_B T}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{G(\omega)} \right) = 4k_B T \frac{\gamma}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



Modèle de Sader

Pour un système spatialement étendu, l'application du Théorème Fluctuation Dissipation n'est pas triviale : d'une part il n'est pas immédiat de connaître la variable couplée à l'observable de mesure (la déflexion en bout de levier dans notre cas), d'autre part la modélisation de la dissipation visqueuse par l'environnement est un problème ardu. Nous utilisons une décomposition sur la base des modes normaux d'oscillation du levier et le modèle de Sader [1] pour résoudre ces difficultés.

Dans le cadre des équations d'Euler-Bernoulli décrivant la dynamique d'un levier rectangulaire, la déflexion $z(x, t)$ est régie par l'équation suivante :

$$\frac{k_c}{3} \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + m_c \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = L (F_{ext}(x, t) + F_{hydro}(x, t))$$

ou de façon équivalente dans l'espace de Fourier :

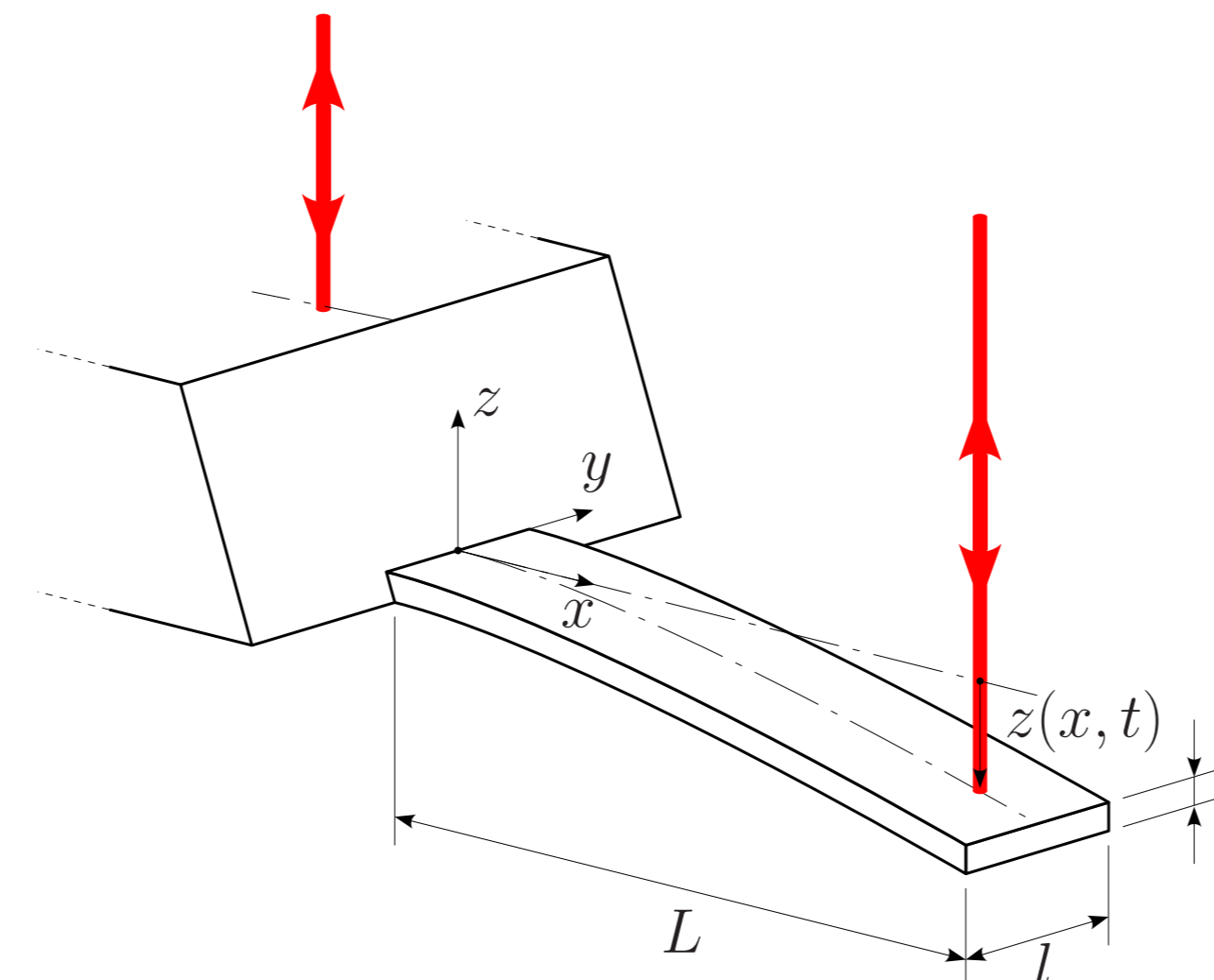
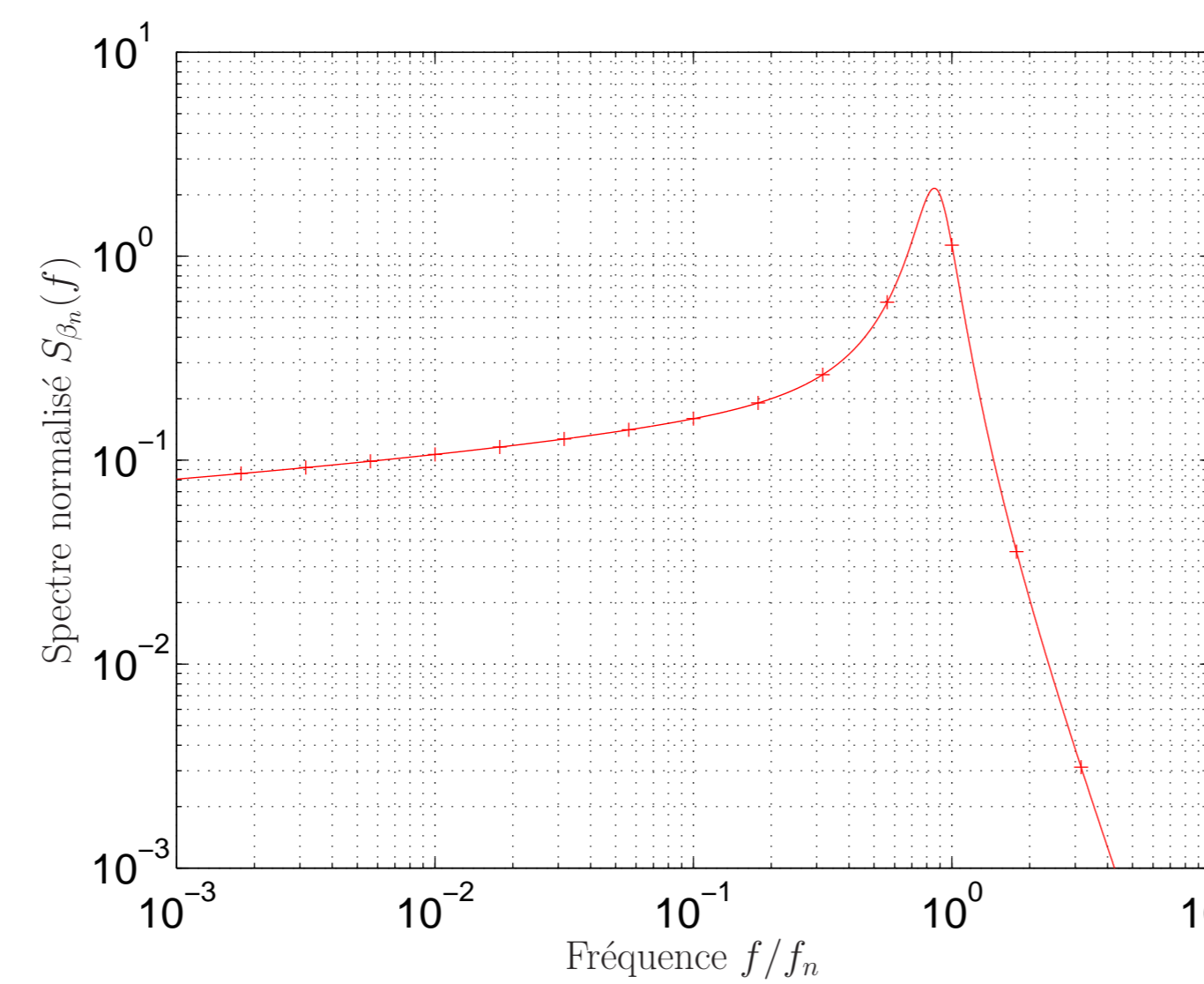
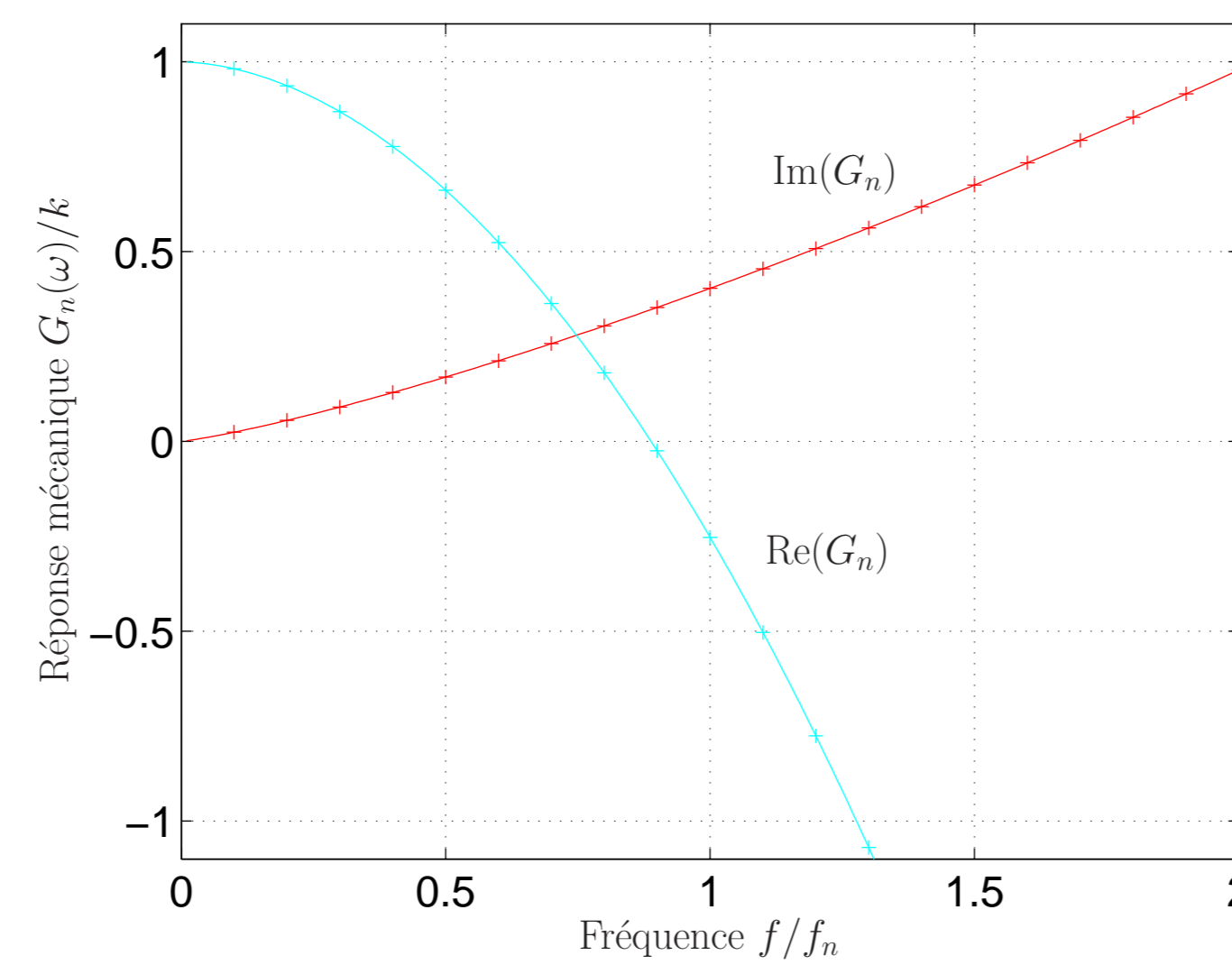
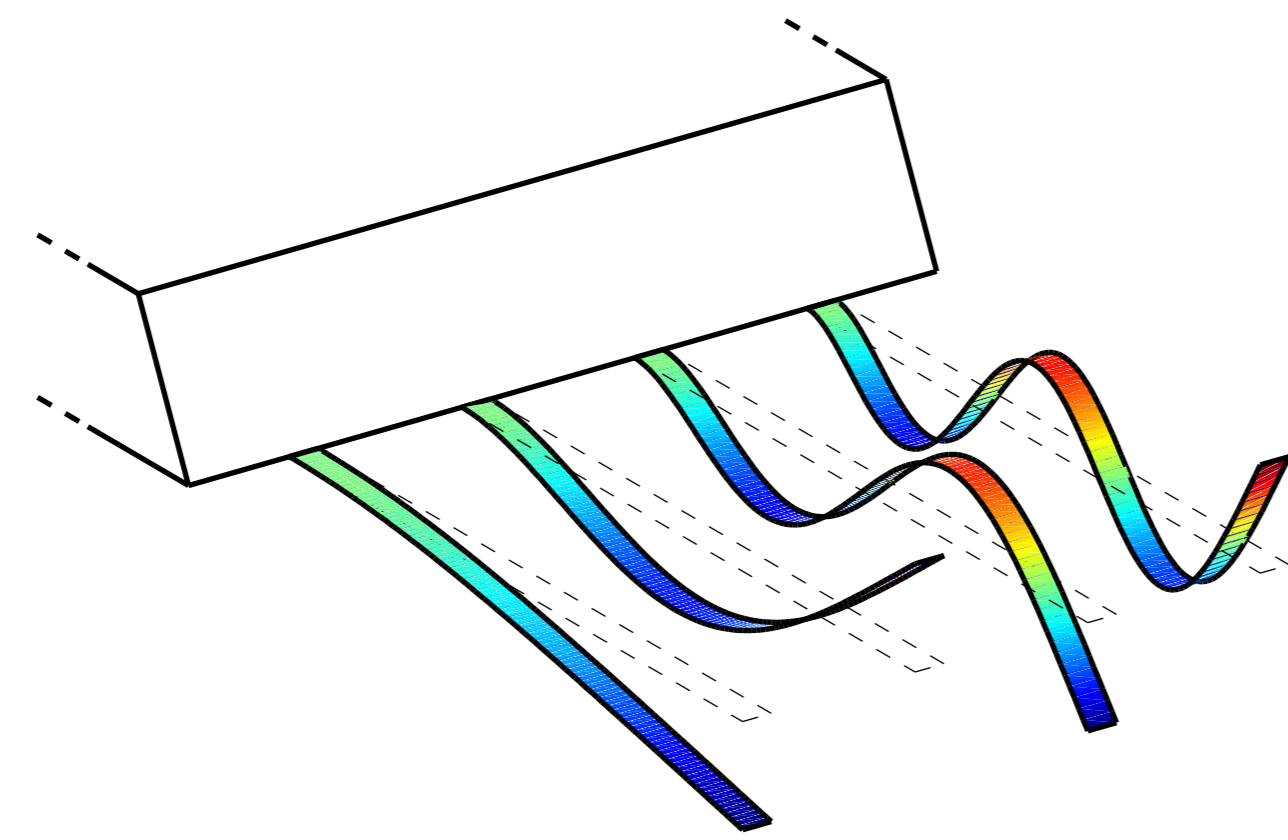
$$\frac{k_c}{3} \frac{d^4 z(x, \omega)}{dx^4} - m_c \omega^2 z(x, \omega) = L (F_{ext}(x, \omega) + F_{hydro}(x, \omega))$$

où F_{ext} et F_{hydro} sont les densités linéiques des forces appliquées au levier (forces extérieures et forces dues au fluide environnant). En l'absence de ces forces, la solution de cette équation est donnée par l'ensemble des modes propres $\phi_n(x)$ vérifiant les conditions aux limites d'une poutre encastrée libre :

$$\phi_n(x) = (\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x) + \frac{\cos \alpha_n + \cosh \alpha_n}{\sin \alpha_n + \sinh \alpha_n} (\sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x)$$

où $\alpha_1 = 1.875, \dots, \alpha_n = (n - 1/2)\pi$ sont solutions de $1 + \cos \alpha_n \cosh \alpha_n = 0$. Les modes normaux forment une base orthonormée des fonctions de x sur $[0, 1]$. Les pulsations ω_n de ces modes propres sont régies par les équations de dispersion :

$$m_c \omega_n^2 = \frac{\alpha_n^4 k_c}{3} = k_n$$



Dans l'espace de Fourier, Sader [1] propose d'écrire la force hydrodynamique sous la forme :

$$F_{hydro}(x, \omega) = m\omega^2 \tau(\omega) z(x, \omega) = m\omega^2 \tau_r(\omega) z(x, \omega) + im\omega^2 \tau_i(\omega) z(x, \omega)$$

où $\tau = \tau_r + i\tau_i$ est la fonction hydrodynamique d'un levier rectangulaire (à un facteur géométrique près). Pour résoudre l'équation différentielle liant la déflexion z à la force externe F_{ext} , nous projetons ces 2 quantités sur la bases des modes propres ϕ_n :

$$z(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\omega) \phi_n(x)$$

$$F_{ext}(x, \omega) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\omega) \phi_n(x)$$

Cette décomposition est également valable dans l'espace temporel, où l'amplitude $\beta_n(t)$ et le forçage $\eta_n(t)$ de chaque mode sont simplement la transformée de Fourier inverse de $\beta_n(\omega)$ et $\eta_n(\omega)$. Ces 2 variables sont couplées par le Hamiltonien H du système. En effet, calculons le travail infinitésimal δW de F_{ext} lorsque la déflexion change de δz :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L L dx F_{ext}(x, t) \delta z(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \delta \beta_n(t) \end{aligned}$$

Pour une transformation réversible $dH = \delta W$, et donc

$$\frac{\partial H}{\partial \beta_n} = \eta_n$$

Cette dernière équation démontre que l'amplitude β_n et le forçage η_n de chaque mode sont des variables couplées par le Hamiltonien du système, nous pouvons donc leur appliquer le Théorème Fluctuation Dissipation (TFD). Calculons tout d'abord la fonction de réponse mécanique G_n du mode n , en projetant l'équation décrivant la dynamique du levier sur la base des modes propres ϕ_n :

$$\left(\frac{k_c}{3} \alpha_n^4 - m_c \omega^2 [1 + \tau_r(\omega)] \right) \beta_n(\omega) = \eta_n(\omega)$$

d'où

$$\begin{aligned} G_n(\omega) &= \frac{\beta_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} \\ &= \frac{k_c}{3} \alpha_n^4 - m_c \omega^2 [1 + \tau_r(\omega)] - im_c \omega^2 \tau_i(\omega) \\ &= k_n - m_{eff}(\omega) \omega^2 - i\gamma_{eff}(\omega) \omega \end{aligned}$$

Chaque mode propre est donc équivalent à un oscillateur harmonique de raideur k_n , de masse $m_{eff}(\omega) = m_c [1 + \tau_r(\omega)]$ (masse du levier plus un terme inertiel additif correspondant au fluide déplacé par le levier), et de coefficient d'amortissement $\gamma_{eff}(\omega) = m_c \omega^2 \tau_i(\omega)$. La densité spectrale de puissance S_{β_n} de ses fluctuations d'amplitude s'écrit :

$$S_{\beta_n}(f) = \frac{4k_B T}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{G_n(\omega)} \right) = 4k_B T \frac{\gamma_{eff}(\omega)}{(k_n - m_{eff}(\omega) \omega^2)^2 + (\gamma_{eff}(\omega) \omega)^2}$$

Dans le modèle de Sader, la dissipation est homogène le long du levier, les bruits thermiques agissant sur chaque mode sont alors décorrélés. Les fluctuations de déflexion mesurées au point x sur le levier sont donc la somme de la contribution de chaque mode :

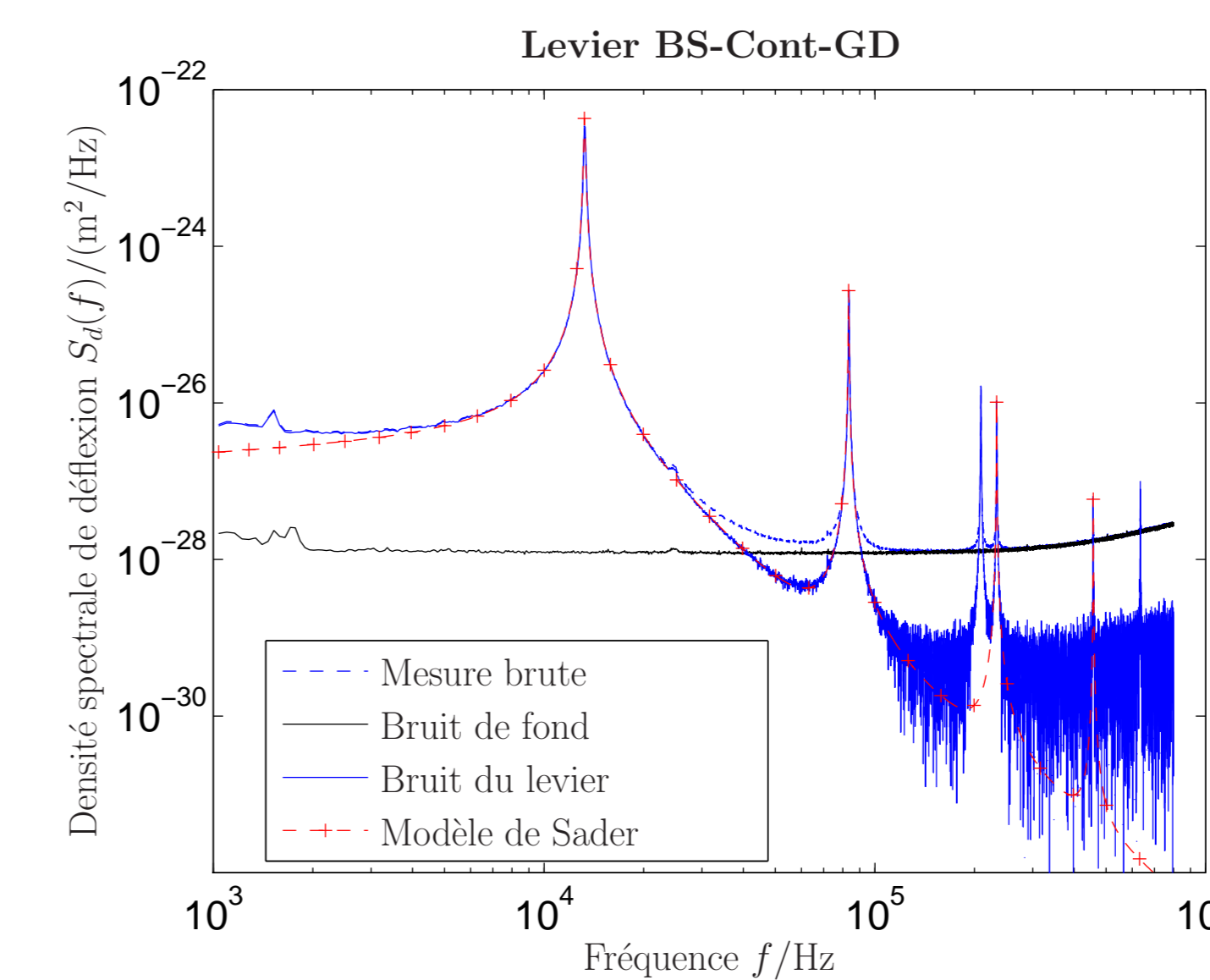
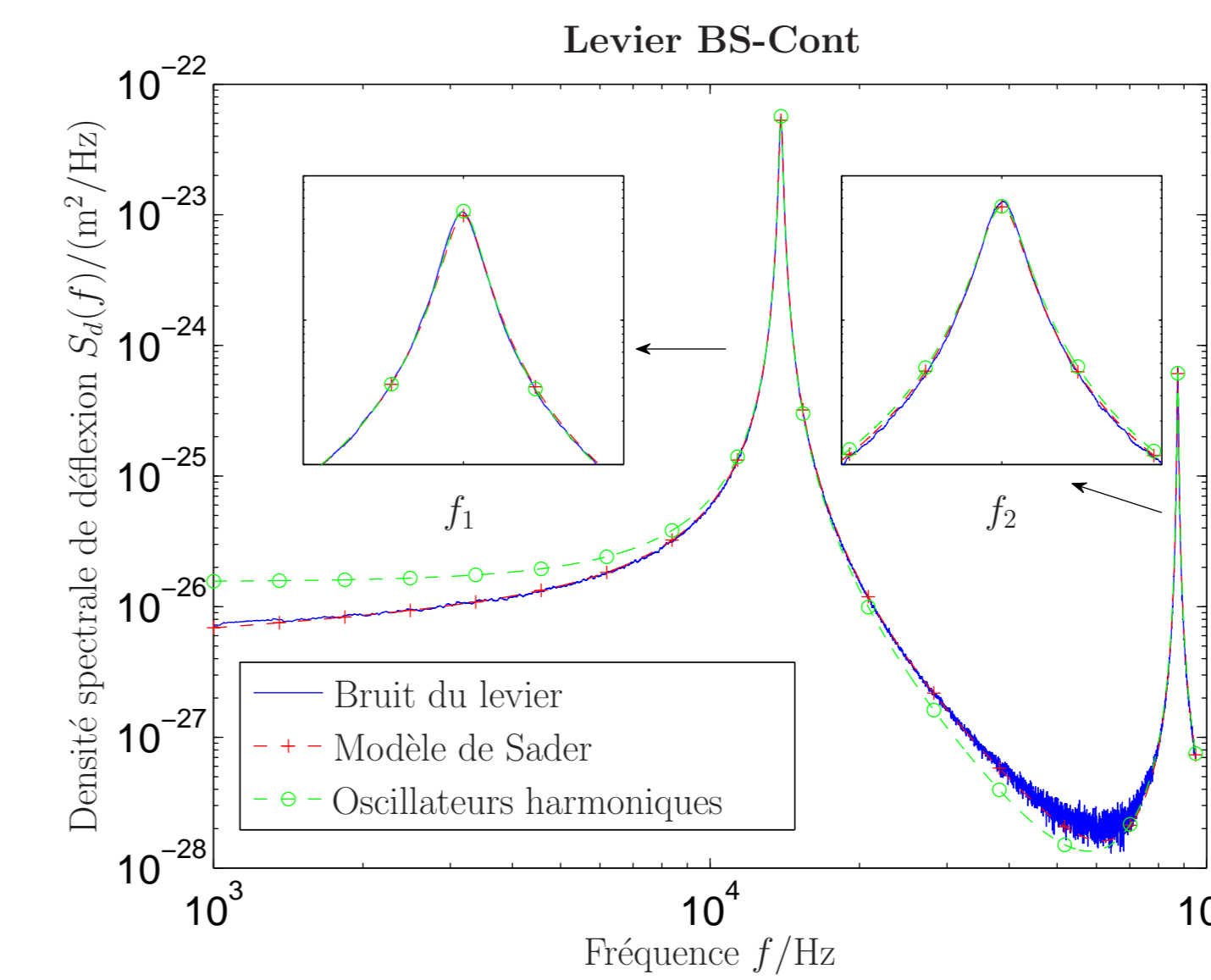
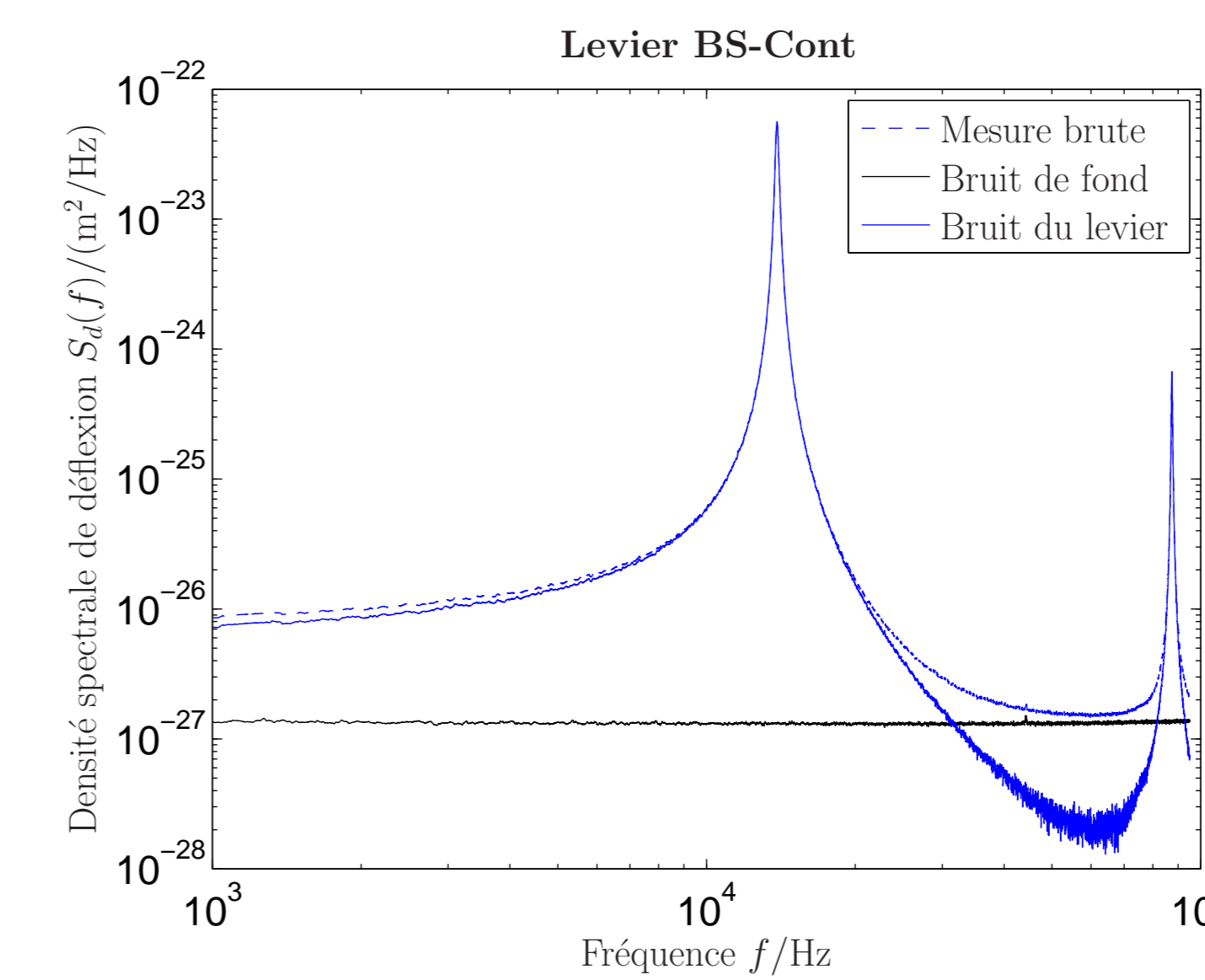
$$S_z(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{\beta_n}(\omega) |\phi_n(x)|^2$$

Validation expérimentale

Bruit thermique

À l'aide d'un interféromètre différentiel à quadrature de phase, nous mesurons le bruit thermique d'un levier AFM commercial en silicium sans revêtement (Budget Sensor BS-Cont : $L = 450 \mu\text{m}$, $l = 50 \mu\text{m}$, $e = 2 \mu\text{m}$). Dans le modèle de Sader, nous utilisons les valeurs tabulées pour la viscosité de l'air, le module de Young et la densité du silicium. Les paramètres géométriques du levier sont mesurés à l'aide d'un microscope optique, à l'exception de l'épaisseur du levier que nous ajustons pour reproduire les fréquences de résonance observées. Le modèle colle parfaitement aux mesures sur l'ensemble du spectre.

Le même résultat est obtenu sur un levier avec revêtement or pour les 4 premiers modes, en tenant en compte de la masse ajoutée par le revêtement.

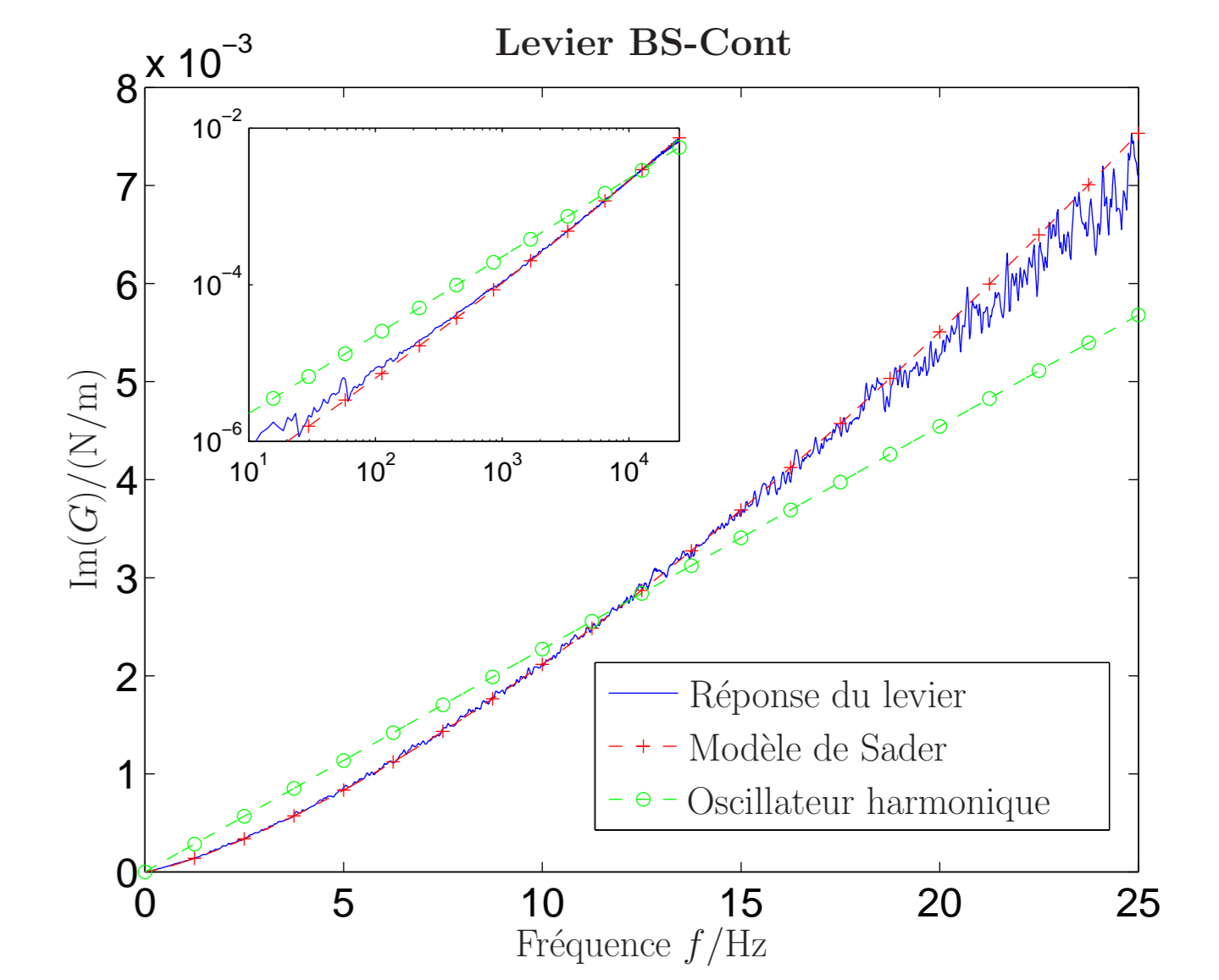
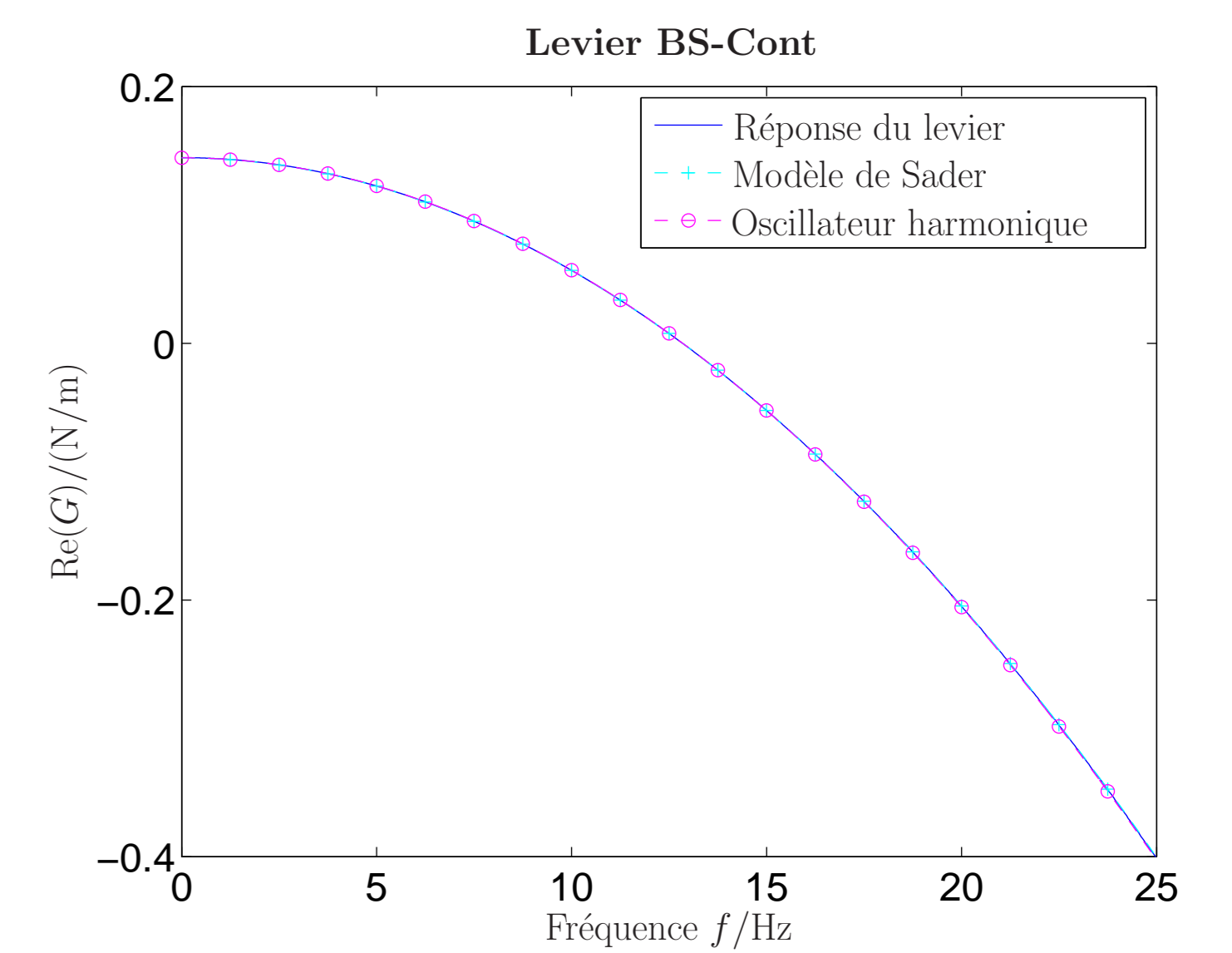


Réponse mécanique

Les relations de Kramers-Kronig relient à l'aide de relations intégrales la partie réelle et imaginaire de toute fonction de réponse linéaire $R(\omega)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}[R(\omega)] &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \Omega \frac{\text{Im}[R(\Omega)]}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \\ \text{Im}[R(\omega)] &= -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \Omega \frac{\text{Re}[R(\Omega)]}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \end{aligned}$$

Nous utilisons alors le théorème fluctuation-dissipation en sens inverse : la mesure d'un spectre sur le premier mode permet de mesurer la partie imaginaire de la fonction de réponse $\text{Im}[1/G(\omega)]$, avec une très bonne précision sur une large bande de fréquence. À l'aide des relations de Kramers-Kronig (avec $R = 1/G$), on reconstruit alors $\text{Re}[1/G(\omega)]$, et donc $G(\omega)$ [3]. La mesure de la réponse ainsi obtenue est en excellent accord avec le modèle de Sader.



Références

- [1] J. E. Sader, *Journal of Applied Physics*, **84**, 64, 1998.
- [2] L. Bellon, *Journal of Applied Physics*, **104**, 104906, 2008.
- [3] P. Paolino, L. Bellon, *submitted to Nanotechnology* arXiv :0902.3134v1 [cond-mat.mtrl-sci]

Contact

Ludovic.Bellon@ens-lyon.fr
http://perso.ens-lyon.fr/ludovic.bellon/

