LP33 : Interférences à 2 ondes en optique

24 mars 2019

Clémentine Rouvière & Corentin Pacary

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *Optique*, **Huard** ⟶ Tout
✍ *Optics*, **Hecht** ⟶ Tout aussi

Prérequis

➢ Modèle scalaire de la lumière

➢ Diffraction

Table des matières

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié une des manifestations du caractère ondulatoire de la lumière à travers la diffraction. Grâce aux connaissances sur le modèle scalaire de la lumière, nous allons en étudié une autre : les interférences.
Vous avez rencontré ce phénomène dans de nombreux domaines. On peut citer par exemple le cas de vagues à la surface de l'eau : leur superposition dépend de si les vagues sont en phase ou non..

Eclairer un écran avec deux lampes.

Les interférences sont facilement observables en mécanique et en acoustique mais le cas des ondes électromagnétiques est plus complexe. En effet, si l'on éclaire un écran avec deux lampes identiques, l'éclairement sur l'écran est homogène. Cependant, on retrouve des situations où des ondes lumineuses interfèrent : les irisations sur les bulles de savon ou les couleurs des lames minces notamment.
Quelles sont les conditions pour observer des interférences ? J'aborderai aussi les problèmes de cohérence qu'on peut rencontrer pour observer une figure d'interférences.

1 Superposition de deux ondes lumineuses

1.1 Détecteurs

Une première spécificité du champ électromagnétique, et plus précisément de la partie visible du spectre électromagnétique, est le temps sur lequel le champ $\mathbf{E}$ varie dans le temps. $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^{-7}} = 5 \times 10^{14}$Hz.

Or, les capteurs que nous possédons ont des temps de réponse plus élevés à cause des procédés physiques et/ou biologiques qu'ils mettent en jeu :

Capteur	Temps de réponse T_d(s)
Oeil	10^{-1}
Appareil photo	10^{-3}
Photomultiplicateur	10^{-9}
Photodiode	10^{-12}

Donc $T_d \gg 1/f$ et en général, ce temps de réponses est aussi supérieur aux temps caractéristiques de fluctuation de l'amplitude et de la phase de la lumière émise par une source chaotique (type QI ou lampes à vapeur). Le champ réel ne nous est donc pas accessible, seulement sa valeur moyenne, contrairement au cas des vagues.

C'est pourquoi on définit une grandeur qui nous est plus accessible que le champ électrique ou magnétique, l'intensité vibratoire I : $I(M) =< ||E(M,t)||^2 >_{T_d}= \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} ||E(M,t)||^2 dt$, ou encore dans le cadre du modèle scalaire de la lumière $I =< s^2 >$ où $s(M,t) = A(M,t)\cos(\omega t - \phi(M,t))$ est la vibration lumineuse.

Maintenant qu'on en sait un peu plus sur les détecteurs qui nous permettent d'étudier la lumière, étudions ce qu'il se passe lorsque deux ondes lumineuses se superposent.

1.2 Superposition de deux ondes dans le modèle scalaire

Supposons qu'il existe deux ondes planes monochromatiques issues de deux sources S_1 et S_2 qui vont se superposer en un point M :

$$s_1(M,t) = A_1(M)\cos(\omega_1 t - \phi_1(M,t)) \qquad s_2(M,t) = A_2(M)\cos(\omega_2 t - \phi_2(M,t)) \tag{1}$$

où $\phi_i = \mathbf{k}_i.\mathbf{r} - \epsilon_i$ pour une propagation dans un milieu homogène, isotrope avec ϵ phase à l'émission. D'après le théorème de superposition, la vibration résultante est $s(M,t) = s_1 + s_2$, et on définit l'éclairement : $\mathcal{E}_i = KI_i = K < s_i^2 >= \frac{1}{2}A_i^2$.
Il y a deux cas de figure : soit il n'y pas d'interférences comme c'était le cas quand j'ai éclairé l'écran avec les deux lampes, alors on a $I = I_1 + I_2$, soit il y a interférences, comme dans le montage que j'ai présenté ensuite, et alors $I \neq I_1 + I_2$. C'est cette définition qu'on appelle interférences, et si deux sources permettent d'avoir $I \neq I_1 + I_2$, alors elles sont dites cohérentes.

Et en se rappelant que l'on accès qu'aux valeurs moyennes temporelles, on a alors :

$$\mathcal{E} = K < (s_1 + s_2)^2 >= K < s_1 >^2 + K < s_2 >^2 + 2K < s_1 s_2 > \tag{2}$$
$$= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2K < s_1 s_2 > \tag{3}$$

L'éclairement est la somme des éclairements individuels des deux ondes auxquels est ajouté un terme d'interférences. On peut essayer d'exprimer plus précisément le terme d'interférence :

$$< s_1(M,t)s_2(M,t) > = A_1(M)A_2(M) < \cos(\omega_1 t - \phi_1)\cos(\omega_2 t - \phi_2) >_{T_d} \tag{4}$$
$$= \frac{A_1 A_2}{2}(< \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \phi_1 - \phi_2) > + < \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \phi_1 + \phi_2) >) \tag{5}$$

Les termes du type $< \cos \omega t + \phi >$ sont nuls sauf si $\omega = 0$, on a donc une première condition d'interférence :

Il ne peux y avoir d'interférences qu'entre deux ondes de même fréquence

On prend donc $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, et en notant que : $A_1 = 2\sqrt{\mathcal{E}_1}$. On a :

$$2K < s_1 s_2 > = K A_1 A_2 < \cos \phi_2(M,t) - \phi_1(M,t) > \tag{6}$$
$$= K A_1 A_2 < \cos \mathbf{k}_2.\mathbf{r} - \epsilon_2 + \mathbf{k}_1.\mathbf{r} - \epsilon_1 > \tag{7}$$

Or pour deux sources indépendantes, les phases à l'émission sont indépendantes (et décorrélées) et donc la moyenne temporelle annule le terme d'interférences.

Il n'y a pas d'interférences en optique entre deux ondes monochromatiques provenant de sources différentes

. Il faut donc faire interférer deux ondes émises par la même source, alors $\epsilon_1(t) = \epsilon_2(t)$. On ne garde donc que le terme d'origine propagative :

$$< \cos \phi_2(M,t) - \phi_1(M,t) >_{T_d} = \cos(\Delta\phi(M)) \tag{8}$$

On obtient alors la **formule des interférences**, ou formule de Fresnel :

$$\boxed{\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}\cos(\Delta\phi(M))} \tag{9}$$

1.3 Quelques concepts liés aux interférences

La notion centrale des interférences est donc la différence de phase $\Delta\phi$ entre les deux ondes. Si $\cos(\Delta\phi) > 0$ alors on parle d'interférences constructives : $\mathcal{E}(M) > \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$. Et si $\cos(\Delta\phi) > 0$ alors on parle d'interférences destructives : $\mathcal{E}(M) < \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$. Cela se traduit par des régions de l'espace brillantes et sombres, on parle alors de *franges d'interférences*. L'éclairement est maximum quand $\Delta\phi = 2m\pi$ et minimal quand $\Delta\phi = (1 + 2m)\pi$, on définit alors l'*ordre d'interférences*

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \tag{10}$$

L'éclairement est maximal quand $p = m \in \mathbb{Z}$ entier, minimal quand $p = m + \frac{1}{2}$ demi-entier.

On a vu que dans le cas d'une propagation dans un milieu homogène, isotrope , sachant que les deux ondes ont la même pulsation ω et que $k = n\frac{\omega}{c} = nk_0 = n\frac{2\pi}{\lambda}$ (relation de dispersion dans un milieu d'indice n). :

$$\Delta\phi(M) = \mathbf{k}_2.\mathbf{r} - \mathbf{k}_1.\mathbf{r} \qquad = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2 \frac{\mathbf{k}_2}{\|k_2\|}.\mathbf{r} - n_1 \frac{\mathbf{k}_1}{\|k_1\|}.\mathbf{r}) \tag{11}$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}(n_2 r_2 - n_1 r_1) \tag{12}$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}\delta \tag{13}$$

On définit aussi la *différence de marche*, qui est la différence de chemin optique parcouru par les deux ondes :

$$\delta = (S_2 M) - (S_1 M) = \frac{\Delta\phi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \tag{14}$$

Tableau récapitulatif, $m \in \mathbb{Z}$:

	Maximum d'intensité	**Minimum d'intensité**
$\Delta\phi$	$2m\pi$	$(1 + 2m)\pi$
p	entier	demi-entier
δ	λ	$(m + 1/2)\lambda$

On définit aussi le contraste, variant entre 0 et 1 donnant la visibilité des franges d'interférences (l'écart à l'éclairement uniforme) :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \tag{15}$$

Ainsi, en réécrivant la formule de Fresnel, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M))(1 + C\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\delta)) \tag{16}}$$

On a définit des grandeurs et des concepts, qui peuvent paraître abstraits pour le moment, on va donc l'appliquer à une configuration expérimentale.

2 Trous d'Young et source idéale

2.1 Cadre de l'étude

Observations de la figure d'interférences avec des trous d'Young.

Je vais donc vous montrer le montage historique qui a permis d'obtenir des interférences, c'est l'expérience des trous d'Young. Elle a été réalisé en 1801 par l'anglais Thomas Young qui était docteur en médecine mais qui s'intéressait aussi à de nombreux domaines comme la physique et le déchiffrage des hiéroglyphes. A cette époque, on ne comprenait pas l'apparition de couleurs sur des lames minces éclairées en lumière blanche, on pensait aussi que la lumière était constituée de corpuscules. En fait, le phénomène d'interférences pour les ondes mécaniques était déjà connu, Thomas Young proposa alors que la lumière était de nature ondulatoire, que le phénomène d'interférences s'y appliquait et l'illustra avec cette expérience.
Une source lumineuse, ici un laser, éclaire deux trous circulaires identiques, les trous d'Young, ces deux trous à la bonne taille pour diffracter la lumière ce qui va créer une zone où les ondes issues des deux trous vont se rencontrer. C'est le champ d'interférences. On peut observer plusieurs choses sur l'écran placé à une distance D des deux trous. Tout d'abord on retrouve la figure d'Airy, caractéristique de la figure de diffraction d'un trou. Ensuite, en regardant de plus près on peut voir des bandes noires qui traverse les cercles concentriques, c'est la figure d'interférences, attendue d'après le calcul de la partie précédente. Cette figure d'interférences apparaît donc du fait du déphasage entre les ondes traversant les deux trous, c'est donc la mise en évidence du caractère ondulatoire de la lumière.

Au passage, on remarque que lorsque je bouge l'écran, les franges sont toujours visibles, on dit qu'elles ne sont pas localisées.

Vous pouvez remarquer que nous nous sommes placés dans une configuration particulière pour pouvoir observer des interférences avec des ondes lumineuses, on a bien plus travaillé que pour obtenir des interférences avec des vagues. Notre source primaire de lumière est un Laser He-Ne, source ponctuelle qui produit une lumière supposée monochromatique. Le faisceau est élargi afin de pouvoir recouvrir les deux trous. On utilise ces deux trous, placés symétriquement par rapport à "l'axe optique", comme source secondaires S_1 et S_2.
On se place dans l'hypothèse où la distance D entre l'écran et les trous est grand devant la longueur d'onde, et devant l'écart b entre les deux trous.
Enfin, on suppose que des ondes issues de S_1 et des rayons issus de S_2 se rencontrent dans le champ d'interférences et que ce sont des ondes localement planes.

Comme on l'a souligné dans la première partie, il faut que les deux ondes qui interfèrent soit issues d'une même source primaire, j'ai alors choisi de mettre en place un montage de division du front d'onde.

Maintenant qu'on sait avec quel type de montage on a des interférences, familiarisons-nous avec la figure obtenue, pourquoi observe-t-on des franges rectilignes et non pas une autre forme ?

2.2 Interprétation de la figure d'interférences

Comme nous l'avons mis en évidence dans la première partie, la figure d'interférence est en fait codée dans le déphasage ou la différence de marche entre les ondes issues des sources secondaires. Nous allons alors calculer la différence de marche dans cette configuration.

Calcul de la différence de marche :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_1M) - (SS_2M) = (SS_1) - (SS_2) + (S_2M) - (S_1M) \tag{17}$$

Or on considère que la source est située sur l'axe optique et S_1 et S_2 sont réparties symétriquement : $(SS_1)-(SS_2) = 0$. De plus, en prenant l'indice de l'air, homogène et isotrope, égal à 1, on a $(AB) = nAB = AB$ soit :

$$\delta = S_2M - S_1M \tag{18}$$

Il reste donc à calculer les distances S_1M et S_2M :

$$S_2M = \sqrt{D^2 + (x+\frac{a}{2})^2 + y^2} = D\sqrt{1 + (\frac{y}{d})^2 + (\frac{x+\frac{a}{2}}{D})^2} \simeq D(1 + \frac{1}{2}\frac{(x+\frac{a}{2})^2 + y^2}{D^2}) \quad \simeq D + \frac{x^2+y^2+\frac{a}{2}^2}{D} + \frac{xa}{2D} \tag{19}$$

$$S_1M = \sqrt{D^2 + (x-\frac{a}{2})^2 + y^2} = \dots \quad \simeq D + \frac{x^2+y^2+\frac{a}{2}^2}{D} - \frac{xa}{2D} \tag{20}$$

On a finalement :

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}} \tag{21}$$

On peut déduire l'éclairement, on considère que les deux trous de même taille émettent la même intensité : $\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0(1+\cos\frac{2\pi\frac{ax}{D}}{\lambda})$.

On remarque que l'éclairement est invariant selon y : franges rectilignes, on pourrait utiliser des fentes allongées selon y à la place des trous d'Young pour avoir plus de lumière. On retrouve la même figure d'interférences, des franges alternativement sombres et brillantes mais cette fois la figure de diffraction à changer : on voit des taches, caractéristiques de la figure de diffraction d'une fente.

Les maximum d'éclairement sont situés en $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = p2\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ l'ordre d'interférence, soit $\frac{\delta}{\lambda} = p$ soit finalement $x_p = p\frac{\lambda D}{a}$. Deux maximum (ou minimum) sont espacés d'une distance constante, appelée *interfrange* :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}} \tag{22}$$

AN : $D = 2\ m$, $\lambda = 632\ nm$, $a = 200\ $ donc $i = 6.3\ mm$.

Mesure d'un interfrange On mesure l'interfrange donné par les trous d'Young éclairés par un laser. Comparaison à la valeur théorique

Que se passe-t-il dans la vraie vie quand les sources ne sont pas ponctuelles ou monochromatiques ? (on observe les irisations sur les bulles de savon alors qu'elles sont éclairées par lumière blanche et non avec un laser ...)

3 Fentes d'Young et sources réelles

3.1 Source étendue - Cohérence spatiale

Fentes d'Young et source étendue

✍ ⏲

- Lampe à vapeur de sodium
- Fente réglable
- Bifente d'Young
- Caméra Ximea

Fente réglable éclairée par une lampe à vapeur de sodium avant la bifente. On commence avec la fente la plus petite possible et on observe ce qu'il se passe quand on ouvre la fente : les franges des ordres supérieurs disparaissent, brouillage. Interprétons ce phénomène.

On commence par décaler la source S' d'une distance X par rapport au plan de symétrie des fentes. On fait les mêmes hypothèses que dans le développement précédent pour les trous d'Young : $l \gg X, Y, a$. Et on reprend le développement précédent :

$$\delta' = (S'M)_2 - (S'M)_1 = (S'S_1) - (S'S_2) + (S_2M) - (S_1M) = \delta + S'S_1 - S'S_2 \tag{23}$$

Et :

$$S'S_2 = \sqrt{\ell^2 + (X + \frac{a}{2})^2 + Y^2} \simeq \ell(1 + \frac{1}{2}\frac{(X + \frac{a}{2})^2 + Y^2}{\ell^2}) \tag{24}$$

$$S'S_1 = \sqrt{\ell^2 + (X - \frac{a}{2})^2 + Y^2} \simeq \ell(1 + \frac{1}{2}\frac{(X - \frac{a}{2})^2 + Y^2}{\ell^2}) \tag{25}$$

$$\boxed{\delta' = \delta + \frac{aX}{\ell}} \tag{26}$$

Cela correspond à un décalage de la figure d'interférence sur l'écran, on peut le voir en remarquant que cela correspond à faire un changement de variables $x' = x + \frac{DX}{\ell}$.

Remarque : Si S' est éloignée selon z ou y, il n'y a pas de changement pour la figure d'interférence car S' est toujours équidistante des deux fentes.

Pour construire une source étendue, on part d'une source ponctuelle S à laquelle on ajoute des sources S' de largeur dX. On fait l'hypothèse que toutes les sources sont indépendantes. La figure totale est donc la somme des figures d'interférences produites par chacune des sources.
Une source S' émet une intensité lumineuse $dI_S = i_0 dX$, donc l'intensité totale émise par toute la source, de largeur b est $I_S = i_0 b$.
L'intensité reçu pour un point M de l'écran dû à une source S' est, d'après la formule de Fresnel :

$$dI = 2i_0 dX\big(1 + \cos\big(\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{aX}{\ell} + \frac{ax}{D})\big)\big). \tag{27}$$

Ainsi, l'intensité reçue par le point M, issue de la source étendue est :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2i_0 \int_{-b/2}^{b/2} \big(1 + \cos\big(\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{aX}{\ell} + \frac{ax}{D})\big)\big) dX && (28)\\ &= 2i_0[X + \frac{\lambda\ell}{2\pi a}\sin\big(\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{aX}{\ell} + \frac{ax}{D})\big)]_{-b/2}^{b/2} && (29)\\ &= 2i_0 b[1 + \frac{\lambda\ell}{2\pi ab}\big(\sin\big(\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{ab}{2\ell} + \frac{ax}{D})\big) - \sin\big(\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{-ab}{2\ell} + \frac{ax}{D})\big)\big)] && (30)\\ &= 2I_S[1 + sinc(\frac{\pi ab}{\lambda\ell})\cos\big(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\big)] && (31) \end{aligned}$$

Le contraste est alors :

$$\boxed{\mathcal{C} = |sinc(\frac{\pi ab}{\lambda\ell})|.} \tag{32}$$

Si $\frac{ab}{\lambda\ell} >> 1$, il n'y a pas d'interférences : brouillage. C'est pourquoi lorsque j'ai trop ouvert la fente, les interférences ont disparu.

Remarques
Il existe alors une condition sur la taille de la source : $b < \frac{\lambda \ell}{a}$.
ODG : $\lambda = 632\ nm$, $l =$, $a = 200$ donc $b =$

A noter aussi que maintenant que la source est étendue, les franges d'interférences sont localisées.

Maintenant qu'on a étudié l'influence de l'élargissement spatial de la source, intéressons-nous à ce qu'il se passe si la source n'est pas totalement monochromatique.

3.2 Source polychromatique - Cohérence temporelle

Fentes d'Young et lumière blanche

✍ ⏲

- Lampe QI
- Fente réglable
- Filtres interférentiels
- Bifente d'Young

Lampe QI. D'abord observation de la figure d'interférences avec un filtre interférentiel pour montrer qu'il n'y pas de brouillage même si la source n'est pas parfaitement ponctuelle. Puis lumière blanche : brouillage.

Une source lumineuse que ce soit une lampe spectrale ou un laser n'est jamais monochromatique et différentes raisons expliquent l'élargissement spectral, notamment l'effet Doppler et les collisions entre atomes. Déterminons l'influence de la largeur spectrale sur le contraste de la figure d'interférences. On suppose que le spectre de la source peut être modélisé par une porte, de hauteur A et entre deux fréquences ν_1 et ν_2. Ici encore, on peut diviser la source en sous-sources mais cette fois dans l'espace des fréquences, l'intensité émise par la lampe pour un intervalle spectral $d\nu$ est : $dI_S = Ad\nu$. Alors l'intensité reçue par un point M de l'écran pour cet intervalle $d\nu$ est : $dI = 2Ad\nu\big(1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\big)$ avec $\lambda = c/\nu$.
Donc l'intensité reçue par le point M due à la totalité du spectre est :

$$I(M) = 2A\int_{\nu_1}^{\nu_2}\big(1+\cos(\frac{2\pi\nu}{c}\frac{ax}{D})\big)d\nu \tag{33}$$

$$= 2A\Delta\nu\big(1+\frac{cD}{\pi ax\Delta\nu}\cos(\frac{2\pi ax}{cD}\frac{\nu_1+\nu_2}{2})\sin(\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD})\big) \tag{34}$$

$$= 2I_S\big(1+sinc(\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD})\cos(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D})\big) \tag{35}$$

où $\lambda_0 = c/\nu_0$ et $\nu_0 = \frac{\nu_1+\nu 2}{2}$. Le contraste est alors :

$$\boxed{\mathcal{C} = |sinc(\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD})|. \tag{36}}$$

On a donc un brouillage pour $\frac{ax\Delta\nu}{cD} = 1$ i.e. pour $\delta = c/\Delta\nu$. On peut donc définir un temps $\tau_C = 1/\Delta\nu$ qu'on appelle temps de cohérence et une distance $L_C = c\tau_C$ qu'on appelle longueur de cohérence : il faut $\delta < L_C$ pour avoir interférences.
ODG : Laser $L_C = 30\ cm$, et lampe spectrale $L_C = 1\ cm$

Ainsi, pour de la lumière blanche, chaque longueur d'onde va avoir sa figure d'interférences, comme deux fréquences différentes ne peuvent interférer, toutes les figures d'interférences vont se superposer : apparition de teintes de Newton et spectre cannelé, d'où les différentes couleurs qui apparaissent sur des lames minces et des bulles de savon éclairées en lumière blanche. Contrairement au cas de la source étendue, le contraste dépend de x. Dans une situation de décohérence spatiale, le brouillage était visible sur toute la figure mais pour la décohérence temporelle comme on l'a vu, le brouillage n'est visible que pour les ordres supérieurs et non pas dans la tache centrale.

Conclusion

Interférences sous certaines conditions : même fréquence, sources cohérentes. Réalisation avec une source idéale et étude des conséquences quand élargissements spatial et temporel, qui ne sont en fait que deux facettes d'un même phénomène : brouillage de la figure d'interférences.
Nombreuses applications en métrologie notamment mais phénomène remarquable fondamentalement car permet de mettre en évidence la nature ondulatoire de la lumière au XIXe siècle. Un siècle plus tard, cette même expérience a permis de mettre en évidence la nature ondulatoire de la matière : fentes d'Young et électrons.