DEVOIR MAISON 1 – 17 janvier 2014

Exercice 1. Prouver avec un dessin que les groupes d'homotopie $\pi_d(X,x)$ sont abéliens en degré $d \geq 2$, et que les groupes d'homotopie relatifs $\pi_d(X,Y,x)$ sont abéliens en degré $d \geq 3$.

Exercice 2. Trouver la relation entre les groupes d'homotopie d'un produit $\pi_d(X\times Y,(x,y))$ et les groupes d'homotopie des facteurs $\pi_d(X,x)$ et $\pi_d(Y,y)$.

Exercice 3. Soit $Y \subset X$ une inclusion des espaces topologiques, et $y \in Y$. On note $i : Y \hookrightarrow X$ et $j : X = (X,\varnothing) \hookrightarrow (X,Y)$ les applications d'inclusion. Celles-ci induisent la suite d'homomorphismes suivante en homotopie

$$\pi_d(Y,y) \xrightarrow{i_*} \pi_d(X,y) \xrightarrow{j_*} \pi_d(X,Y,y).$$

Prouver qu'il s'agit d'une suite exacte, c'est-à-dire $\ker(j_*) = \mathrm{im}(i_*)$. Maintenant, on identifie le cube I^{d-1} avec les sous espaces $I^{d-1}\times\{0\} \subset I^d$, et pour chaque application continue $u : (I^d, \partial I^d, J^{d-1}) \to (X,Y,y)$ on définit

$$\partial u := u|_{I^{d-1}} : (I^{d-1}, \partial I^{d-1}) \to (Y,y).$$

On note ∂_* l'homomorphisme en homotopie induit par ∂. Celui-ci permet d'étendre la suite ci-dessus de la façon suivante :

$$... \xrightarrow{j_*} \pi_{d+1}(X,Y,y) \xrightarrow{\partial_*} \pi_d(Y,y) \xrightarrow{i_*} \pi_d(X,y) \xrightarrow{j_*} \pi_d(X,Y,y) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{d-1}(Y,y) \xrightarrow{i_*} ...$$

Prouver qu'il s'agit d'une suite exacte, c'est-à-dire $\ker(i_*) = \mathrm{im}(\partial_*)$ et $\ker(\partial_*) = \mathrm{im}(j_*)$.

Exercice 4. Soit $\partial_d : C_d(X) \to C_{d-1}(X)$ l'application de bord entre les groupes des chaînes. Prouver que $\partial_d \circ \partial_{d+1} = 0$.

Exercice 5. Soient X_1 et X_2 deux composantes connexes par arcs d'un espace topologique. Montrer la relation entre les homologies $H_d(X_1 \cup X_2)$, $H_d(X_1)$, et $H_d(X_2)$. Est-ce qu'une relation analogue vaut pour les groupes d'homotopie ?

Exercice 6. Soient $A, B \subset X$ deux sous-espaces telles que leurs intérieurs couvrent X, c'est-à-dire $X = A^\circ \cup B^\circ$. Soient $i : A\cap B \hookrightarrow A$ at $j : A \cap B \hookrightarrow B$ les applications d'inclusion, et $\psi : C_d(A) \oplus C_d(B) \to C_d(X)$ l'homomorphisme défini par $\psi(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2$. Quand on passe à l'homologie, ces applications induisent des homomorphismes. Il existe un autre homomorphisme $\partial_* : H_d(X) \to H_{d-1}(A\cap B)$ qui rende la suite suivante, appelée suite de

Mayer-Vietoris, exacte :

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_d(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_d(A) \oplus H_d(B) \xrightarrow{\psi_*} H_d(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{d-1}(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} \ldots$$

Utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour calculer les groupes d'homologie des sphères S^n.

Indication. Voir la sphère comme l'union de deux boules ouvertes, et utiliser les faits que $H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1) \cong G$ (où G est le groupe de coefficients de l'homologie) et $H_d(S^1) = 0$ pour $d > 1$.

Exercice 7. Utiliser la suite exacte longue du couple $\partial B^n \subset B^n$ et le calcul de l'homologie de la sphere de l'exercise précédent pour calculer l'homologie relative $H_d(B^n, \partial B^n)$.

Exercice 8. Pour un espace topologique X, en utilisant la relation d'ordre $\prec$ en homologie on peut définir l'invariant topologique

$$HL(X) := \max \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists\, \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in H_*(X) \text{ telles que } 0 \neq \sigma_1 \prec \ldots \prec \sigma_k \right\}.$$

Quelle est la relation entre $HL(X)$ et la cup-longueur $CL(X)$?