DEVOIR MAISON 4 – 21 février 2014

Exercice 1. Considérons une fonction lagrangienne autonome $L : \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$ qui soit quadratique et convexe le long le fibres du tangent, i.e. de la forme

$$L(q, v) = g_q(A_q v, v) + B_q(v) - U(q),$$

où g est une métrique riemannienne, A est un endomorphisme défini positif du tangent $\mathrm{T}M$, B est une 1-forme sur M, et $U : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. On a déjà vu que les points critiques de la fonction action associée à L sont précisément les solutions (lisses) de l'équation d'Euler-Lagrange. Soit $H : \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$ la fonction

$$H(q, v) = \partial_v L(q, v)v - L(q, v).$$

Prouver que H est une intégrale première de la dynamique lagrangienne de L, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto H(\Gamma(t), \dot\Gamma(t))$ est constante si Γ est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange.

Exercice 2. Dans le cadre de l'exercice précédent, on considère l'action à période libre

$$\mathcal{A} : (0, \infty) \times \Lambda M \to \mathbb{R}$$

définie par la formule

$$\mathcal{A}(p, \gamma) = p \int_0^1 L(\gamma(t), \dot\gamma(s)/p)\, \mathrm{d}t.$$

Caractériser les points critiques de $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Soit $L(q, v) = g_q(v, v)$, de sorte que les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange de L sont précisément les géodésiques pour la métrique riemannienne g. Expliquer pourquoi on peut trouver toutes les géodésiques fermées de g indifféremment en cherchant les points critiques de la fonction action de L ou en cherchant les points critiques de l'action à période libre de L.

Exercice 4. On a vu que le cercle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ agit sur l'espace des lacets ΛM par translation : l'action de $\tau \in \mathbb{R}$ sur $\gamma \in \Lambda M$ nous donne le lacet $\tau \cdot \gamma \in \Lambda M$ défini par $(\tau \cdot \gamma)(t) = \gamma(t + \tau)$. Soit $E : \Lambda M \to \mathbb{R}$ la fonction énergie

$$E(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\, \mathrm{d}t.$$

Evidemment $E^{-1}(0)$ est l'ensemble des points fixes de l'action du cercle S^1. Vu que la fonction E est S^1-invariante, le super-niveau $E^{-1}(0,\infty)$ est invariant par l'action de S^1. Est-ce que S^1 agit librement sur $E^{-1}(0,\infty)$?

Exercice 5. Montrer que l'action du cercle sur l'espace des lacets n'est pas lisse, c'est-à-dire que l'application $T : S^1 \times \Lambda M \to \Lambda M$ définie par $T(\tau,\gamma) = \tau \cdot \gamma$ n'est pas C^1.