DEVOIR MAISON 5 – 28 février 2014

Exercice 1. Soit X un espace topologique connexe par arcs, et soit $\Lambda^0 X := C^0(S^1, X)$ son espace des lacets continus. Prouver qu'il existe une bijection entre le composantes connexes de $\Lambda^0 X$ et les classes de conjugaison du groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$.

Exercice 2. Soit (M, g) une variété riemannienne fermée telle que $\pi_1(M) \cong H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus A$, où A est un group abélien non-trivial. On a déjà vu que dans ces variétés il y a une infinité de géodésiques fermées. La croissance des géodésiques fermées de (M, g) est une fonction $\mathrm{cr} : [0, \infty) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que $\mathrm{cr}(l)$ est le nombre de géodésiques fermées de (M, g) géométriquement distincts ayant une longueur plus petit ou égal à l. Prouver que la croissance des géodésiques fermées satisfait :

$$\liminf_{l \to \infty} \mathrm{cr}(l) \frac{\log(l)}{l} > 0.$$

Indication. Si $E : \Lambda M \to \mathbb{R}$ est la fonction énergie et $\gamma \in \mathrm{crit}(E)$, la longueur de γ est $\sqrt{E(\gamma)}$. Soit $\boldsymbol{e}$ le générateur du subgroup $\mathbb{Z} \subset H_1(M)$. Revoir la preuve du théorème de Bangert-Hingston, et réaliser que la preuve nous donne soit une infinité de géodésiques fermées ayant une longueur bornée, soit une géodésique fermée non-itérée γ_k telle que $[\gamma_k] = k\boldsymbol{e}$ pour tous nombres premiers $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grands.

Exercice 3. Soit $L : S^1 \times \mathrm{T}M \to \mathbb{R}$ une fonction lagrangienne de la forme usuelle, i.e. sa restriction aux fibres de $\mathrm{T}M$ est un polynôme convexe de degré deux. Soit $\mathcal{A} : \Lambda M \to \mathbb{R}$ la fonction action

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{S^1} L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, \mathrm{d}t,$$

et soit γ un point critique de $\mathcal{A}$. On a déjà vu que γ est une solution C^∞ de l'equation d'Euler-Lagrange associée à L. Montrer que le noyau de la hessienne $\mathrm{d}^2\mathcal{A}(\gamma)$ a une dimension plus petite ou égale à $2\dim(M)$.

Indication. Localiser autour de γ. Montrer d'abord que les champs vecteurs dans le noyau de la hessienne sont C^∞. Avec une integration par partie, on peut voir qu'ils sont solutions d'une equation différentielle ordinaire du deuxième ordre.