EXAMEN FINAL – 24 mars 2016

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On ne demande pas de justification).

(a) Si M est une variété fermée de dimension $d > 1$ telle que le groupe d'homologie $H_i(M; \mathbb{Z}_2)$ soit non-trivial pour un certain $i \in \{1, ..., d-1\}$, alors toute fonction lisse $F : M \to \mathbb{R}$ (pas forcement de Morse) possède au moins un point critique qui n'est ni un minimum local ni un maximum local.

(b) Il existe $\phi \in \mathrm{Ham_c}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que la fonction $k \mapsto c_+(\phi^k)$ ne soit pas bornée.

(c) Soit G et H deux hamiltoniens non-autonomes et à support compact sur $\mathbb{R}^{2n}$ tels que $G \leq H$ ponctuellement. Alors $c_\pm(\phi_G^1) \geq c_\pm(\phi_H^1)$.

(d) Si M est une variété fermée et ϕ est un symplectomorphisme de $(\mathrm{T}^*M, -\mathrm{d}\lambda)$, i.e. un difféomorphisme de T^*M tel que $\phi^*\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\lambda$, alors l'intersection $\phi(\{\text{section nulle}\}) \cap \{\text{section nulle}\}$ est non-vide.

Solution.

(a) Vrai. L'inégalité de Morse

$$\dim H_i(M; \mathbb{Z}_2) \leq \sum_{x \in \mathrm{crit}(F)} \dim h_i(F, x)$$

implique qu'il existe au moins un point critique x de F avec homologie locale $h_i(F, x)$ non-triviale. Comme $i \notin \{0, d\}$, x n'est pas un minimum local ni un maximum local.

(b) Faux. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur spectrale $c_+(\phi^k)$ est non-négative et bornée supérieurement par la capacité symplectique $\gamma(\mathrm{supp}(\phi))$.

(c) Vrai. Si $G \leq H$ ponctuellement, alors il existe deux familles génératrices $F_G : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $F_H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ pour $\Gamma_{\mathrm{graph}(\phi_G^1)}$ et $\Gamma_{\mathrm{graph}(\phi_H^1)}$ respectivement telles que $F_G \geq F_H$ ponctuellement. Ceci implique l'inégalité entre les valeurs spectrales $c_+(\phi_G^1) \geq c_+(\phi_H^1)$.

(d) Faux. On peut considérer le contre-exemple donné par $M = S^1$ et $\phi(q, p) = (q, p+1)$. □

Exercice 2. Soit M une surface fermée orientable. Existe-t-il une fonction de Morse $F : M \to \mathbb{R}$ ayant deux points critiques d'indice 0, un point critique d'indice 1, et deux points critiques d'indice 2 ?

Solution. Non. En fait, par l'égalité de Morse, la caractéristique d'Euler de M serait $\chi(M) = 2 - 1 + 2 = 3$. Mais une surface fermée orientable ne peut pas avoir une telle caractéristique d'Euler, car son genre est un entier non-négatif donné par $1 - \chi(M)/2$. □

Exercice 3. Soit M une variété fermée de dimension 5, et $F : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse ayant n_i points critiques d'indice i. Calculer n_5 en fonction de n_0, n_1, n_2, n_3, n_4.

Solution. Soit $\overline{n}_i$ le nombre de points critiques d'indice i de la fonction $-F$. Alors $n_i = \overline{n}_{5-i}$ pour tout $i = 0, ..., 5$. L'égalité de Morse implique que la caractéristique d'Euler de M est donnée par

$$\chi(M) = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4 - n_5 = \overline{n}_0 - \overline{n}_1 + \overline{n}_2 - \overline{n}_3 + \overline{n}_4 - \overline{n}_5.$$

En particulier $\chi(M) = 0$ (le même argument montre que toute variété fermée de dimension impaire est de caractéristique d'Euler nulle). Donc $n_5 = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + n_4$. $\square$

Exercice 4. Prouver l'énoncé suivant, ou exhiber un contre-exemple :

> *Soit M une variété Riemannienne complète, et $F : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ satisfaisant la condition de Palais-Smale et ayant points critiques isolés. Soit $b \in \mathbb{R}$, N une variété compacte à bord $\partial N \neq \varnothing$, et $\mathcal{F}$ une famille d'applications continues $u : (N, \partial N) \to (M, \{F < b\})$ invariante par le flot anti-gradient de F, i.e. si ϕ^t est le flot de $-\nabla F$, alors $\phi^t \circ u \in \mathcal{F}$ pour tout $t \geq 0$ et $u \in \mathcal{F}$. Si*
>
> $$c := \inf_{u \in \mathcal{F}} \max\{F \circ u\} \in (b, \infty),$$
>
> *alors il existe un point critique $x \in F^{-1}(c)$ tel que*
>
> $$\mathrm{ind}(F, x) + \mathrm{nul}(F, x) \geq \dim(N).$$

Solution. L'énoncé est faux. On peut considérer le contre-exemple suivant. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction quadratique $F(x, y) = x^2 - y^2$, $n > 0$, et $\mathcal{F}$ la famille d'applications continues

$$u = (u_1, u_2) : (S^n \times [0, 1], S^n \times \{0, 1\}) \to (M, \{F < -1\})$$

telles que $\max u_2(\cdot, 0) < 0$ et $\max u_2(\cdot, 1) > 0$. Alors

$$c := \inf_{u \in \mathcal{F}} \max\{F \circ u\} = 0,$$

mais le seul point critique dans la pré-image $F^{-1}(0)$ est l'origine, et on a

$$\mathrm{ind}(F, 0) + \mathrm{nul}(F, 0) = 1 < n + 1 = \dim S^n \times [0, 1].$$

$\square$

Exercice 5. Prouver l'énoncé suivant, ou exhiber un contre-exemple :

> *Soit $H : [0, 1] \times \mathbb{T}^{2n} \to \mathbb{R}$ un hamiltonien non-autonome tel que son flot hamiltonien satisfasse $\phi_H^1 = \phi_H^0 = \mathrm{id}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{T}^{2n}$, la courbe 1-périodique $\gamma_z(t) := \phi_H^t(z)$ est contractile.*

Solution. Le théorème de Conley-Zehnder implique en particulier qu'il existe $z_0 \in \mathbb{T}^{2n}$ tel que la courbe 1-périodique γ_{z_0} est contractile. Si $z \in \mathbb{T}^{2n}$ est un point arbitraire, soit

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{T}^{2n}$ une courbe continue telle que $\alpha(0) = z$ et $\alpha(1) = z_1$. Alors, l'application

$$\Gamma : [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}^{2n}, \qquad \Gamma(s,t) := \gamma_{\alpha(s)}(t)$$

est une homotopie telle que $\Gamma(0,\cdot) = \gamma_z$ et $\Gamma(1,\cdot) = \gamma_{z_0}$. Comme γ_z est homotope à la courbe contractile γ_{z_0}, elle est contractile aussi. $\square$

Exercice 6. Existe-t-il un hamiltonien $H : [0,1]\times\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ à support compact, non-négatif, et non-constant, tel que son flot hamiltonien satisfasse $\phi_H^1 = \phi_H^0 = \mathrm{id}$?

Solution. Non. Comme H est non-constant, il existe $\epsilon > 0$, un intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, et un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ tels que $H|_{[a,b]\times U} > \epsilon$. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tels que la boule ouverte $B(z_0, r)$ soit contenue dans U. On peut supposer sans perte de généralité que $z_0 = 0$. Soit $\rho : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lisse telle que $\rho|_{[0,a]} \equiv 0$, $\rho|_{[b,1]} \equiv 1$, et $\dot\rho \geq 0$. Soit $\chi : [0,\infty) \to [0,\epsilon]$ une fonction lisse telle que

$$\begin{aligned}
&0 < \chi(0) \leq \frac{\epsilon}{\max\{\dot\rho(t) \mid t \in [0,1]\}}, \\
&-1 < \dot\chi(x) < 0, \qquad \forall x \in [0, r^2), \\
&\chi(x) = 0, \qquad\qquad \forall x \in [r^2, \infty).
\end{aligned}$$

Soit $G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'hamiltonien autonome $G(z) = \chi(|z|^2)$, et $K_t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'hamiltonien donnée par $K_t(z) = \dot\rho(t)G(z)$. Alors $\phi_K^t = \phi_G^{\rho(t)}$, et en particulier $\phi_K^1 = \phi_G^1$. Comme $K \leq H$ ponctuellement, on a les inégalités entre les valeurs spectrales $c_\pm(\phi_G^1) \geq c_\pm(\phi_H^1)$. On sait que les valeurs spectrales du difféomorphisme hamiltonien ϕ_G^1 sont $c_+(\phi_G^1) = 0$ et $c_-(\phi_G^1) = -G(0) < 0$. Donc, on conclut $c_-(\phi_H^1) \leq c_-(\phi_G^1) < 0$, et en particulier $\phi_H^1 \neq \mathrm{id}$. $\square$