Variétés, difféomorphismes

Exercice 1 (Difféomorphismes)**.** 1. Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f est $\mathcal{C}^1$ et df est inversible en tout point de U. On dit alors que f est un *difféomorphisme.*

2. Montrer que $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$ est difféomorphe à $]-1;1[^2$, et à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (La sphère)**.** 1. Montrer que la sphère $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$ est une variété lisse de dimension n.

2. Que ce passe-t-il si on remplace la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ par une autre norme $\|\cdot\|$?
3. Combien faut-il de cartes au minimum pour définir un atlas sur la sphère ?

Exercice 3 (Un exemple de quotient)**.** Montrer que le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ muni de la topologie quotient est une variété lisse. Combien faut-t-il de cartes au minimum pour définir un atlas sur $\mathbb{T}^2$? Et sur $\mathbb{T}^n$?

Exercice 4 (Produit de variétés)**.** Soient M et N deux variétés lisses. Montrer que $M \times N$ est une variété lisse. Quelle est sa dimension ? En déduire que $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ est une variété.

Exercice 5 (Variétés difféomorphes)**.** Montrer que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $(\mathbb{S}^1)^n$ sont difféomorphes.

Exercice 6 (Variétés à bord)**.** On rappelle qu'une variété à bord de dimension n sest un espace topologique M, séparé, à base dénombrable, et muni d'un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ où $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert du demi-espace $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqslant 0\}$ et le changements de carte sont des restrictions à H^n de difféomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. On note $\partial H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ le bord de H.

1. Montrer que la boule $\overline{\mathbb{B}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ est une variété à bord.
2. Soit M une variété à bord de dimension n et $x \in M$ tel que $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$ pour un certain α. Montrer que pour tout β, $\varphi_\beta(x) \in \partial H^n$. On appelle *bord* de M et on note ∂M l'ensemble des x tels que $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$ pour un certain α (donc pour tous).
3. Montrer que ∂M est une variété sans bord de dimension $n-1$.
4. Le produit de deux variétés à bord est-il une variété à bord ? Et le produit d'un variété à bord par une variété sans bord ?

Exercice 7 (Espaces projectifs)**.** On note $\mathbb{R}P^n$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. C'est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence : $x \sim y$ si et seulement x et y sont colinéaires, muni de la topologie quotient. Soit $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $(x_0 : \dots : x_n)$ sa classe dans $\mathbb{RP}^n$.

1. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est aussi le quotient $\mathbb{S}^n/\{\pm \mathrm{Id}\}$. En particulier, $\mathbb{RP}^n$ est compact.
2. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, montrer que $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{RP}^n$ homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété lisse.
4. Montrer que les projections canoniques de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{RP}^n$ sont lisses.

Exercice 8 (Grassmanniennes)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note $Gr_k(E)$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de E. Cet ensemble est appelé *grassmannienne* des k-plans de E.

1. En s'inspirant du cas de l'espace projectif, expliquer comment munir $Gr_k(E)$ d'une topologie naturelle qui en fait un espace compact.
2. Soit $G \in Gr_{n-k}(E)$, on note $U_G = \{F \in Gr_k(E) \mid F \oplus G = E\}$. Montrer que U_G est un ouvert de $Gr_k(E)$.
3. Soit $F_0 \in U_G$, montrer que pour tout $F \in U_G$, il existe une unique application linéaire $f_F : F_0 \to G$ telle que F soit le graphe de f_F.
4. En déduire que $Gr_k(E)$ est une variété lisse, et donner sa dimension.
5. Montrer que $Gr_1(E)$ est difféomorphe à $\mathbb{RP}^n$.
6. Montrer que l'application $\Psi : Gr_k(E) \to Gr_{n-k}(E^*)$ qui envoie F sur son orthogonal $F^\perp = \{\eta \in E^* \mid F \subset \ker(\eta)\}$ est un difféomorphisme.