

Espaces tangents, différentielles

Exercice 1 (Exercice de calligraphie). Soient M , N et P des variétés lisses, $F : M \rightarrow N$ et $G : N \rightarrow P$.

1. Montrer que $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ et $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$.
2. Montrer que $d_p(\text{Id}_M) = \text{Id}_{T_p M}$.
3. Montrer que $d_p(G \circ F) = (d_{F(p)}G) \circ d_p F$.
4. Si F est un difféomorphisme, montrer que $d_p F$ est inversible et $d_{F(p)}F^{-1} = (d_p F)^{-1}$.

Exercice 2 (Localité des dérivations). Soient M une variété lisse, $p \in M$ et D une dérivation en p .

1. Montrer que si f est constante alors $D(f) = 0$.
2. Soient f et $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et U un voisinage de p tel que $f \equiv g$ sur U . Montrer que $D(f) = D(g)$. On dit que $D(f)$ ne dépend que du germe de f en p .

Exercice 3 (Espace tangent d'un produit). Soient M et N deux variétés lisses, construire un isomorphisme naturel entre $T_{(p,q)}(M \times N)$ et $T_p M \times T_q N$.

Exercice 4 (Lemme de Hadamard). Soit f une fonction lisse, à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur une boule ouverte de \mathbb{R}^n centrée en 0. Montrer qu'il existe des fonctions lisses g_1, \dots, g_n telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ et

$$\forall x, \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

Exercice 5 (Espace tangent et chemins). Soient M une variété lisse et $p \in M$.

1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ lisse tel que $\gamma(0) = p$, montrer que $D(\gamma) : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$, est une dérivation.
2. Soient $F : M \rightarrow N$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ lisses, montrer que $d_p F \cdot D(\gamma) = D(F \circ \gamma)$.
3. Soit $v : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ une dérivation en p , montrer qu'il existe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ lisse tel que $\gamma(0) = p$ et $v = D(\gamma)$.
4. Soient γ_1 et γ_2 lisses de \mathbb{R} dans M tels que $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
 - (a) $D(\gamma_1) = D(\gamma_2)$.
 - (b) Il existe une carte (U, φ) autour de p telle que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.
 - (c) Pour toute carte (U, φ) autour de p , on a $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.
5. Conclure que $T_p M$ est l'ensemble des courbes lisses $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ telles que $\gamma(0) = p$, modulo tangence en 0 dans une carte (dans toute carte).

Exercice 6 (Un calcul de différentielle). Calculer la différentielle de $\overline{F} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ définie comme le quotient de l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{S}^2 :

$$F : (x, y) \mapsto (\cos(2\pi x) \cos(2\pi y), \cos(2\pi x) \sin(2\pi y), \sin(2\pi x)).$$

Déterminer sur quels domaines \overline{F} est un difféomorphisme local. La restriction à ces domaines est-elle un difféomorphisme ?