Exercice 1. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, Ω - ouvert de E, $a \in E$. Alors pour $f : \Omega \to F$ on note $D\overrightarrow{f}(a,h)$ la derivée directionelle de f en a dans la direction h.

On dit que f est *Gâteaux-dérivable* en a si pour chaque $h \in E \setminus 0$ la derivée directonelle existe et l'application $h \mapsto D\overrightarrow{f}(a,h)$ est linéaire continue.

On dit que f est *Fréchet - dérivable* en a si il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ et une fonction $\varepsilon : \varepsilon(h) \to 0, h \to 0$ telles que $f(a+h) = f(a) + L(h) + ||h||_F \varepsilon(h)$.

1. Montrer que Fréchet-dérivable implique Gâteaux-dérivable.
2. Montrer que la reciproque est fausse.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > +c$ avec $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de Fréchet et le gradient de f, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Calculer le Hessien de f, $\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$.
4. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}$ qui ne dépendent que de $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques ($\Delta f = 0$, où Δ est le laplacien standard, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).
5. Soient f, g - deux fonctions, f - Gâteaux-dérivable en $g(a)$ et g - Gâteaux-dérivable en a. Est-ce que leur composition est Gâteaux-dérivable en a ?

Exercice 2. Soit E, F deux espaces de Banach et $U \subset B(E,F)$ le sous-ensemble des applications linéaires bornées inversibles.

1. Montrer que si A, B sont deux applications linéaires $E \to F$, $A \in B(E,F)$, alors si B est tel que $||A - B|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$ alors B lui aussi est inversible.
2. Montrer que dans les conditions précédentes $B^{-1} \in B(F,E)$ et $||B^{-1}|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| ||A-B||}$
3. Montrer que dans les conditions précédentes
$$||B^{-1} - A^{-1}|| \leq \frac{||A^{-1}||^2 ||B - A||}{1 - ||A^{-1}|| ||A - B||}.$$
4. Montrer que U est ouvert.
5. Définissons une application $f : U \to B(F,E)$ telle que $f(X) = X^{-1}$. Montrer que f est continue sur U.
6. Montrer que f est différentiable et que pour $A \in U$ et la dérivée $f'(A) : B(E,F) \to B(F,E)$ est une application linéaire telle que pour $V \in B(E,F)$
$$f'(A)V = -A^{-1} V A^{-1}.$$

Exercice 3. [Contre-exemples.]

1. Une application entre deux espaces topologiques qui est continue mais ni ouverte ni fermée.
2. Une application entre deux espaces topologiques qui est ouverte, fermée mais pas continue.
3. Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que est discontinue comme la fonction de deux variables mais continue comme une fonction de chacune de variables.
4. (Théorème d'Arzela-Ascoli) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ et f_n une suite des fonctions continues, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Si (a) $\exists M : ||f_n||_\infty < M$, (b) Ω est compact, (c) f_n est uniformement équicontinue alors f_n converge en $||\cdot||_\infty$ vers une fonction continue. Montrer que ce théorème est faux si on enléve une des conditions (n'importe laquelle) en gardant les deux restantes.