ENS de Lyon **TD 1. Théorème de point fixe, inversion locale et Cauchy-Lipschitz.** **2016-2017**
Topologie et Calcul Différentiel 2

Exercice 1. [Contraction] Soient $0 < k < 1$ un réel, $U \subset E$ un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$.

Montrer que f est k-contractante sur U si et seulement si pour tout $x \in U, |D_x f| \leq k$.

Exercice 2. [Itérées] Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $|D_0 f| < 1$.

Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset E$ de 0 tel que pour tout $x \in U$, la suite $(f^n(x))$ converge vers 0.

Exercice 3. [Méthode de Newton] Soit r, C, ε trois réels positifs et E un espace de Banach. On note $B(0,r) \subset E$ la boule ouverte de rayon r centrée en 0. Soit $f : B(0,r) \to E$ une application $\mathcal{C}^2$ telle que $|(D_x f)^{-1}| \leq \varepsilon^{-1}$ et $|D_x^2 f| \leq 2C$ pour tout $x \in B(0,r)$. Soit $x_0 \in B(0,r)$ et $x_{n+1} := x_n - (D_{x_n} f)^{-1} f(x_n)$ (si $x_n \in B(0,r)$).

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon^{-1}|f(x_n)|$ et $|f(x_{n+1})| \leq C|x_{n+1} - x_n|^2$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe un réel $\delta_0(|x_0|, \varepsilon, C) > 0$ tel que pour $|f(x_0)| \leq \delta_0$, alors $|f(x_n)| \leq (C\varepsilon^{-2})^{2^n-1}|f(x_0)|^{2^n}$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq C(C\varepsilon^{-2})^{2^n-1}|f(x_0)|^{2^n}$.
3. Montrer que pour $\delta \leq \delta_0$, (x_n) converge dans $B(0,r)$ vers une solution de l'équation $f(x) = 0$.
4. Soit a un réel positif. Appliquer la méthode de Newton pour construire une suite (non triviale) convergeant vers $\sqrt{a}$. Pour quelles valeurs de $x_0 \in \mathbb{R}$ la suite converge-t-elle ?
5. Comparer la suite (x_n) et celle de la suite construite dans la preuve du théorème des fonctions implicites pour l'application
$$\begin{aligned} F : E \times E &\to E \\ (x,y) &\mapsto y - f(x) \ . \end{aligned}$$
6. Comparer la vitesse de convergence de la suite (x_n) et celle de la suite construite dans la preuve du théorème de Picard.

Exercice 4. [Zéros isolés]

Soient $a_1, \ldots, a_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés.

Exercice 5. Considérons l'équation différentielle $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$.

1. Trouver ses solutions.
2. Trouver les solutions de l'équation $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 5e^t$

Exercice 6. [Cauchy-Lipschitz ?] Considérons l'équation différentielle $\dot{x} = x^{2/3}, x(0) = 0$. Montrer qu'elle admet des solutions nulles sur tout intervalle $[T_1, T_2]$, avec $T_1 \leq 0 \leq T_2$, et non nulles en dehors. Expliquer pourquoi cet exemple ne contredit pas le théorème de Cauchy-Lipschitz.