ENS de Lyon TD 11. Courbes **2016-2017**
Calcul Différentiel 2

Exercice 1. [Courbes sphériques] Soit r un réel positif. Les courbes considérées sont $\mathcal{C}^3$.

0. Montrer qu'une courbe régulière tracée sur la sphère est birégulière.

1. Soit $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe de torsion partout non nulle tracée sur une sphère de rayon r. Montrer que sa courbure κ et sa torsion τ vérifient l'équation

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)^2 = r^2. \tag{1}$$

2. Déterminer, parmi les courbes tracées sur une sphère, celles qui sont de courbure constante.

3. Soit δ une courbe dont la courbure et la torsion vérifient (1). Démontrer, en examinant la courbe

$$\delta + \frac{1}{\kappa} N + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right) B \ , \tag{2}$$

que la courbe est tracée sur une sphère de rayon r. Que représente la courbe (2) pour une courbe δ quelconque ?

Exercice 2. [Dessine-moi une courbe de degré 4] Soit Γ la courbe plane d'équation :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) + 3x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0$$

On cherche à déterminer les extrema locaux de la distance à l'origine des points de cette courbe.

1. Montrer que les points réalisant ces extrema doivent être sur l'union d'une droite et d'un cercle, que l'on précisera. En déduire les extrema locaux.

2. Dessiner la courbe Γ.

Exercice 3. Une *développante* d'une courbe γ est une courbe dont la développée (ou evolute en anglais) est γ. Donner une expression de la développante d'une courbe paramétrée par longueur d'arc. Dessiner une développante d'un cercle et esquisser l'asymptotique d'une développante de la courbe d'équation $\{y = x^3\}$.

Exercice 4. [Théorème de Kneser : Vertigo] Soit $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe C^4 de courbure κ ne s'annulant pas et strictement monotone.

1. Montrez que dans ce cas l'evolute β est une courbe regulière de courbure strictement monotone aussi qui ne s'annule pas non plus. En particulier, β n'a pas de segments.
2. Montrez que les cercles osculateurs de γ sont un à un disjoints.
3. Montrez qu'une courbe de courbure strictement monotone ne peut pas avoir d'auto-intersections.

4. Montrez qu'une courbe de courbure strictement monotone ne peut pas avoir de droites bi-tangentes (tangentes à γ dans $\gamma(t)$ et $\gamma(s)$, $t \neq s$).
5. Dessiner une courbe de courbure monotone et ses cercles osculateurs.
6. Soient $a < b \in I$, on note A la couronne comprise entre les cercles osculateurs en $\gamma(a)$ et en $\gamma(b)$. Montrer que tout point x de A appartient à un unique cercle C_x osculateur à γ en un point $\gamma(s)$, avec $a \leq s \leq b$.
7. Soit X le champ de vecteurs sur A tel que, pour tout x de A, le vecteur $X(x)$ est unitaire et positivement tangent au cercle C_x. Montrer que, pour toute condition initiale $x(0) \in \gamma(I)$, l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$ admet deux solutions qui ne coïncident sur aucun intervalle ouvert.
8. En déduire que le champ de vecteurs X est continu, mais pas de classe C^1.