ENS de Lyon **TD 12. Surfaces** **2016-2017**
Calcul Différentiel 2

Exercice 1.

1. Déterminer les deux formes fondamentales, la courbure de Gauss, et la courbure moyenne de la sphère $x^2+y^2+z^2=r^2$, du cylindre $x^2+y^2=r^2$ et du tore $\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2$ vus dans $\mathbb{R}^3$ avec les coordonées x, y, z.
2. Déterminer les courbures de Gauss, et les courbures moyennes aux points d'intersection avec les axes de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Exercice 2. Soit $a>0$. Considérons une surface (la caténoïde) localement paramétrée par

$$X(u,v)=(a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av)$$

et une autre surface (l'hélicoïde) localement paramétrée par

$$Y(s,t)=(t\cos s, t\sin s, as)$$

1. Déterminer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la caténoïde (dans le paramétrage X).
2. Déterminer la normale à la caténoïde (dans le paramétrage X).
3. Déterminer les coefficients L, M, N de la deuxième forme fondamentale de la caténoïde (dans le paramétrage X).
4. Calculer les courbures moyenne et de Gauss.
5. En effectuant un changement de variable $s=u, t=a\sinh v$, donner un nouveau paramétrage de l'hélicoïde.
6. Déterminer les coefficients E', F', G' de la première forme fondamentale de l'hélicoïde (dans ce nouveau paramétrage).
7. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3.

1. Soit $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ une surface à courbure de Gauss positive. Soit γ une courbe régulière tracée sur Σ, k la courbure de γ au temps 0 et k_1, k_2 les courbures principales de Σ au point $\gamma(0)$. Montrer que $k>\min(|k_1|,|k_2|)$.
2. Reprendre la question 1 pour une surface à courbure negative : a-t-on la même conclusion ?

Exercice 4. Les points omblilics sont ceux au droit desquels les deux courbures principales k_1 et k_2 sont égales.

1. Quelles sont les surfaces dont tous les points sont ombilics ?
2. Montrer qu'un ellipsoïde a en général quatre points ombilics.