Exercice 1. Considérons une équation différentielle $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$, a, b - fonctions continues à valeurs réelles définies sur une intervalle I, $t_0 \in I$. Fixons une condition initiale $x(t_0) = x_0, t_0 \in I$.

1. Est-ce que cette équation différentielle admet une unique solution sur une intervalle I_0 qui contient t_0 ?
2. Est-ce que on peut dire la même chose à propos d'une équation $c(t)\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ où $c(t)$ est une fonction continue ?

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes et donner l'intervalle de définition des solutions (en fixant la condition initiale $x(0) = C$) :

1. $\dot{x} = 7x^2t^3$
2. $t\dot{x} + 2x = t^4 + 1$
3. $2t - 3x^2\dot{x} = 0$

Résoudre le problème de Cauchy :

1. $\dot{x} = e^{x+t}, x(0) = 0$
2. $\dot{x} = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}, x(1) = 0$

Exercice 3.

1. Trouver une famille de courbes sur le plan telle que le segment de la droite tangente entre l'axe des x et l'axe des y est divisé en deux parties égales par le point de contact.
2. Trouver une famille de courbes sur le plan telle que le segment de la droite tangente entre le point de tangence et l'axe des y est divisé en deux parties égales par l'axe des x.

Exercice 4. [Systèmes linéaires à coefficients constants]

Soit A une matrice de taille 2×2 à coefficients réels. On étudie les solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = A.x$ pour $x \in \mathbb{R}^2$.

1. Etant donné un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^2$, quelle est la solution γ vérifiant $\gamma(0) = x_0$?
2. Résoudre et donner l'allure des solutions du système d'ED linéaire donné par la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Tracer l'allure du portrait de phases en fonction de A pour A arbitraire (de taille 2×2).
4. Résoudre le système d'ED linéaire donné par la matrice et traces
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de donner des indications qualitatives sur le nombre et la place des zéros de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre. On fixe $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. On considère l'équation différentielle (E) $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Soient f, g deux solutions indépendantes de (E). On appelle wronskien de f et g la fonction $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.
   (a) Montrer que $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que si $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de f, alors il existe un unique $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $g(\gamma) = 0$.
2. Soit l'équation $y'' + q(t)y = 0$, et f une solution non-identiquement nulle de cette équation. Montrer que
   (a) si $q(t) \leq M^2$, alors deux zéros consécutifs de f sont distants d'au moins π/M ;
   (b) si $q(t) \geq M^2$, alors pour tout intervalle I de longueur π/M, f admet au moins un zéro dans I.
3. On considère l'équation différentielle suivante, dite *équation de Bessel* :

$$y'' + \frac{1}{t}y' + (1 - \frac{\lambda^2}{t^2})y = 0,$$

   définie sur l'intervalle $]0, \infty[$.
   (a) Ramener cette équation à une équation de la forme précédente.
   (b) Suivant la valeur de λ, comparer à π la distance entre deux zéros consécutifs de f.