Exercice 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Quelle est le volume de l'image du cube unité $[0, 1]^3$ par la résolvante R_0^t de l'équation différentielle linéaire donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 2. Résoudre le système linéaire $tx'(t) = A(t)x(t)$ avec

$$A : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 2t^2 & 0 & 1 - t^2 \\ t^2 - 1 & 3t^2 & t^2 - 1 \\ 2 - 2t^2 & 0 & 2 + t^2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit x une solution solution de $x'' + f(t)x = 0$ avec une condition initiale distincte de la celle de la solution nulle. Montrer que x ne tend pas vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

2. Soient $\alpha, \omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit x une solution solution de $x'' + \alpha(t)x' + (\omega(t))^2x = 0$ avec une condition initiale distincte de la celle de la solution nulle. On suppose $\alpha < 0$. Montrer que x ne tend pas vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.
 On suppose $\alpha > 0$, a-t-on forcément $x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$?

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire. Soit $A : t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ antisymétrique en tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la résolvante de l'équation différentielle $x' = A(t)x$ préserve le produit scalaire.

Exercice 5. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on note (E_ε) l'équation différentielle

$$x'' = (2t^{-2} + \varepsilon t)x$$

sur $I :=]0, 5, +\infty[$.

1. Trouver deux solutions de (E_0) sur I sous la forme $t \mapsto t^\alpha$.
2. Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver une solution de $x'' = 2t^{-2}x + t^p$ sur I sous la forme $t \mapsto Ct^\beta$ ou bien sous la forme $t \mapsto Dt^\alpha \log t$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution $x_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ du problème de Cauchy (E_ε) , $x(1) = 0, x'(1) = 3$. Montrer que $x : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Dédire de la question précédente, pour tout $t \in I$ la dérivée partielle $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(0, t)$.
4. Montrer qu'il existe une solution de $x'' = 2t^{-2}x + t^p(\log t)^q$ sur I sous la forme d'une combinaison linéaire de monômes $t \mapsto t^n(\log t)^m$.
5. Dédire de la question précédente, pour tout $t \in I$ que la dérivée partielle $\frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k}(0, t)$ est une combinaison linéaire de tels monômes.

Exercice 6. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lisses. On pose $W(f_1, \dots, f_n) = \det\{(f_i^{(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n}\}$.

1. Montrer que si la famille de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ est liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors $W(f_1, \dots, f_n)$ est nulle sur I .
2. On suppose que $W(f_1, \dots, f_n)$ est nulle sur I et que $W(f_1, \dots, f_{n-1})$ ne s'annule pas sur I . Montrer que $f_1, \dots, f_n$ sont solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre $(n - 1)$. En déduire que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.
3. On suppose que $W(f_1, \dots, f_n)$ est nulle sur I et que les $f_1, \dots, f_n$ sont analytiques réelles. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.
4. Montrer que le résultat précédent est faux si on enlève l'hypothèse d'analyticité.