Exercice 1. [Redressement]
Redresser le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x,y) \end{aligned}$$

au voisinage de $(1,0)$.

Exercice 2. Pour un flot $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lisse et $p \in \mathbb{R}^n$, on appelle $\omega(p) = \cap_{t\geq 0}\overline{\{\phi^s(p)\ , s \geq t\ \}}$ l'ensemble *oméga-limite* de p. Dessiner des exemples de champs de vecteurs tels que

1. un seul ensemble oméga limite est une orbite périodique non constante ;
2. un ensemble oméga limite est une droite ;
3. un ensemble oméga limite est une courbe fermée mais pas une orbite périodique.

Exercice 3. Dessiner un exemple de champ de vecteurs sur un anneau $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$ qui tourne une composante de bord dans un sens, l'autre composante de bord dans l'autre sens et qui a exactement deux zéros.

Exercice 4. [Champ de gradient] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ qui a ses points critiques isolés.

Montrer que les solutions périodiques de l'équation $x'(t) = \nabla f(x(t))$ sont des trajectoires constantes.

Soit γ une solution maximale de l'équation précédente qui reste dans un compact de U. Montrer que γ est définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que γ est constante ou bien $\overline{\gamma(\mathbb{R})}$ relie deux points critiques (éventuellement égaux) de f.

Exercice 5. On considère les champs de vecteurs $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F_+ : (x,y,z) \mapsto (F_g(x,y), z) \text{ et } F_- : (x,y,z) \mapsto (F_g(x,y), -z)$$

où $F_g(x,y) := (y + xg(x^2+y^2), -x + yg(x^2+y^2))$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse qui s'annule en 1.

1. Montrer que $S := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ est une trajectoire périodique.
2. Montrer que le flot de chaque équation est défini sur le cylindre $\{x^2+y^2 \leq 1, z \in \mathbb{R}\}$ en tout temps $t \in \mathbb{R}$.
3. Donner une condition suffisante sur le comportement asymptotique de g pour que les solutions de chaque équation existent en tout temps. On suppose jusqu'à la fin que cette condition est remplie.

4. Donner une section de Poincaré de S, quel est le temps de premier retour ? On suppose que $g(R) = 1 - R$ jusqu'à la fin de la question. Calculer la section de Poincaré. On dit qu'une orbite périodique est *asymptotiquement stable* s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour pour point $p \in \mathbb{R}^3$ dont la distance à l'orbite est inférieure à ϵ, l'ensemble limite $\omega(p)$ est cette orbite. Discuter l'asymptotique stabilité de S.
5. Deux champs $\mathcal{C}^1$, $A : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, B : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définis respectivement sur U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont dits *orbitalement équivalents* s'il existe f un homéomorphisme $U \to V$ tel que f envoie les orbites de A sur celles de V. Montrer qu'il existe une infinité de fonctions lisses $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 tels que les champs $F_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ne soient pas orbitalement équivalents deux à deux.

Exercice 6. [Oméga-limite homocline] On étudie les solutions de l'équation différentielle donnée par

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-y - g(x, y)(x^3 - x), x^3 - x - g(x, y)y) \end{aligned}$$

où $g(x, y) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

1. Trouver les points d'équilibre.
2. Montrer qu'on a deux solutions $\gamma_+, \gamma_- : \mathbb{R} \to g^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ qui relient un point critique à lui même.
3. Soit $p \in \mathbb{R}^2$ un point qui n'est ni sur une des deux trajectoires précédentes, ni un point d'équilibre. Montrer que $\omega(p)$ est soit une trajectoire $\gamma_\pm(\mathbb{R})$, soit l'union $\gamma_-(\mathbb{R}) \cup \gamma_+(\mathbb{R})$.

Exercice 7. [Instabilité] On pose les champs de vecteurs $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L : (x, y) \mapsto (2x, y) \text{ et } F : (x, y) \mapsto (2x + y^2, y) \; .$$

Justifier l'existence des flots respectifs et dessiner leurs courbes intégrales.

On suppose par l'absurde qu'il existe $U, V \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts contenant 0 et $(a, b) : U \to V$ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ fixant 0 qui conjugue les flots de F et L.

1. Montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{2t} a(x, y) = a(e^{2t} x + t e^t y^2, e^t y) \; . \tag{1}$$

2. Montrer que 0 est un point critique de a. On pourra fixer $t \neq 0$ puis différentier deux fois (1).
3. Conclure.