Correction de l'exercice 4

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ euclidien et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note (E) l'équation $x' = \nabla f(x)$.

Question 1 On montre que toute trajectoire périodique de f est constante :

Soit $x : \mathbb{R} \to U$ une solution de (E) qui est T-périodique. Comme f et x sont de classe $\mathcal{C}^1$,

$$0 = f(x(T)) - f(x(0)) = \int_0^T (f \circ x)'(u)\ du = \int_0^T |\nabla_{x(u)} f|^2\ du\ .$$

Ainsi pour tout $u \in [0, T]$, $|\nabla_{x(u)} f|^2 = 0$ donc $x(u)$ est point critique. Par l'unicité de Cauchy-Lipschitz (car ∇f est $\mathcal{C}^1$), x est constante.

Question 2 Soit $x :]a, b[\to U$ une solution qui reste dans un compact $K \subset U$.

Existence en tout temps Par le théorème de sortie de tout compact (car ∇f est $\mathcal{C}^1$), x est définie sur $\mathbb{R}$.

Convergence de x en $\pm\infty$ sous hypothèse que les points critiques de f sont isolés On suppose que les points critiques de f sont isolés. On montre que x converge en $+\infty$:

Il existe une valeur d'adhérence de x en $+\infty$ car K est compact.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux valeurs d'adhérence distinctes $l \neq l'$. D'après l'isolement des points critiques il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B(l, 2\epsilon)} \setminus \{l\}$ ne contient aucun point critique, et donc il existe $m > 0$ tel que $m := \inf_{B(l,2\epsilon)\setminus B(l,\epsilon)} |\nabla f|^2 > 0$. Comme l et $l' \notin \overline{B(l, 2\epsilon)}$ sont deux valeurs d'adhérence il existe une suite strictement croissante $s_n \to +\infty$ telle que $s_{2p+1} \in B(l, \epsilon)$ et $s_{2p} \notin B(l, 2\epsilon)$. On note $s'_{2p+1} = \inf\{u \geq s_{2p+1},\ , x(u) \in \partial B(l, \epsilon)\} < s_{2p+2}$ et $s''_{2p+1} = \inf\{u > s'_{2p+1},\ , x(u) \in \partial B(l, 2\epsilon)\} \leq t_{2p+2}$. Par l'inégalité des accroisements finis pour tout p,

$$\epsilon \leq |x(s''_{2p+1}) - x(s'_{2p})| \leq (s''_{2p+1} - s'_{2p+1}) \sup_K |\nabla f|\ .$$

Ainsi pour tout p,

$$f(x(s_{2p+1})) - f(x(s_1)) \geq \sum_{k=0}^{p-1} \int_{s'_{2k+1}}^{s''_{2k+1}} |\nabla_{x(u)} f|^2\ du \geq pm\epsilon / \sup_K |\nabla f|$$

or f est bornée sur K, contradiction.

De même x converge en $-\infty$.

Les limites de x sont des points critiques On montre que que la limite l de x en $+\infty$ est un point critique. On suppose par l'absurde que $|\nabla_l f|^2 > 0$, par continuité de $|\nabla f|^2$ il existe un $\epsilon > 0$ tel que $m := \inf_{B(l,\epsilon)} |\nabla f|^2 > 0$.

Il existe un entier N tel que pour tout $t \geq N$, $x(t) \in B(l, \epsilon)$,

$$f(x(t)) - f(x(t_N)) = \int_{t'_N}^t |\nabla_{x(u)} f|^2\ du \geq m(t - N)$$

or f est bornée sur K, contradiction.

De même la limite de x en $-\infty$ est un point critique.