ENS de Lyon **TD 8. Sous-variétés.** **2016-2017**
Topologie et Calcul Différentiel 2

Exercice 1. On définit la sphère $\mathbb{S}^n$ comme l'ensemble des vecteurs $\mathbb{R}^{n+1}$ de norme 1.

1. Montrer que $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Déterminer son espace tangent en chaque point.

Exercice 2.
Les sous-ensembles suivants définissent-ils des sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$?

1. $y = x$,
2. $y = |x|$,
3. $x^2 - y^2 = 0$,
4. $x^2 - y^2 - z = 0$.
5. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Exercice 3. [Intersection de sous-variétés]

1. Soit $R > 0$ une constante. Montrer que les équations
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0,$$
définissent une courbe lisse C lorsque $R \neq 2$.
2. Déterminer les projections de C sur les trois plans de coordonnées.
3. Soient M_1 et M_2 deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. On suppose que M_1 et M_2 s'intersectent transversalement, c'est-à-dire que $\mathbb{R}^n = T_xM_1 + T_xM_2$ pour tout $x \in M_1 \cap M_2$. Montrer que $M_1 \cap M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Préciser sa dimension et donner son espace tangent.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction C^k. Le graphe de f est l'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^p\} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

1. Si f est C^k, montrer que Γ est une sous-variété C^k de dimension p de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $k \geq 1$.
2. Si Γ est une sous-variété C^k de dimension p de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, alors f est-elle nécessairement C^k ?
3. * Sinon, quelle condition faut-il ajouter sur Γ pour que ce soit le cas ?

Exercice 5.
1. Montrer que l'image d'une *immersion* C^∞ *injective propre* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que l'enoncé reste vrai si on enlève un des mots en italiques ?

Exercice 6. [Groupes classiques]

1. Montrer que les sous-ensembles suivants sont des sous-variétés, et déterminer leur dimension.

   (a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) = 1\}$

   (b) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tAA = I_n\}$

   (c) $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \,|\, {}^tAJ_nA = J_n\}$, où $J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.

   Parmi les sous-variétés précédentes, lesquelles sont compactes ? Déterminer l'espace tangent en l'identité.

2. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en A.

3. Pour les groupes classiques précédents, pour g dans G, on considère

$$\begin{aligned} \tau_g : G &\to G \\ h &\mapsto gh. \end{aligned}$$

   a. Quelle est l'image de $T_{Id}G$ par τ_g ?

   b. On appelle *champ de vecteurs invariant par* G une application qui à chaque point h de G associe $X(h) \in T_hG$, de telle sorte que

$$X(gh) = (T_h\tau_g)(X(h)).$$

   Montrer que les champs de vecteurs invariants sont en bijection naturelle avec $T_{Id}G$.