ENS de Lyon **TD 10. Courbures et torsions.** **2016-2017**
Topologie et Calcul Différentiel 2

Exercice 1. 1. Pour une courbe γ sur le plan montrer que sa courbure $\kappa(t)$ est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \cdot n(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^2},$$

où $n(t)$ - une normale du vecteur de Frénet à cette courbe. En déduire une expression pour la courbure d'une courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (en termes des fonctions x, y et leurs derivées).

2. Calculez la courbure d'une ellipse donnée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Quels sont les points de la courbure minimale/maximale ?

Exercice 2. [Hélices] Considerons deux courbes

$$\gamma_+(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \gamma_-(t) = \gamma_+(-t),$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1. Vérifiez que γ_+ et γ_- sont biréguli ères si a, b sont différents de 0.
2. Calculez les repère de Frénet ainsi que la courbure et la torsion de γ_+ et γ_-.

Exercice 3. 1. Montrez que si la torsion d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ régulière est partout nulle, alors γ est contenue dans un plan affine.

2. Donnez un exemple de courbe dont la torsion est nulle en tout point régulier, mais qui n'est pas contenue dans un plan affine.

Exercice 4. Soit γ une courbe régulière tracée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'en tout point, sa courbure est supérieure ou égale à 1.

Exercice 5. * [Cercle osculateur] Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe planaire. Soit $t \in I$ tel que $\kappa(t) \neq 0$. Alors il existe un cercle du rayon $r(t)$ avec un centre dans un point $\gamma(t) + r(t)N(t)$, où $r(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$. Ce cercle s'appelle un *cercle osculateur.*

1. Soit $r(s, t)$ le rayon du cercle tangent à γ dans un point $\gamma(t)$ et qui passe aussi par $\gamma(s), s \neq t$. Montrez que $\kappa(t) = \lim_{s \to t} r(s, t)$. Remarquez que cette définition peut servir de la définition de courbure pour les courbes qui ne sont pas de classe C^2 (comment ?)
2. Soit $t_0, t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 \leq t_0 \leq t_2, t_1 \neq t_2$. Montrez que $\kappa(t_0)$ est l'inverse de la limite des rayons des cercles passants par $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$ quand $t_1, t_2 \to t_0$.
3. La courbe $\beta(t) := \gamma(t) + r(t)N(t)$ des centres des cercles osculateurs s'appelle une evolute de γ. Quelle est l'evolute d'un cercle ? D'une ellipse ? (comparez cette question à la derniere question du TD précedent).

Exercice 6. *[Théorème de Kneser] Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^4 avec $\kappa(t) \neq 0 \forall t \in I$ - fonction monotone.

1. Montrez que dans ce cas l'evolute β est une courbe regulière avec la courbure strictement monotone aussi qui ne s'annule pas non plus. En particulier, β n'a pas de segments.
2. Montrez que les cercles osculateurs de γ sont un à un disjoints.
3. Montrez qu'une courbure avec la courbure strictement monotone ne peut pas avoir les auto-intersections.
4. Montrez qu'une courbure avec la courbure strictement monotone ne peut pas avoir les droites bi-tangentes (tangentes à γ dans $\gamma(t)$ et $\gamma(s)$, $t \neq s$).
5. Dessiner une courbe avec la courbure monotone et ses cercles osculateurs.