

---

Rappels de topologie et calcul différentiel

---

**Exercice 1** (Calculs de différentielles). Justifier que les applications suivantes sont différentiables et expliciter leur différentielle.

1.  $(A, B) \mapsto AB$  de  $\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{kp}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ .
2.  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .
3.  $f \mapsto f^{-1}$  de  $GL(E)$  dans lui-même, où  $E$  est un espace vectoriel réel de dimension finie.
4. Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert d'adhérence compacte et  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, formé de fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on considère alors  $(f, x) \mapsto f(x)$  de  $V \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
5. (*bonus*) Dans le cas de la question 3, que se passe-t-il si  $E$  est un espace de Banach de dimension quelconque? (cf. St Raymond, sect. X.9 par exemple)

**Exercice 2** (Restriction). Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lisse, où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $V$  un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $V \cap \Omega \neq \emptyset$ , montrer que  $f|_V$  est lisse. Exprimer la différentielle de  $f|_V$  en fonction de celle de  $f$ .

**Exercice 3** (Topologie quotient). 1. Soient  $X$  un espace topologique et  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ , on note  $p : X \rightarrow X/\sim$  la projection canonique. Rappeler la définition de la topologie quotient sur  $X/\sim$ .

2. Soit  $f : X/\sim \rightarrow Y$ , montrer que  $f$  est continue si et seulement si  $f \circ p$  est continue.
3. Soit  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , montrer que  $\mathbb{T}^n$  est compact et  $p$  est ouverte.
4. Soit  $\mathbb{RP}^n$  l'espace obtenu en quotientant  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence "être colinéaire", montrer que  $\mathbb{RP}^n$  est compact et  $p$  est ouverte.
5. Soit  $f : K \rightarrow Y$  continue bijective avec  $K$  compact,  $f$  est-elle un homéomorphisme?
6. On définit  $\mathbb{S}^1$  comme  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , montrer que  $\mathbb{T}^1$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ . Plus généralement montrer que  $\mathbb{T}^n$  est homéomorphe à  $(\mathbb{S}^1)^n$ .
7. (*bonus*) Soit  $\mathbb{CP}^n$  l'espace obtenu en quotientant  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence "être  $\mathbb{C}$ -colinéaire", montrer que  $\mathbb{CP}^n$  est compact et  $p$  est ouverte.