Variétés

Exercice 1 (Sous-variétés)**.**

1. Rappeler les quatre définitions équivalentes de sous-variété lisse de dimension d de $\mathbb{R}^n$.
2. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^n$ et donner leur dimension. On n'attend pas de justification détaillée.
   (a) La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne.
   (b) La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme sup.
   (c) L'union disjointe d'un plan et d'une droite de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Le tore $(\mathbb{S}^1)^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.
   (e) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
   (f) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
   (g) L'image de l'application $h :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}^2$ définie par $h : t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, t\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$.
3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une immersion injective, $h(\Omega)$ est-elle une variété ?
4. Montrer qu'une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension d est une variété lisse de dimension d.

Exercice 2 (La sphère)**.**

1. Montrer directement que $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\|_2 = 1\right\}$ est une variété lisse de dimension n, en construisant un atlas.
2. *(bonus)* Quel est le lien entre cette structure différentielle et celle construite dans la dernière question de l'exercice 4 du TD précédent.
3. Que ce passe-t-il si on remplace la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ par une autre norme $\|\cdot\|$?
4. *(bonus)* Combien faut-il de cartes au minimum pour définir un atlas sur la sphère ?

Exercice 3 (Produit de variétés)**.** Soient M et N deux variétés lisses. Montrer que $M \times N$ est une variété lisse. Quelle est sa dimension ? En déduire que $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ est une variété.