

Variétés (suite)

- Exercice 1** (Le tore). 1. Construire une structure différentielle sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ telle que la projection canonique $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ soit un difféomorphisme local.
2. Montrer que l'homéomorphisme de \mathbb{T}^n vers $(\mathbb{S}^1)^n$ construit dans l'exercice 3 du premier TD est un difféomorphisme.
3. (*bonus*) Combien faut-il de cartes au minimum pour définir un atlas sur le tore \mathbb{T}^n ?

Exercice 2 (Espaces projectifs). On rappelle que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est défini comme $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^*$. Soit $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $(x_0 : \dots : x_n)$ sa classe dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

- Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, montrer que $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ homéomorphe à \mathbb{R}^n via la projection canonique $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$.
- Montrer que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est une variété lisse.
- Montrer que p est lisse.
- Montrer que p restreinte à \mathbb{S}^n est un difféomorphisme local.

Exercice 3 (Variétés à bord). On rappelle qu'une variété à bord de dimension n est un espace topologique M , séparé, à base dénombrable et muni d'un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, où $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert du demi-espace $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ et les changements de cartes sont des restrictions à H^n de difféomorphismes entre ouverts de \mathbb{R}^n .

On note $\partial H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ le bord de H .

- Montrer que la boule $\overline{\mathbb{B}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ est une variété à bord.
- Soient M une variété à bord de dimension n et $x \in M$ tel que $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$ pour un certain α . Montrer que pour tout β tel que $x \in U_\beta$, $\varphi_\beta(x) \in \partial H^n$.
On appelle *bord* de M et on note ∂M l'ensemble des $x \in M$ tels que $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$ pour un certain α (donc pour tous).
- Montrer que $M \setminus \partial M$ est ouvert dans M et est une variété sans bord de dimension n .
- Montrer que ∂M est une variété sans bord de dimension $n - 1$.
- (*bonus*) Le produit de deux variétés à bord est-il une variété à bord (pour la structure différentielle produit) ? Et le produit d'une variété à bord par une variété sans bord ?