

---

## Espace tangent, différentielle

---

**Exercice 1** (Espace tangent à une sous-variété). Pour chacune des quatre caractérisations de sous-variété, décrire l'espace tangent  $T_p M \subset T_p N$  de la sous-variété  $M$  de  $N$ .

**Exercice 2** (Espace tangent d'un produit). Soient  $M$  et  $N$  deux variétés lisses, construire un isomorphisme naturel entre  $T_{(p,q)}(M \times N)$  et  $T_p M \times T_q N$ .

**Exercice 3** (Un calcul de différentielle). Calculer la différentielle de  $\bar{F} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  définie comme le quotient de l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$  :

$$F : (x, y) \mapsto (\cos(2\pi x) \cos(2\pi y), \cos(2\pi x) \sin(2\pi y), \sin(2\pi x)).$$

Déterminer sur quels domaines  $\bar{F}$  est un difféomorphisme local. La restriction à ces domaines est-elle un difféomorphisme ?

**Exercice 4** (Exemples de groupes de Lie). Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$  sont des variétés et décrire leurs tangents en  $I_n$ .