

Champs de vecteurs et dérivée de Lie

Exercice 1 (Redressement du flot). Soient M une variété fermée et $X \in \Gamma(TM)$. Soit $a \in M$ tel que $X(a) \neq 0$, montrer qu'il existe des coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) autour de a telles que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Question bonus : Les orbites sont-elles des sous-variétés ?

Exercice 2 (Transitivité du groupe des difféomorphismes). 1. Soient a et b dans la boule ouverte $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = b$ et $f \equiv \text{Id}$ hors de \mathbb{B} .

2. Soit M une variété connexe, montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M .

3. Cette action est-elle k -transitive ($k \in \mathbb{N}^*$) ?

Exercice 3 (Retraction de sous-niveaux). Soit M une sous-variété fermée de \mathbb{R}^n et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, on note $M_a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(]a-\varepsilon, b+\varepsilon])$ ne contienne pas de point critique de f , pour un certain $\varepsilon > 0$. Montrer que M_a et M_b sont difféomorphes.

Exercice 4 (Dérivée de Lie). Soient M une variété, $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

1. Montrer que $\mathcal{L}_X f = df \cdot X$.

2. Montrer que $\mathcal{L}_X(fY) = f\mathcal{L}_X Y + (df \cdot X)Y$.

3. Soient $\omega \in \Omega^1(M)$, montrer que

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X \omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y).$$

Exercice 5 (Crochet de Lie). 1. Soient X et $Y \in \Gamma(TM)$, montrer que $[X, Y]$ vérifie bien la règle de Leibniz (i.e. est une dérivation et définit bien un champ de vecteurs).

2. Vérifier que le crochet de Lie satisfait l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

En déduire que $\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$.

3. Soit φ un difféomorphisme. Montrer que $\varphi_*([X, Y]) = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.

4. Soient f et g deux fonctions lisses sur M , montrer que

$$[fX, gY] = f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X + fg[X, Y].$$