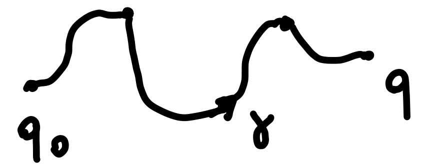
LA DERIVÉE SECONDE DE LA LONGUEUR

(M,g) variété riemannienne



$q_0, q_1 \in M$, $\quad a<b$

$L \quad \Omega \longrightarrow [0,\infty) \qquad L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma(t)\|_g \, dt$

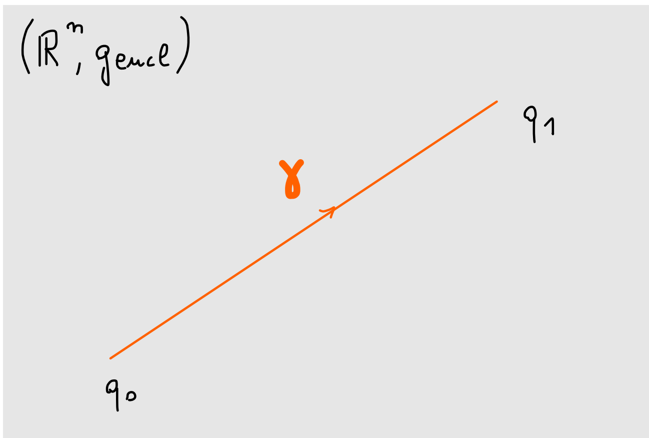
$$\Omega = \Omega([a,b], q_0, q_1) = \left\{ \gamma \cdot [a,b] \xrightarrow{C^0} M \ C^\infty \text{ par morceaux} \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma(a)=q_0 \\ \gamma(b)=q_1 \end{array} \right\}$$

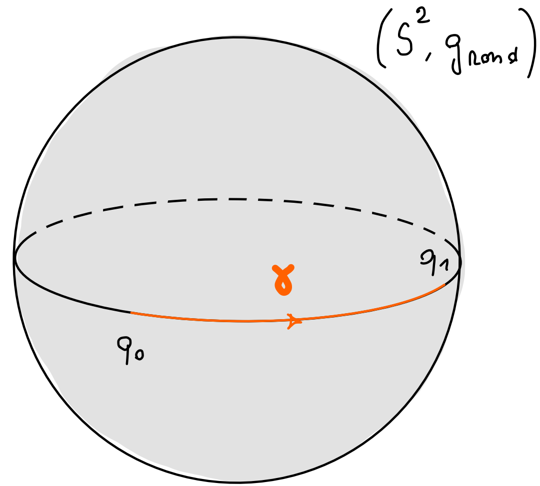
On sait que les points critiques γ de L avec $\|\gamma\|_g>0$ constante sont precisement les géodesiques qui relient q_0 et q_1

Certaines géodesics γ sont minima globaux de L,

i e $\quad L(\gamma) = d(q_0, q_1)$

exemples



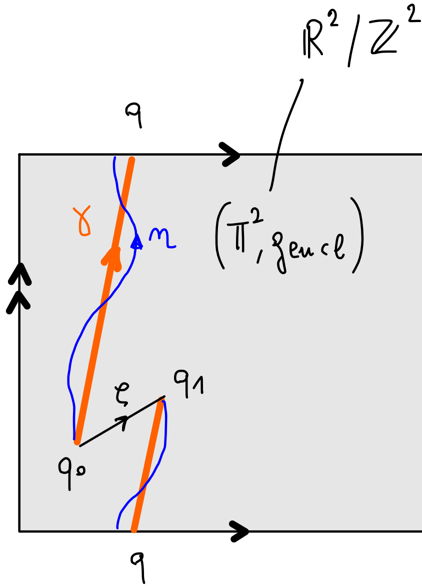


Certaines géodésiques γ sont minima locaux de L, mais pas minima globaux, i e

$$L(\gamma) > d(q_0, q_1)$$

$$L(\gamma) \leq L(\xi) \quad \forall \xi : [a,b] \to M \ \text{t q} \ \begin{array}{l} \xi(a) = q_0 \\ \xi(b) = q_1 \\ \xi \ C^0\text{-proche de } \gamma \end{array}$$

exemple

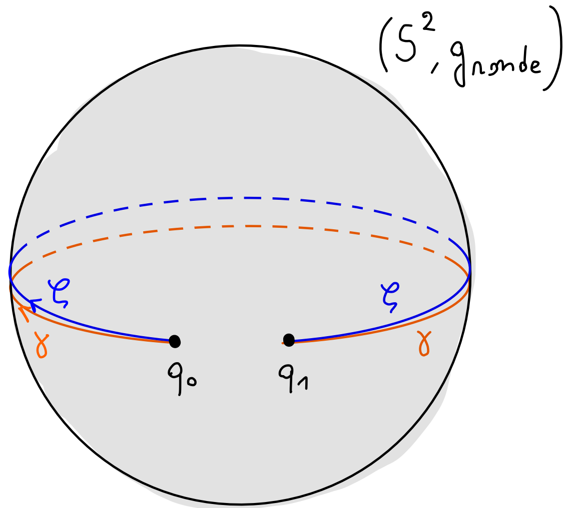


$$L(\gamma) > L(\xi)$$

$$L(\gamma) < L(\eta)$$

Certaines géodésiques ne sont même pas minima locaux de L

exemple



γ geodesique

$L(\gamma) > L(\xi)$

Pour comprendre le charactère d'une géodesique γ, calculons la deriveé seconde de L.

On suppose $\|\gamma\|_g \equiv 1$ (sans perte de généralité)

Soit $\Gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \xrightarrow{C^0} M$ une homotopie de γ à extremités fixées :

$\forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

$$\Gamma(s,t) = \Gamma_s(t), \quad \Gamma_0 = \gamma, \quad \Gamma_s(a) = \underset{q_0}{\underset{\shortparallel}{\gamma(a)}}, \quad \Gamma_s(b) = \underset{q_1}{\underset{\shortparallel}{\gamma(b)}}$$

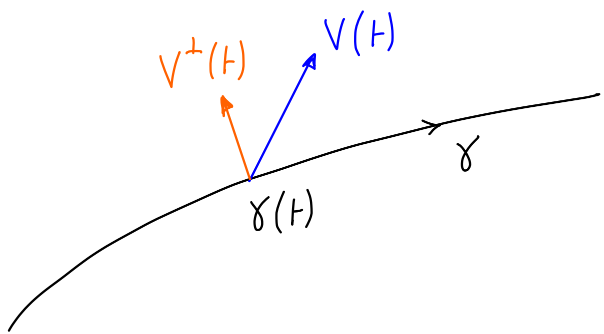
$$a = t_0 < t_1 < .. < t_k = b$$

$$\Gamma\Big|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_i,t_{i+1}]} \quad C^\infty$$

$V(t) := \partial_s \Gamma(s,t)\big|_{s=0}$ champs de vecteurs le long de γ, C^∞ par morceaux,

$V(a) = 0, \quad V(b) = 0$

$V^\perp(t) = V(t) - g\big(V(t), \dot\gamma(t)\big)\dot\gamma(t)$ projection orthogonale à $\dot\gamma(t)$



$\left(\|\dot\gamma\|_g \equiv 1 \right)$

Prop $\displaystyle \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = \int_a^b \left(\| \nabla_t V^\perp \|_g^2 - g\left(R(V^\perp, \dot\gamma)\dot\gamma, V^\perp\right)\right) dt$

Preuve

- $T(s,t) := \partial_t \Gamma(s,t)$, $\quad S(s,t) = \partial_s \Gamma(s,t)$, $\quad \begin{cases} V(t) = S(0,t) \\ \gamma(t) = T(0,t) \end{cases}$

$$\nabla_s T = \nabla_t S \qquad \left(\overset{\text{car}}{\nabla_s \partial_t = \nabla_t \partial_s} \right)$$

- $$\frac{d}{ds} L(\Gamma_s) = \int_a^b \frac{d}{ds}\sqrt{\| T(s,t) \|_g^2}\, dt = \int_a^b \frac{1}{2\| T \|_g} 2g(\overbrace{\nabla_s T}^{\nabla_t S}, T)\, dt$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{g(\nabla_t S, T)}{\| T \|_g}\, dt$$

- $\nabla_s \nabla_t - \nabla_t \nabla_s = R(S,T)$

on peut vérifier cette identité en coordonnées locales $x^1, \dots, x^n$

($\partial_t \Gamma$ ne s'annule nulle part $\Rightarrow \nabla_t = \nabla_{\partial_t \Gamma}$)

$$\nabla_s \nabla_t \partial_{x^i} = \nabla_s \left(\sum_j \partial_t \Gamma^j \, \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} \right) = \sum_j \left(\partial^2_{s,t} \Gamma^j \, \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} + \sum_k \partial_s \Gamma^k \partial_t \Gamma^j \, \nabla_{\partial_{x^k}} \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} \right)$$

$$\nabla_t \nabla_s \partial_{x^i} = \dots$$

$$(\nabla_s \nabla_t - \nabla_t \nabla_s) \partial_{x^i} = \sum_{j,k} \partial_s \Gamma^k \partial_t \Gamma^j \underbrace{\left(\nabla_{\partial_{x^k}} \nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} - \nabla_{\partial_{x^j}} \nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^i} \right)}_{R(\partial_{x^k}, \partial_{x^j}) \partial_{x^i}}$$

$$= R(S,T) \partial_{x^i}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\Gamma_s)$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\left(\frac{d}{ds} g(\nabla_t S, T)\right)\frac{1}{\|T\|_g} + g(\nabla_t S, T)\frac{d}{ds}\frac{1}{\|T\|_g}\right]\Big|_{s=0} dt$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(g(\underbrace{\nabla_s \nabla_t S}_{\nabla_t \nabla_s S + R(S,T)S}, T) + g(\nabla_t S, \underbrace{\nabla_s T}_{\nabla_t S}) - \frac{g(\nabla_t S, T)\, g(\overbrace{\nabla_s T}^{\nabla_t S}, T)}{\|T\|_g^3}\right)\Big|_{s=0} dt$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\underbrace{g(\nabla_t \nabla_s S, T)\big|_{s=0}}_{\frac{d}{dt} g(\nabla_s S|_{s=0}, \dot\gamma) - \cancel{g(\nabla_s S|_{s=0}, \nabla_t \dot\gamma)}} + g(R(V,\gamma)V,\gamma) + \underbrace{\|\nabla_t V\|_g^2 - g(\nabla_t V, \dot\gamma)^2}_{*}\right) dt$$

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_t V^{\perp}\|_g^2 &= \|\nabla_t V - \nabla_t(g(V,\dot\gamma)\dot\gamma)\|_g^2 \\
&= \|\nabla_t V - g(\nabla_t V,\dot\gamma)\dot\gamma\|_g^2 \\
&= \|\nabla_t V\|_g^2 + g(\nabla_t V,\dot\gamma)^2 - 2\,g(\nabla_t V,\dot\gamma)^2 \\
&= *
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[\underbrace{g(R(V,\gamma)V,\dot\gamma)}_{g(R(V^{\perp},\dot\gamma)V^{\perp},\dot\gamma) = -g(R(V^{\perp},\dot\gamma)\dot\gamma,V^{\perp})} + \|\nabla_t V^{\perp}\|_g^2 \Big]\, dt
$$

$\square$

$$V_a^b(\gamma) = \left\{ \begin{array}{l} V \text{ champs de vecteurs } C^\infty \text{ par morceaux} \\ \text{le long de } \gamma \text{ tq } V(a)=0,\ V(b)=0, \\ \text{et } g(V,\dot\gamma) \equiv 0 \end{array} \right\}$$

Forme d'indice

$$I_a^b \quad V_a^b(\gamma) \times V_a^b(\gamma) \to \mathbb{R} \quad \text{bilinéaire, symétrique}$$

$$I_a^b(V,V) := \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\Gamma_s)$$

où $\Gamma \quad (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \to M$, $\quad \Gamma(s,t) = \Gamma_s(t)$

$$\partial_s \Gamma \big|_{s=0} = V$$

Par identité de polarisation

$$\boxed{I_a^b(V,W)} = \frac{1}{2}\left(I_a^b(V+W,V+W) - I_a^b(V,V) - I_a^b(W,W)\right)$$

$$\boxed{= \int_a^b \left(g(\nabla_t V, \nabla_t W) - g(R(V,\gamma)\gamma, W)\right) dt}$$

$$\mathrm{Ker}\,(I_a^b) = \left\{ V \in V_a^b(\gamma) \;\middle|\; I_a^b(V, \,) = 0 \right\}$$

Déf $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont points conjugués le long de $\underbrace{\gamma}_{\text{géodesique}} [a,b] \to M$ quand $\underbrace{\mathrm{Ker}\,(I_a^b) \neq \{0\}}_{I_a^b \text{ est une forme bilinéaire } \textbf{dégénerée}}$

Prop $V \in \mathrm{Ker}(I_a^b)$ ssi $\begin{cases} \nabla_t^2 V + R(V,\dot\gamma)\dot\gamma = 0 & \text{(equation de Jacobi)} \\ g(V,\dot\gamma) \equiv 0 \\ V(a) = 0,\ V(b) = 0 \end{cases}$

(en particulier, V est C^∞)

Déf Un champs de vecteurs V le long de γ tq $\nabla_t^2 V + R(V,\dot\gamma)\dot\gamma \equiv 0$ est dit **champs de Jacobi**

exemple Dans $(\mathbb{R}^n, g_{eucl})$, l'equation de Jacobi devient $\nabla_t^2 V \equiv 0$, donc $V(t) = V(0) + t\dot V(0)$

Preuve

Supposons $V|_{[t_i, t_{i+1}]}$ C^∞, où $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$

$$I_a^b(V,W) \underset{\substack{\text{intégration} \\ \text{par parties}}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \left(g(\nabla_t V, W)\Big|_{t=t_{i+1}^-} - g(\nabla_t V, W)\Big|_{t=t_i^+} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} g\left(\nabla_t^2 V + R(V,\dot\gamma)\dot\gamma, W\right) dt \right)$$

$\Leftarrow$ ✓

$\Rightarrow)$ Supposons $V \in \mathrm{Ker}\, I_a^b$

- $$g\left(\nabla_t^2 V + R(V,\gamma)\gamma,\ \gamma\right) = g\left(\nabla_t^2 V, \gamma\right) = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{g(V,\gamma)}_{\equiv 0} \equiv 0$$

- $\forall\ W \in V_a^b(\gamma)$ t.q. $W(t_i) = 0$ $\forall\ i = 0, \dots, k$ on a

$$0 = I_a^b(V,W) = -\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g\left(\nabla_t^2 V + R(V,\dot{\gamma})\gamma, W\right)$$

- Les deux points précedents impliquent

$$\nabla_t^2 V + R(V,\gamma)\dot{\gamma} = 0 \quad \forall\, t \in [a,b] \setminus \{t_1, \dots, t_{k-1}\}$$

- Il reste à prouver que V est C^1

$\forall\, i = 1, \dots, K-1$
et $Z \in V_a^b(\gamma)$ tq $Z(t_j) = 0 \quad \forall\, j \neq i$ on a

$$0 = I_a^b(V, Z) = g\left(\nabla_t V \big|_{t=t_i^-} - \nabla_t V \big|_{t=t_i^+} , Z(t_i) \right)$$

Comme Z est arbitraire,

$$\nabla_t V \big|_{t=t_i^-} = \nabla_t V \big|_{t=t_i^+}$$

donc V est C^1

$\square$

Rmq Dans la page précédente, par bootstrapping on conclut que V est C^∞.

$$\nabla_t^2 V = -R(V,\gamma)\gamma$$

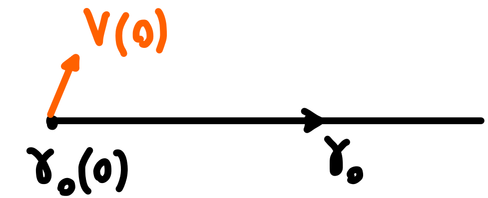
si V est C^k, alors il est C^{k+2}

Rmq L'equation de Jacobi est la linearisation de l'equation des géodesiques.

si $\gamma_s \; [a,b] \to M$ est une famille lisse de geodesiques, alors $V(t) = \partial_s \gamma_s(t)\big|_{s=0}$ est un champs de Jacobi

$$\left(\begin{aligned} \nabla_t^2 V &= \nabla_t^2 \partial_s \gamma_s\Big|_{s=0} = \nabla_t \nabla_s \dot{\gamma}_s\Big|_{s=0} = \nabla_s \underbrace{\nabla_t \dot{\gamma}_s}_{\equiv 0} + R(\dot{\gamma}_s, \partial_s \gamma_s)\dot{\gamma}_s\Big|_{s=0} \\ &= -R(V, \dot{\gamma}_0)\dot{\gamma}_0 \end{aligned} \right)$$

Réciproquement, si V est un champs de Jacobi le long de γ_0, on pose.



$$\gamma_s(0) = \exp_{\gamma_0(0)}\big(sV(0)\big)$$

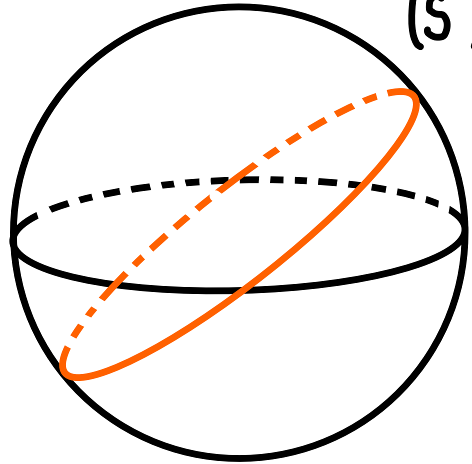
$$\gamma_s(t) := \exp_{\gamma_s(0)}\big(t\,T(s)\big) \qquad \text{(géodesique)}$$

où T est un champs de vecteurs le long de $s \mapsto \gamma_s(0)$ tq $\nabla_s T\big|_{s=0} = \nabla_t V$

Alors $\boxed{V(t) = \partial_s\big|_{s=0}\, \gamma_s(t)}$

$$\left(\begin{aligned}
W(t) &:= \partial_s\big|_{s=0}\gamma_s(t)\\
W(0) &= \partial_s\big|_{s=0}\gamma_s(0) = d\exp_{\gamma_0(0)}(0)\,V(0) = V(0)\\
\nabla_t W\big|_{t=0} &= \nabla_t\partial_s\gamma_s(t)\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}} = \nabla_s\big(\underbrace{\dot\gamma_s(0)}_{T(s)}\big)\Big|_{s=0} = \nabla_t V\big|_{t=0}\\
\nabla_t^2 W &= \nabla_t^2\partial_s\gamma_s(t)\Big|_{s=0} = \nabla_t\nabla_s\dot\gamma_s(t)\Big|_{s=0}\\
&= \nabla_s\underbrace{\nabla_t\dot\gamma_s(t)}_{\equiv 0}\Big|_{s=0} + R\big(\dot\gamma_s(t),\partial_s\gamma_s(t)\big)\dot\gamma_s(t)\Big|_{s=0}\\
&= -R\big(W,\dot\gamma_0\big)\dot\gamma_0 \qquad\qquad \Rightarrow\ W \equiv V
\end{aligned}\right)$$

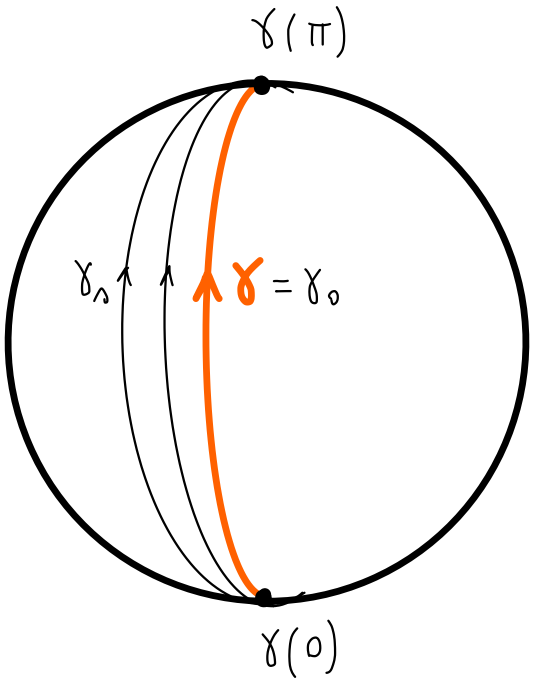
exemple



(S^2, gronde) sphère unité

toute géodesique est fermée de longueur 2π

Si $\gamma : [0, \pi] \to S^2$ est une géodesique de longueur π, alors $\gamma(0)$ e $\gamma(\pi)$ sont antipodaux, e conjugués le long de γ



en fait $\exists$ famille de géodesiques γ_s tq

$$\gamma_0 = \gamma, \quad \gamma_s(0) = \gamma(0)$$
$$\gamma_s(\pi) = \gamma(\pi)$$
$$\forall s$$

$V = \partial_s \gamma_s |_{s=0}$ est un champs de Jacobi, $V \not\equiv 0$

$V(0) = 0, \quad V(\pi) = 0$

exercice

Dans (S^2, g_{ronde}), $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont conjugués le long de γ ssi $\gamma(a) = \pm \gamma(b)$

Rmq L'équation de Jacobi est une EDO linéaire du deuxième ordre

$\forall\ \gamma\ I \to M$ géodésique, $t_0 \in I$, $v, w \in T_{\gamma(t_0)}M$

$\exists\, !$ champs de Jacobi $J = J_{t_0,v,w}$ tq $\begin{cases} J(t_0) = v \\ \nabla_t J\big|_{t=t_0} = w \end{cases}$

$(v,w) \mapsto J_{t_0,v,w}$ est linéaire injective

$\Rightarrow$ les champs de Jacobi le long de γ forment un espace vectoriel de dimension $2\dim(M)$