Rmq Si $\gamma : (a,b) \to M$ est une géodésique, et J un champs de Jacobi le long de γ, alors

- $g(\dot\gamma(t), J(t)) = 0 \quad \forall t \in (a,b)$

  $\Leftrightarrow$

  $g(\dot\gamma(t_0), J(t_0)) = g(\dot\gamma(t_0), \nabla_t J|_{t=t_0}) = 0$

  pour un certain $t_0 \in (a,b)$

- $g(\dot\gamma(t), J(t)) = 0 \quad \forall t \in (a,b)$

  $\Leftrightarrow$

  $g(\dot\gamma(t_0), J(t_0)) = 0$ et $g(\dot\gamma(t_1), J(t_1)) = 0$

  pour certains $t_0, t_1 \in (a,b)$, $t_0 \neq t_1$

Preuve

$$f(t) = g\big(\dot\gamma(t), J(t)\big),$$

$$\dot f(t) = g\big(\underbrace{\nabla_t \dot\gamma}_{\equiv 0}, J(t)\big) + g\big(\gamma(t), \nabla_t J\big) = g\big(\dot\gamma(t), \nabla_t J\big)$$

$$f(t) = g\big(\gamma(t), \underbrace{\nabla_t^2 J}_{-R(J,\dot\gamma)\dot\gamma}\big) = -g\big(R(J,\gamma)\gamma, \gamma\big) \equiv 0$$

$$\Rightarrow f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\,\dot f(t_0) \qquad \forall t, t_0$$

$\square$

Rmq • $\gamma(t)$ et $t\gamma(t)$ sont champs de Jacobi

$$\left(\underbrace{\nabla_t^2 \dot\gamma}_{0} + \underbrace{R(\dot\gamma, \dot\gamma)}_{0} \dot\gamma = 0, \quad \underbrace{\nabla_t^2 (t\dot\gamma)}_{\nabla_t(\dot\gamma + t\nabla_t \dot\gamma) = 0} + \underbrace{R(t\dot\gamma, \dot\gamma)}_{0} \dot\gamma = 0 \right)$$

• Si J est un champs de Jacobi le long de γ (parametrée avec $\|\gamma\|_g \equiv 1$) alors

$$J^\perp(t) := J(t) - \underbrace{g(J(t), \dot\gamma(t))}_{\text{affine en } t} \dot\gamma(t)$$

est un champs de Jacobi tq

$$g(J^\perp, \dot\gamma) \equiv 0$$

- Si J est un champs de Jacobi tq.

$$J(t) = f(t)\,\gamma(t) \quad \forall t$$

$$J(t_0) = 0$$

$$J \neq 0$$

alors $J = \lambda\,(t - t_0)\,\dot{\gamma}(t)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

En particulier $J(t) \neq 0 \quad \forall t \neq t_0$

Prop Si (M,g) a courbure sectionnelle ≤ 0

(i.e $K_g(\Pi) \leq 0 \quad \forall x \in M$, 2-plan $\Pi \subset T_x M$)

alors la forme d'indice de toute geodesique est définie positive

Preuve

$\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ tq $\|\dot{\gamma}\|_g \equiv 1$ (sans perte de généralite)

avec forme d'indice I_a^b

$$I_a^b(V,V) = \int_a^b \Big(\| \nabla_t V \|_g^2 - g\big(R(V,\gamma)\gamma, V\big)\Big)\, dt$$

$$= \int_a^b \Big(\| \nabla_t V \|_g^2 - \underbrace{K_g(\mathrm{span}\{V,\gamma\})}_{\leqslant 0} \big(\|V\|_g^2 - \cancel{g(V,\gamma)^2} \big)\Big)\, dt$$

$$\geq \int_a^b \| \nabla_t V \|_g^2 \, dt \quad \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{ssi} \quad \nabla_t V \equiv 0$$

$$(\text{i.e ssi } V \equiv 0)$$

$$\square$$

Prop Soit $v \in T_xM \setminus \{0\}$ t.q. $y = \exp_x(v)$ est défini

(toujours vrai si M est complète)

Le points x, y ne sont pas conjugués le long de la géodesique $\gamma\ [0,1] \to M$, $\gamma(t) = \exp_x(tv)$

ssi

$\exp_x$ est un difféomorphisme local en v

(i.e. $\exists\ U \subset T_xM$ voisinage ouvert de v t.q. $\exp_x|_U$ est un difféomorphisme sur son image)

Preuve Par thm de la fonction inverse, $\exp_x$ est difféo locale en v ssi $d\exp_x(v)\ \underbrace{T_v(T_xM)}_{\cong T_xM} \xrightarrow{\cong} T_yM$ isom

- $\forall w \in T_x M$ on pose $\Gamma_w \cdot (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \longrightarrow M$

$$\Gamma_w(s,t) = \exp_x\big(t(v + sw)\big)$$

- $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\quad t \longmapsto \Gamma_w(s,t)$ est une géodésique

$\gamma = \Gamma_w(0, \ )$

- $J_w = \partial_s \Gamma_w \big|_{s=0}$ est un champs de Jacobi le long de γ

- $J_w(0) = \partial_s\big|_{s=0} \underbrace{\exp_x\big(0\ (v+sw)\big)}_{\equiv x} = 0$

- $w \mapsto J_w$ est linéaire injective

$$\left(\begin{array}{l} \text{si } J_w \equiv 0, \text{ alors} \quad 0 = \partial_s\big|_{s=0} \exp_x\big(t\,(v+sw)\big) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = d\exp_x(tv)\,tw \qquad \forall t \in [0,1] \\ \text{pour } t>0 \text{ petit, } d\exp_x(tv) \text{ est un isomorphisme,} \\ \text{donc } w = 0 \end{array} \right)$$

- $V = \{ J_w \mid w \in T_xM \}$ $\qquad \dim V = \dim(T_xM)$

$\Rightarrow$ V est l'espace vectoriel de champs de Jacobi J le long de γ tq $J(0) = 0$

$\Rightarrow$ x et y sont conjugués le long de γ ssi $\exists\, w \in T_x M$ tq. $J_w(1) = 0$

- $J_w(1) = \partial_s\big|_{s=0} \exp_x(v + sw) = d\exp_x(v)\, w$

$\Rightarrow$ x et y sont conjugués le long de γ ssi $\mathrm{Ker}\big(d\exp_x(v)\big) \neq \{0\}$

$\square$

Prop Si $\gamma\ [0,S) \to M$ est une géodesique tq. $\gamma(0)$ est conjugué à $\gamma(T)$ le long de $\gamma|_{[0,T]}$ pour un certain $T \in [0,S)$ alors

$$L\left(\gamma|_{[0,\tau]}\right) > d\left(\gamma(0), \gamma(\tau)\right) \quad \forall \tau \in (T,S)$$

Plus precisement $\exists$ homotopie $\gamma_s \cdot [0,\tau] \to M$, $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$
C^∞ par morceaux tq

$$\gamma_0 = \gamma|_{[0,\tau]}, \quad \gamma_s(0) = \gamma(0), \ \gamma_s(\tau) = \gamma(\tau)$$

$$\text{et } L(\gamma_s) < L\left(\gamma|_{[0,\tau]}\right) \quad \forall s \neq 0$$

Preuve

- Comme $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$ sont conjugués le long de $\gamma|_{[0,T]}$, $\exists$ champs de Jacobi J tq $J(0)=0$, $J(T)=0$, $g(J,\dot\gamma)\equiv 0$, $J\not\equiv 0$
- $\tau\in(T,S)$
- Soit W un champs de vecteurs arbitraire le long de γ tq.

$$W(0)=0,\ W(\tau)=0,\ W(T)=-\nabla_t J|_{t=T},\ g(W,\dot\gamma)\equiv 0$$

- $$\tilde{J}(t) = \begin{cases} J(t) & t \in [0,T] \\ 0 & t \in [T,\tau] \end{cases}$$

$\tilde{J}$ est C^0, et C^∞ par morceaux

$\forall \delta > 0$

$$V_\delta(t) = \tilde{J}(t) + \delta W(t)$$

V_δ est un champs de vecteurs continue, et C^∞ par morceaux le long de $\gamma|_{[0,\tau]}$

Calculons la forme d'indice

$$I_0^T(V_\delta, V_\delta) = \underbrace{I_0^T(\tilde{J}, \tilde{J})}_{\substack{I_0^T(J,J) \\ \shortparallel \\ 0}} + 2\delta \underbrace{I_0^T(\tilde{J}, W)}_{I_0^T(J,W)} + \delta^2 I_0^T(W,W)$$

⚠ $W(T) \neq 0$

$$I_0^T(J,W) = \int_0^T \Big(g(\nabla_t J, \nabla_t W) - g(R(J,\gamma)\gamma, W) \Big) dt$$

$$= -\int_0^T g\big(\underbrace{\nabla_t^2 J + R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma}}_{0}, W\big) dt + \underbrace{g(\nabla_t J, W)\Big|_{t=T}}_{-\|\nabla_t J\|_g^2 \big|_{t=T}} < 0$$

$$\Rightarrow \quad I_0^\tau(V_\delta, V_\delta) < 0 \quad \text{si } \delta > 0 \text{ est petit}$$

- $\gamma_s(t) := \exp_{\gamma(t)}(s V_\delta(t))$

$$\Rightarrow \quad \gamma_0 = \gamma, \quad \gamma_s(0) = \gamma(0), \quad \gamma_s(\tau) = \gamma(\tau)$$

$$f(s) = L(\gamma_s)$$

$$\dot f(0) = 0, \quad \ddot f(0) = I_0^\tau(V_\delta, V_\delta) < 0$$

$$\Rightarrow f(s) < f(0) \quad \forall s \neq 0 \text{ petit}$$

$\square$

Rmq En fait on a prouvé que, si $\gamma : [a,b] \to M$ est une géodesique tq $\gamma(t_0)$ est conjugué à $\gamma(t_1)$ le long de $\gamma|_{[t_0,t_1]}$, et $[t_0,t_1] \subset [a,b) \cup (a,b]$

I_a^b n'est pas semi-défimie positive

ie $\exists V$ champs de vecteurs le long de γ

tq $V(a) = 0$, $V(b) = 0$, $I_a^b(V,V) < 0$

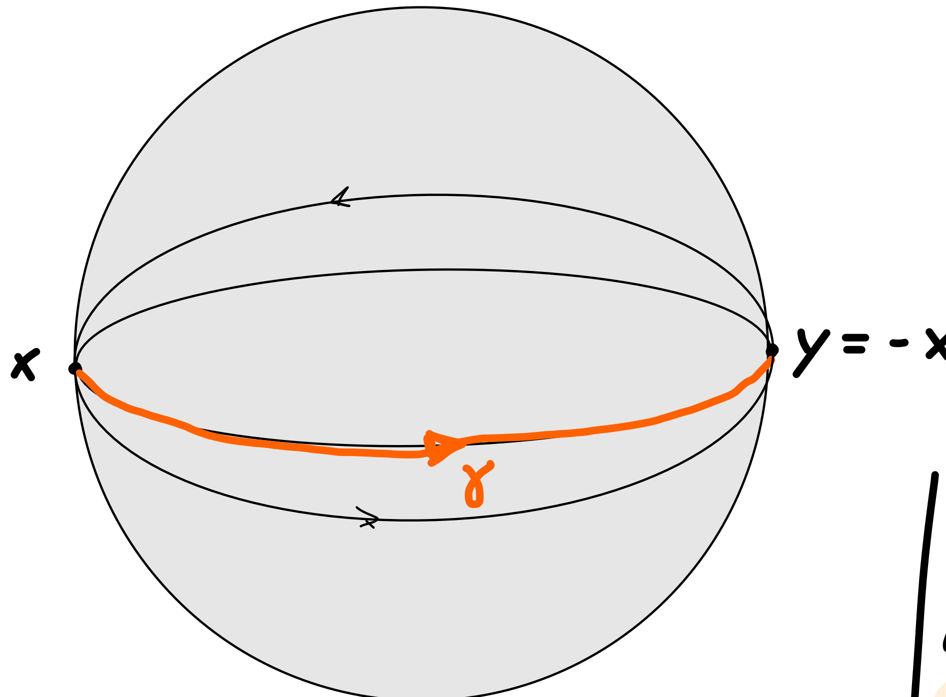
Rmq $\gamma\ I \to M$ geod

$I \supset [t_0, t_1]$ t.q.

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \gamma(t_0), \gamma(t_1) \text{ sont conjugués le long de } \gamma|_{[t_0,t_1]} \\ \bullet\ \forall\ [s_0, s_1] \subsetneq [t_0, t_1]\ \gamma(s_0) \text{ n'est pas conjugué à } \gamma(s_1) \text{ le long de } \gamma|_{[s_0,s_1]} \end{array}\right.$$

- $I_{t_0}^{t_1} \geqslant 0$ (semi-déf pos) et $\operatorname{Ker}(I_{t_0}^{t_1}) = 0$
- $\forall\ [s_0, s_1] \subsetneq [t_0, t_1]$ $I_{s_0}^{s_1} > 0$ (déf pos.) $\Longrightarrow$ $\gamma|_{[s_0,s_1]}$ est min loc. struct de L

exemple



x et y sont conj le long de γ

γ n'est pas un min loc STRICT de la longueur

Une parenthèse de topologie.

- Soit M un espace topologique (eg une variété)

Un **revêtement** de M est un espace topologique N muni d'une application continue e surjective

$$\pi \quad N \to M$$

tq $\forall x \in M \quad \exists\, U \subset M$ voisinage ouvert de x tq

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha$$

$$\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U \text{ homeomorphisme } \forall \alpha$$

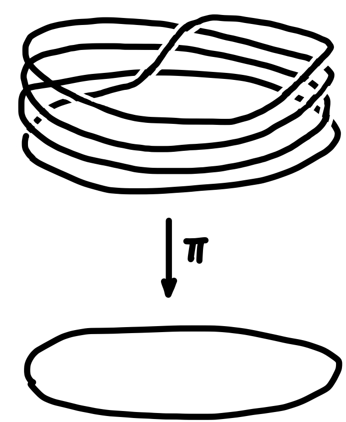
exemple

- $S^1 \subset \mathbb{C}$ cercle unité, $p \in \mathbb{N}$

  $\pi : S^1 \longrightarrow S^1$

  $\pi(e^{i\theta}) = e^{ip\theta}$

  revêtement à p feuillets



- $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

  $\pi(t) = e^{it}$

Deux rêvetements $\pi_1 : M_1 \to M$ et $\pi_2 : M_2 \to M$ sont **isomorphes** quand $\exists$ homeomorphisme

$$\phi : M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$$

t q le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Prop Si $N \xrightarrow{\pi} M$ est un rêvetement avec base M connexe, alors $\# \pi^{-1}(x) = \# \pi^{-1}(y)$ par arcs

$\forall x, y \in M$

Thm Toute espace topologique M connexe et localement simplement connexe (e g une variété) admet un revêtement universel

$$\begin{cases} \pi \quad \tilde{M} \longrightarrow M & \text{revêtement} \\ \tilde{M} \text{ simplement connexe} \end{cases}$$

Le revêtement universel est unique à isomorphisme près

$$\pi^{-1}(x) \cong \underbrace{\pi_1(M)}_{\text{groupe fondamentale}} \quad \forall x \in M$$

Si $N \to M$ est un autre revêtement, on a un revetement $\tilde{M} \to N$ t.q le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr] & \\
M & N \arrow[l]
\end{tikzcd}$$